УДК 517.5

І. В. Андрусяк[✉], О. Я. Бродяк

СИСТЕМИ БІОРТОГОНАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

З допомогою конформних відображень однозв'язної області на одиничний круг побудовано системи біортогональних функцій, які є базисами у просторах аналітичних функцій.

Ключові слова: *біортогональна система функцій, конформні відображення, рівняння Гельмгольца.*

Вступ. Базис у просторі функцій, аналітичних в однозв'язній області комплексної площини, задає система аналітичних функцій, біортогональних на відповідних замкнених кривих. Розвинення функцій та многочленів за експоненціальними функціями з використанням контурного інтегрування досліджено раніше [1−10]. У працях М. А. Сухорольського [7, 8] проаналізовано властивості біортогональних систем функцій та їх використання для побудови розв'язків плоских та просторових крайових задач для рівняння Гельмгольца.

Це дослідження присвячене побудові системи біортогональних функцій, які є базисами у просторах аналітичних функцій, використовуючи конформні відображення однозв'язної області на одиничний круг.

1. Загальний підхід до побудови розв'язків. Нехай $w = \varphi(z)$ − конформне відображення однозв'язної області D розширеної комплексної z-площини на круг $K : |w| \le 1$ комплексної w-площини, і нехай $z = \varphi^{-1}(w)$ − обернене відображення.

Запишемо рівняння Гельмгольца, використовуючи змінні $w, \bar{w}$:

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} + \alpha\left(w\frac{\partial U}{\partial w} + \bar{w}\frac{\partial U}{\partial \bar{w}}\right) + æU = 0\,, \tag{1}$$

де $\alpha, æ = \text{const}$, $U(w, \bar{w})$ − дійснозначна функція.

Множину розв'язків цього рівняння в крузі можна записати у вигляді [7, 10]

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\bar{w})\,, \tag{2}$$

де $$J_m^*(w\bar{w}) = J_m^*\left(|w|^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^m |w|^{2n}}{2^{2n+m}(n+m)!\,n!}\,, \qquad \alpha_n^m = \prod_{k=0}^{n-1}[(m+2k)\alpha + æ]\,,$$

$n = 1, 2, \ldots$, $\alpha_0^m = 1$; c_m − довільні комплексні сталі. Функції $J_m^*(w\bar{w})$, якщо $\alpha = 0$ і $æ > 0$, безпосередньо виражають через функції Бесселя m-го порядку, $J_m^*\left(|w|^2\right) = \dfrac{J_m(\sqrt{æ}\,|w|)}{(\sqrt{æ}\,|w|)^m}$.

Перейдемо до нових змінних $z = \varphi^{-1}(w)$, $\bar{z} = \overline{\varphi}^{-1}(w)$. Оскільки $\varphi'(z) \ne 0$, $z \in D$, то рівняння (1) можемо записати у вигляді

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \alpha\left[\varphi(z)\,\overline{\varphi'(z)}\,\frac{\partial U}{\partial z} + \overline{\varphi(z)}\,\varphi'(z)\,\frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\right] + æ\,\varphi'(z)\,\overline{\varphi'(z)}\,U = 0\,. \tag{3}$$

✉ andrusyak.ivanna@gmail.com

Множину його розв'язків одержимо з (2), використовуючи заміну змінних $w = \varphi(z)$, $\bar{w} = \bar{\varphi}(z)$:

$$U(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi^m(z) J_m^*\left(\varphi(z)\,\bar{\varphi}(z)\right). \tag{4}$$

2. Розв'язок для круга. Запишемо розв'язок рівняння (1) у крузі $K : |w| < 1$ за умови, що

$$U(w,\bar{w})|_K = f(t), \quad t \in C = \partial K, \tag{5}$$

де $f(t)$ − функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд, тобто

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m. \tag{6}$$

Відомо (див. [9], с. 192), що якщо ряд за системою функцій, аналітичних у закритій області $\bar{G}$, рівномірно збігається на границі $L = \partial G$, то він рівномірно збігається в $\bar{G}$, а його сума є неперервною на L і аналітичною в G функцією. Однією з достатніх умов рівномірної збіжності розвинення функції $g(t)$ на границі L за системою функцій, аналітичних в області $\bar{G}$, є її належність до класу неперервних функцій Гельдера (див. [9], с. 275).

Отже, з рівномірної збіжності ряду (6) випливає рівномірна збіжність цього ряду в $\bar{K}$, а також аналітичність функції $f(z)$ в K її неперервність на C.

Підставляючи вираз (2) в умову (5), використовуючи зображення (6) і рівність $w\bar{w} = 1$, $w \in C$, отримаємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо коефіцієнти $c_m = d_m / J_m^*(1)$ і далі запишемо розв'язок задачі:

$$U(w,\bar{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\bar{w}). \tag{7}$$

Таким чином, розв'язок задачі задаємо у вигляді ряду за системою функцій $\{w^m J_m^*(w\bar{w})\}$, при цьому через обмеженість функцій $J_m^*\left(|w|^2\right)$ і рівномірну збіжність ряду (6) в $\bar{K}$ ряд (7) збігається також рівномірно в $\bar{K}$.

3. Базис у просторі функцій, аналітичних в області, обмеженій параболою. Нехай область D − внутрішність параболи з рівнянням $\rho \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi^2}{16}$, де $z = \rho e^{i\varphi}$. Конформне її відображення на одиничний круг $K : |w| < 1$ і обернене до нього відображення задають функції

$$w = \varphi(z) = \operatorname{tg}^2 \sqrt{z}, \quad z = -\frac{1}{4} \ln \frac{1 + i\sqrt{w}}{1 - i\sqrt{w}}.$$

Точки параболи $z = \frac{\pi^2}{16}$, $z = \frac{\pi^2}{8} i$, $z = -\frac{\pi^2}{8} i$, $z = -\infty$ відображаються, відповідно, у точки кола $w = 1$, $w = e^{i\theta}$, $w = e^{-i\theta}$, $w = -1$, де $\theta = 2 \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$.

Введемо систему функцій

$$\{g_n(z) = \mathrm{tg}^{2n}\sqrt{z}\}_{n=0}^{\infty}, \quad z \in D. \tag{8}$$

Використовуючи отримані раніше [6] розвинення, зокрема

$$\mathrm{tg}^{2n}(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell} R_{2\ell}^{(2n)} z^{2\ell},$$

де $R_{2l}^{(2n)} = \frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell)!}\sum_{k=0}^{\ell} 2^{2\ell-2k} C_{2\ell}^{2\ell-2k} G_{2\ell}^{-(2n)} E_{2\ell-2k}^{(2n)}(n)$, знайдемо розвинення функцій (8) за степенями незалежної змінної:

$$g_n(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell} R_{2\ell}^{(2n)} z^{\ell}, \quad |t| < \frac{\pi^2}{16}. \tag{9}$$

Побудуємо спряжену до (8) і (9) систему функцій. Спочатку знайдемо розвинення функції $(\sqrt{z}\,\mathrm{ctg}\sqrt{z})^{2n}$ в околі нуля за степенями незалежної змінної. Використовуючи формулу розкладу $(t\,\mathrm{ctgt})^{n}$ з праці [6], отримаємо:

$$(\sqrt{z}\,\mathrm{ctg}\sqrt{z})^{2n} = z^{n}(\mathrm{ctg}\sqrt{z})^{2n} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^{\ell} Q_{2\ell}^{(2n)} z^{\ell}.$$

Далі знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\mathrm{ctg}^{2n}\sqrt{z}$ в околі нульової точки:

$$F_n(z) = \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell} Q_{2\ell}^{(2n)} \frac{1}{z^{n-\ell}}.$$

Тепер знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\frac{-1}{m}\frac{d}{dz}\varphi^{-m}(z) = = \varphi^{-(m+1)}(z)\,\varphi'(z)$, $m \geq 1$, де $\varphi(z) = \mathrm{tg}^{2}\sqrt{z}$, яка задає загальний член відповідної спряженої системи. Отже,

$$\omega_m(z) = \frac{-1}{m}\frac{d}{dz}F_m(z) = \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^{\ell}\frac{(m-\ell)}{m} Q_{2\ell}^{(2m)}\frac{1}{z^{m-\ell+1}}.$$

Якщо $m = 0$, то $\varphi^{-1}(z)\,\varphi'(z) = (\sqrt{z}\cos z \sin z)^{-1} = 2(\sqrt{z}\sin 2\sqrt{z})^{-1}$ і згідно з формулою (13) з [6] маємо $\omega_0(z) = \frac{1}{z}$. Отже, для функцій системи $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ отримаємо такі формули:

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}; \quad \omega_m(z) = \sum_{\ell=0}^{m-1}(-1)^{\ell}\frac{(m-\ell)}{m} Q_{2\ell}^{(2m)}\frac{1}{z^{m-\ell+1}}, \quad m \geq 1. \tag{10}$$

Використовуючи співвідношення (9) і (10) та враховуючи, що $\omega_m(z) = \frac{-1}{m}\frac{d}{dz}F_m(z)$, випишемо розвинення чотирьох перших членів цих систем:

$$g_0(z) = 1, \quad g_1(z) = z + \frac{z^3}{9} + \frac{2}{3}z^4 + \ldots;$$

$$g_2(z) = z^2 + \frac{4}{3}z^5 + \frac{1}{81}z^6 + \ldots;$$

$$g_3(z) = z^3 + \frac{1}{9}z^5 + 2z^6 + \ldots;$$

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}; \quad \omega_1(z) = \frac{1}{z^2}; \quad \omega_2(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^2}; \quad \omega_3(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}.$$

На цих прикладах легко переконатися, що виконуються умови біортогональності.

За теоремою 1 з праці [6] система сум рядів (9) є базисом у просторі E_r, $0 < r \le \dfrac{\pi^2}{16}$, і за теоремою 2 з цієї ж праці система функцій (8) також є базисом у просторі функцій, аналітичних в області D.

Згідно зі співвідношеннями (9) і (10) маємо такі системи функцій:

$$\left\{ g_n^*(z) = \frac{d}{dz}\frac{\varphi^{n+1}(z)}{n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}; \quad \left\{ \omega_m^*(z) = F_{m+1}(z) \right\}_{m=0}^{\infty}, \quad z \in D.$$

За теоремою 1 [6] система функцій $\{g_n^*(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є базисом у просторі функцій, аналітичних в області D. Враховуючи, що $g_n^*(z) = \operatorname{tg}^{2n}\sqrt{z}(\operatorname{tg}^2\sqrt{z})'$, а $\omega_m^*(z) = \Gamma\left[\operatorname{ctg}^{2(m+1)} z\right]$, запишемо розвинення перших членів цих систем:

$$g_0^*(z) = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{8}{3}z^3 + \ldots;$$

$$g_1^*(z) = z + \frac{4}{9}z^3 + \frac{10}{3}z^4 + \frac{1}{27}z^5 + \ldots;$$

$$g_2^*(z) = z^2 + \frac{1}{3}z^4 + 4z^5 + \frac{1}{81}z^6 + \ldots;$$

$$\omega_0^*(z) = \frac{1}{z}; \quad \omega_1^*(z) = \frac{1}{z^2}; \quad \omega_2^*(z) = \frac{1}{z^3}; \quad \ldots.$$

На прикладах цих розкладів можна перевірити виконання відповідних умов біортогональності.

Висновки. Побудовано розв'язок рівняння Гельмгольца для однозв'язної області. Запропонований підхід можна поширити на крайові задачі для цього рівняння в областях ширшого класу і, відповідно, інших конформних перетворень цих областей на круг чи зовнішність круга. Крім того, під час побудови базисів у відповідних просторах аналітичних функцій природно виникають інші базиси, які можна використати для побудови розв'язків крайових задач Діріхле чи Неймана для рівняння Гельмгольца у цих областях.

1. *Дзядик В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Москва: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Том 2. – Москва: Наука, 1968. – 624 с.
3. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1964. – 440 с.
4. *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 346. – С. 111–115.
5. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238–254.
   Те саме: *Sukhorol's'kyi M. A.* Expansion of functions in a system of polynomials biorthogonal on a closed contour with a system of functions regular at infinitely remote point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 2. – P. 268–288.
   https://doi.org/10.1007/s11253-010-0350-6
6. *Сухорольський М. А., Андрусяк І. В., Коляса Л. І., Бродяк О. Я.* Біортогональні системи нелінійних комбінацій експоненціальних функцій // Вісник Ужгородськ. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – № 1 (28). – С. 125–134.

7. *Сухорольський М. А.* Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України, 2014. – С. 160–163.
8. *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 2. – С. 52–62.
   Те саме: *Sukhorolsky M. A., Dostoyna V. V.* One class of biorthogonal systems of functions that arise in the solution of the Helmholtz equation in the cylindrical coordinate system // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 5. – P. 541–554.
   https://doi.org/10.1007/s10958-013-1415-5
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 698 с.
10. *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. – New York: Dover Publications Inc, 2000. – 1130 p.

СИСТЕМЫ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

С помощью конформных отображений односвязной области на единичный круг построены системы биортогональных функций, которые являются базисами в пространствах аналитических функций.

Ключевые слова: *биортогональная система функций, конформные отображения, уравнения Гельмгольца.*

SYSTEMS OF BIORTHOGONAL NONLINEAR COMBINATIONS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

By applying conforming mappings of simply connected domain onto the unit disk, the systems of biorthogonal functions are constructed that are the bases in the spaces of analytic functions.

Key words: *biorthogonal systems of functions, conformal mappings, the Helmholtz equation.*

Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано
01.11.19