https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.102-110

УДК 512.548

Г. В. Крайнічук ✉

ПРО ЗВІДНІСТЬ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ФУНКЦІЙНОЇ ДОВЖИНИ 6

Проаналізовано результати узагальнених квадратичних функційних рівнянь функційної довжини шість на множині бінарних квазігруп відносно означень скоротності, відомих у літературі. Різні поняття скоротності названо типу a, b, c. Доведено, що функційне рівняння узагальненої псевдомедіальності є нескоротним типу a та типу c, але скоротним типу b, а отже, звідним. Встановлено, що узагальнена псевдомедіальність рівносильна системі рівнянь від меншої кількості змінних. Знайдено звідне рівняння, яке парастрофно-первинно рівносильне до рівняння узагальненої медіальності. Тому узагальнена медіальність парастрофно звідна, хоча нескоротна за трьома типами. Уточнено класифікацію нескоротних типу b рівнянь довжини 6. Встановлено, що нескоротні типу b рівняння довжини 6 звідні. Доведено, що всі квадратичні рівняння функційної довжини 6 звідні.

***Ключові слова**: квазігрупа, функційне рівняння, тотожність, парастрофно-первинна рівносильність, медіальність, псевдомедіальність, звідність, скоротність.*

Вступ. Продовжено дослідження узагальнених квадратичних функційних рівнянь на бінарних квазігрупах, тобто на бінарних оборотних операціях, які визначені на довільній скінченній чи нескінченній множинах. Попередні результати можна знайти в працях [4–7, 9–11, 13–17, 20]. Під функційним рівнянням [12] розуміємо формулу, яка є рівністю двох термів, що містять лише предметні та функційні змінні, де всі предметні змінні пов'язані квантором загальності.

Обговорено проблему виділення квадратичних функційних рівнянь, що рівносильні системі рівнянь, кожне з яких має меншу кількість предметних змінних. Такі рівняння Ф. М. Сохацький [6] назвав звідними. Це означення неконструктивне. Конструктивні вводили для певних класів рівнянь по-різному. В. Д. Білоусов [3] квадратичне врівноважене функційне рівняння називав *скоротним (скоротність типу a)*, якщо в лівій та правій частинах існують підтерми, які складаються з однакових предметних змінних. У працях А. Крапєжа [16] і С. Крстіча [17] скоротність типу *a* називають звідністю (reducible).

У класі квадратичних функційних рівнянь поняття скоротності типу *a* не охоплює всіх звідних функційних рівнянь, наприклад, якщо існує один самодостатній підтерм (той, що має обидві появи всіх своїх предметних змінних), то таке рівняння звідне, але нескоротне типу *a*. Тому Ф. М. Сохацький [9] і Р. Ф. Коваль [4, 11] узагальнили поняття скоротності: рівняння названо *скоротним* (*скоротність типу b*), якщо воно містить нетривіальну самодостатню послідовність підтермів, тобто таку, що має всі появи в рівнянні всіх своїх предметних змінних.

Виявилося, що зручнішим і результативнішим є інше поняття скоротності [7]: квадратичне функційне рівняння називають *скоротним (скоротність типу c)*, якщо воно має неповний підтерм з обома появами деякої предметної змінної (терм називають повним, якщо він містить принаймні одну появу кожної предметної змінної).

Кожне із введених понять скоротності спричиняє звідність рівнянь і дає можливість отримати певні результати для бінарних квазігрупових узагальнених функційних рівнянь, проте постає питання залежності між різними типами скоротності та звідністю.

✉ kraynichuk@ukr.net

Дослідимо цю проблему на прикладі квадратичних функційних рівнянь від n різних предметних змінних. Зазначимо, що при $n=1$ квадратичних рівнянь немає. При $n=2$ довільне квадратичне рівняння незвідне, тому що квадратичних рівнянь від меншої кількості змінних не існує. При $n=3$ Ф. Сохацький [8, 9] описав нескоротні рівняння: рівняння є нескоротними тоді і тільки тоді, коли множини підтермів довжини два є двоелементними і попарно різними, а також множина підтермів довжини три є триелементною. Звідси випливає, що при $n=3$ рівняння нескоротні за всіма трьома типами.

При $n=4$ Ф. Сохацький [9] довів, що всі такі рівняння, крім узагальненої медіальності

$$F_1(F_2(x;y);F_3(u;v)) = F_4(F_5(x;u);F_6(y;v)) \tag{1}$$

та узагальненої псевдомедіальності

$$F_1(F_2(x;y);F_3(u;v)) = F_4(F_5(F_6(x;u);y);v) \tag{2}$$

є скоротними за типом b (а отже, і звідними), що підтвердила Р. Коваль [4], яка класифікувала всі квадратичні функційні рівняння при $n=4$ з точністю до парастрофно-первинної рівносильності. Цей же результат отримали в працях [14, 15] методом класифікації мультиграфів. Про узагальнені рівняння медіальності та псевдомедіальності сказано, що вони нескоротні за типом b. Проаналізуємо цей факт згідно з означенням скоротності типу c.

При $n=5$ у працях Р. Коваль [4, 11] класифіковано всі такі рівняння з точністю до парастрофно-первинної рівносильності і доведено, що за скоротністю типу b таких нескоротних рівнянь є чотири. Цей результат підтверджено в праці [15], але всі ці рівняння звідні [5].

При $n=6$ в [15] класифіковано всі такі рівняння за методом мультиграфів і встановлено, що за скоротністю типу b таких нескоротних рівнянь є 14, але всі вони, як показано в праці [5], звідні.

Нижче частково дано відповідь на питання залежності між поняттями за різними типами скоротності та звідності для бінарних квадратичних узагальнених квазігрупових функційних рівнянь функційної довжини 6 (довжиною рівняння називаємо кількість всіх функційних змінних у рівнянні, враховуючи їх повторення як різні функційні змінні [10]). Зокрема,

– доведено, що функційне рівняння узагальненої псевдомедіальності є нескоротним типу a та типу c, але скоротним типу b (твердження 1), а отже, є звідним (наслідок);

– встановлено, що узагальнена псевдомедіальність рівносильна системі рівнянь від меншої кількості змінних (твердження 2);

– знайдено звідне рівняння (твердження 4), яке парастрофно-первинно рівносильне до рівняння узагальненої медіальності (твердження 3), тому узагальнена медіальність парастрофно звідна (теорема 4), хоча нескоротна за трьома типами;

– уточнено класифікацію нескоротних типу b рівнянь довжини 6 (теорема 3);

– встановлено, що нескоротні типу b рівняння довжини 6 звідні (теорема 5);

– доведено, що всі квадратичні рівняння функційної довжини 6 звідні (теорема 6).

1. **Допоміжні означення та результати**. Бінарна квазігрупа – це впорядкована пара $(Q;f)$, де Q – множина, а f – операція, що визначена на цій множині, така, що кожне з рівнянь $f(a;y)=b$ та $f(x;a)=b$ однозначно розв'язне для будь-якої пари елементів $a,b \in Q$.

Інакше кажучи, алгебру $(Q;f,{}^l f,{}^r f)$ називають *бінарною квазігрупою* [1], якщо виконуються такі тотожності:

$$f({}^l f(x;y);y) = x, \qquad {}^l f(f(x;y);y) = x,$$

$$f(x;{}^{r}f(x;y))=y, \qquad {}^{r}f(x;f(x;y))=y,$$

де ${}^{l}f, {}^{r}f$ – ліве і праве ділення операції f. При цьому операцію f називають оборотною або квазігруповою.

Функцію ${}^{\sigma}f$ називають σ-парастрофом операції f, якщо вона визначена співвідношенням ${}^{\sigma}f(x_{1\sigma};x_{2\sigma})=x_{3\sigma} \leftrightarrow f(x_1;x_2)=x_3$ для будь-якого $\sigma \in S_3 := \{\iota, s, \ell, r, s\ell, sr\}$, де S_3 – симетрична група третього порядку та $s:=(12)$, $\ell:=(13)$, $r:=(23)$.

Під *функційним рівнянням* [12] розуміємо універсальну формулу рівності двох термів $v=\omega$, що складається з функційних та предметних змінних, яка не має ні предметних, ні функційних сталих (загальне означення див. [20]), при цьому носій вважаємо довільною множиною.

Величини F, F_i означають бінарні функційні змінні, які в цій статті набувають значень у множині бінарних квазігрупових операцій Δ довільно визначеного носія Q. Елементи множини Δ позначаємо малими буквами f, f_i. ${}^{\sigma}F$ – парастроф змінної F, який набуває значення парастрофа ${}^{\sigma}f$, якщо F набуває значення в множині Δ. Наприклад, якщо квазігрупа $(Q;f)$ є розв'язком функційного рівняння (1), то це означає, що в квазігрупі $(Q;f)$ виконується рівність:

$$f_1(f_2(x;y);f_3(u;v))=f_4(f_5(x;u);f_6(y;v))$$

для всіх x, y, u, $v \in Q$, тобто вона є тотожністю в квазігрупі $(Q;f)$.

Під *функційною довжиною* [10] рівняння розуміємо кількість всіх функційних змінних у рівнянні, враховуючи повторення всіх функційних змінних, як різні функційні змінні.

Оскільки всі функційні змінні набувають значення лише в множині квазігрупових операцій, то для всіх значень функційної змінної F і для всіх значень предметних змінних x, y виконуються рівності

$$\begin{aligned}
&{}^{\sigma}({}^{\tau}F)={}^{\sigma\tau}F; && {}^{s}F(x;y)=F(y;x);\\
&{}^{\ell}F(F(x;y);y)=x; && F({}^{\ell}F(x;y);y)=x;\\
&{}^{r}F(x;F(x;y))=y; && F(x;{}^{r}F(x;y))=y;\\
&{}^{s\ell}F(x;F(y;x))=y; && F({}^{s\ell}F(x;y);x)=y;\\
&{}^{sr}F(F(y;x);y)=x; && F(y;{}^{sr}F(x;y))=x,
\end{aligned} \tag{3}$$

які називають *первинними гіпертотожностями* [20]. Квазігрупові гіпертотожності досліджував Ю. Мовсісян [18].

Підтерм функційного рівняння називаємо:

- *тривіальним* [9, 20], якщо він є однією предметною змінною;
- *безповторним* [9], якщо жодна предметна змінна в ньому не повторюється;
- *повним* [7], якщо він містить всі предметні змінні рівняння, але, можливо, не всі їх появи (принаймні по одній появі кожної предметної змінної рівняння).
- *сусідом* [6] предметної змінної, якщо він знаходиться поряд зліва чи справа від цієї предметної змінної.

Функційне рівняння називають:

- *чистим* [20], якщо воно не має ні функційних, ні предметних сталих;
- *узагальненим* [2, 13], якщо всі функційні змінні у ньому різні;
- *квадратичним* [16], якщо кожна предметна змінна має точно дві появи;

- *врівноваженим* [19], якщо кожна предметна змінна має появу точно один раз у лівій і правій частинах рівняння;

- *бінарним*, якщо всі функційні змінні є бінарними операціями;

- *квазігруповим*, якщо передбачається, що кожна функційна змінна набуває значень у множині квазігрупових операцій довільного носія.

Два функційних рівняння $v = \omega$ та $v' = \omega'$ називають *парастрофно-первинно рівносильними* [20], якщо одне рівняння з іншого можна отримати за скінченну кількість таких кроків:

1) застосування квазігрупових гіпертотожностей (3);
2) перестановлення частин рівняння;
3) перейменування предметних змінних;
4) перейменування функційних змінних.

Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називають:

- *звідним* [9], якщо воно рівносильне системі рівнянь, кожне з яких має меншу кількість предметних змінних;

- *парастрофно звідним* [9], якщо воно парастрофно-первинно рівносильне звідному рівнянню;

- скоротним (скоротність типу b) [9], якщо воно має самодостатню послідовність підслів (послідовність підслів рівняння називають самодостатньою, якщо вона містить всі появи її предметних змінних у рівнянні);

- *парастрофно скоротним* [9], якщо воно парастрофно-первинно рівносильне скоротному рівнянню (зауважимо, що тут термін "скоротність" маємо на увазі за будь-яким типом).

Означення. [7] Квадратичне квазігрупове функційне рівняння називаємо *скоротним (скоротність типу с),* якщо воно має неповний підтерм, який містить обидві появи деякої предметної змінної.

З наслідку 6.1.2 [6, стор. 221] та теореми 6.2.3 [6, стор. 226] маємо справедливість формулювання такої теореми:

Теорема 1. *Будь-яке квадратичне скоротне узагальнене функційне рівняння є звідним. Будь-яке квадратичне парастрофно скоротне узагальнене функційне рівняння є парастрофно звідним.*

Функційні рівняння узагальненої медіальності та узагальненої псевдомедіальності парастрофно-первинно нерівносильні, тобто визначають різні блоки розбиття відносно парастрофно-первинних перетворень. Це випливає з такої теореми.

Теорема 2. [9] *Кожне парастрофно нескоротне типу b квадратичне узагальнене квазігрупове функційне рівняння функційної довжини 6 є парастрофно-первинно рівносильне або рівнянню (1), або рівнянню (2).*

2. **Основні результати** складаються з двох частин, в першій з яких показано скоротність типу b та звідність псевдомедіальності з відповідною рівносильною системою рівнянь, а в другій доведено парастрофну звідність медіальності з відповідною рівносильною системою рівнянь.

Як висновок уточнено теорему про класифікацію нескоротних типу b квадратичних узагальнених квазігрупових функційних рівнянь довжини 6 та встановлено звідність всіх квадратичних рівнянь довжини 6.

3. **Про рівняння псевдомедіальності**.

Твердження 1. *Узагальнене функційне рівняння псевдомедіальності (2) нескоротне типу а та нескоротне типу с, але скоротне типу b на квазігрупах.*

Доведення. Узагальнене функційне рівняння (2) має самодостатній набір підтермів, який складається з трьох підтермів $F_2(x;y)$, u та $F_5(F_6(x;u);y)$. Ця послідовність має обидві появи двох термів, зокрема x та y. А це означає, згідно з означенням скоротності типу b, що рівняння (2) є скоротним. Відповідно до означення скоротності типу *а* в лівій та правій частинах рівняння немає підтермів, що складаються з однакових предметних змінних, тому рівняння (2) нескоротне типу *а*. А за скоротністю типу *с* рівняння (2) не має неповного підтерма, тому воно нескоротне типу *с*.

■

Отже, функційне рівняння узагальненої псевдомедіальності (2) нескоротне за типами *a* і *c*, але скоротне за типом *b*, оскільки має самодостатній набір підтермів. Тому це рівняння звідне, що легко довести як наслідок з теореми 1.

Наслідок. *Узагальнене функційне рівняння псевдомедіальності (2) звідне.*

Доведення. Справді, згідно з твердженням 1, узагальнене рівняння (2) є скоротним типу *b*. Згідно з теоремою 1 воно звідне. ■

Наступне твердження описує явний вигляд звідності, тобто системи рівнянь, яка рівносильна узагальненому функційному рівнянню псевдомедіальності (2).

Твердження 2. *Узагальнене функційне рівняння псевдомедіальності (2) рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(x; F_3(u; v)) = F_4(\beta F_1(x; \alpha u); v), \\ \beta F_1(F_2(x; y); \alpha u) = F_5(F_6(x; u); y). \end{cases} \tag{4}$$

де α, β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Нехай маємо квазігрупу $(Q; f)$, яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(x; y); f_3(u; v)) = f_4(f_5(f_6(x; u); y); v). \tag{5}$$

Визначимо перетворення $\alpha u := f_3(u; a)$ та $\beta^{-1} x := f_4(x; a)$ для деякого $a \in Q$. При $v = a$ тотожність (5) має вигляд

$$f_1(f_2(x; y); \alpha u) = \beta^{-1} f_5(f_6(x; u); y).$$

Звідси, домноживши обидві частини на β, отримуємо:

$$\beta f_1(f_2(x; y); \alpha u) = f_5(f_6(x; u); y), \tag{6}$$

тобто другу рівність зі системи (4).

Підставимо у тотожність (5) замість терма $f_5(f_6(x; u); y)$ праву частину рівності (6), у результаті маємо:

$$f_1(f_2(x; y); f_3(u; v)) = f_4(\beta f_1(f_2(x; y); \alpha u); v). \tag{7}$$

В отриманій рівності замість x підставимо ${}^{\ell} f_2(x; y)$:

$$f_1(f_2({}^{\ell} f_2(x; y); y); f_3(u; v)) = f_4(\beta f_1(f_2({}^{\ell} f_2(x; y); y); \alpha u); v).$$

Тут скористаємося означенням (3), у результаті матимемо:

$$f_1(x; f_3(u; v)) = f_4(\beta f_1(x; \alpha u); v), \tag{8}$$

тобто першу рівність зі системи (4).

Отже, обидва рівняння системи (4) мають меншу кількість предметних змінних, а це означає, що рівняння (2) звідне.

Навпаки, нехай існує система (4). Зокрема, це означає, що виконується рівність (8). Підставимо у (8) замість x терм $f_2(x; y)$, в результаті матимемо (7). Оскільки виконується рівність (6), то підставимо в (7) замість терма $\beta f_1(f_2(x; y); \alpha u)$ терм $f_5(f_6(x; u); y)$. У результаті матимемо виконання тотожності (5), а це означає, що існує рівняння (2). ■

Враховуючи вище викладені результати, тобто про скоротність типу *b* та звідність тотожності псевдомедіальності, можна уточнити теорему 2.

Теорема 3. *Всі парастрофно нескоротні типу* b *квадратичні узагальнені квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 6 є парастрофно-первинно рівносильні рівнянню (1).*

Доведення випливає з доведення теореми 2 та твердження 2. ■

4. **Про рівняння медіальності**.

Твердження 3. *Функційне рівняння узагальненої медіальності (1) парастрофно-первинно рівносильне рівнянню*

$$F_1(F_2(F_3(x;y);u);v)) = F_4(F_5(F_6(x;v);u);y). \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо рівняння узагальненої медіальності (1). Згідно з парастрофними перетвореннями підставимо в (1) замість v терм $v\,{}^rF_6(y;v)$, у результаті матимемо рівність

$$F_1(F_2(x;y);F_3(u;{}^rF_6(y;v))) = F_4(F_5(x;u);F_6(y;{}^rF_6(y;v))),$$

в якій скористаємося (3) і отримаємо:

$$F_1(F_2(x;y);F_3(u;{}^rF_6(y;v))) = F_4(F_5(x;u);v).$$

В це рівняння підставимо терм ${}^rF_2(x;y)$ замість y:

$$F_1(F_2(x;{}^rF_2(x;y));F_3(u;{}^rF_6({}^rF_2(x;y);v))) = F_4(F_5(x;u);v))$$

Знову скористаємося (3) і отримаємо рівність

$$F_1(y;F_3(u;{}^rF_6({}^rF_2(x;y);v))) = F_4(F_5(x;u);v)).$$

Скориставшись зовнішнім діленням на терм y та заміною частин рівняння місцями, одержимо:

$$F_3(u;{}^rF_6({}^rF_2(x;y);v)) = {}^rF_1(y;F_4(F_5(x;u);v)).$$

В отриманій рівності перейдемо до комутування F_3 та ${}^rF_1$:

$${}^sF_3({}^rF_6({}^rF_2(x;y);v);u) = {}^{sr}F_1(F_4(F_5(x;u);v);y).$$

В останньому рівнянні перейменуємо функційні змінні відповідно ${}^sF_3$ на F_1, ${}^rF_6$ на F_2, ${}^rF_2$ на F_3, ${}^{sr}F_1$ на F_4, F_4 на F_5, F_5 на F_6 та предметні змінні v на u. У результаті отримаємо рівняння (9), яке парастрофно-первинно рівносильне (1). ■

Твердження 4. *Узагальнене функційне рівняння (9) рівносильне такій системі рівнянь:*

$$\begin{cases} F_1(\alpha F_3(x;y);v) = F_4(\beta F_6(x;v);y), \\ F_2(\alpha^{-1}F_4(\beta x;y);u) = F_4(F_5(x;u);y), \\ F_1(F_2(x;u);v) = F_2(\alpha^{-1}F_1(x;v);u). \end{cases} \tag{10}$$

де α,β *– довільні підстановки базової множини.*

Доведення. Розглянемо рівняння (9). Нехай маємо квазігрупу $(Q;f)$. яка задовольняє тотожність

$$f_1(f_2(f_3(x;y);u);v)) = f_4(f_5(f_6(x;v);u);y). \tag{11}$$

Визначимо перетворення $\alpha t := f_2(t;a)$ та $\beta z := f_5(x;a)$ для деякого $a \in Q$. При $u = a$ тотожність (11) має вигляд

$$f_1(\alpha f_3(x;y);v) = f_4(\beta f_6(x;v);y),$$

тобто першого рівняння зі системи (10). Із останньої рівності зовнішнім лівим діленням для операції f_1 маємо:

$$^{\ell}f_1(f_4(\beta f_6(x;v);y);v)=\alpha f_3(x;y).$$

Домножимо обидві частини цієї рівності на α^{-1} і отримаємо:

$$\alpha^{-1}\,{}^{\ell}f_1(f_4(\beta f_6(x;v);y);v)=f_3(x;y). \qquad (12)$$

Підставимо в (11) одержане значення для f_3:

$$f_1(f_2(\alpha^{-1}\,{}^{\ell}f_1(f_4(\beta f_6(x;v);y);v);u);v)=f_4(f_5(f_6(x;v);u);y). \qquad (13)$$

Скоротимо на $f_6(x;v)$, тобто замінимо на терм x:

$$f_1(f_2(\alpha^{-1}\,{}^{\ell}f_1(f_4(\beta x;y);v);u);v)=f_4(f_5(x;u);y). \qquad (14)$$

Скористаємося зовнішнім лівим діленням операції f_1:

$$^{\ell}f_1(f_4(f_5(x;u);y);v)=f_2(\alpha^{-1}\,{}^{\ell}f_1(f_4(\beta x;y);v);u). \qquad (15)$$

В останній рівності перейменуємо операцію $^{\ell}f_1$ на f_1:

$$f_1(f_4(f_5(x;u);y);v)=f_2(\alpha^{-1}f_1(f_4(\beta x;y);v);u). \qquad (16)$$

Рівняння (16) звідне. Справді, визначимо перетворення $\gamma t := f_1(t;a)$ для $\forall a\in Q$. Тоді при $v=a$ в (16) : $\gamma f_4(f_5(x;u);y)=f_2(\alpha^{-1}\gamma f_4(\beta x;y);u)$, в якому перейменуємо терм γf_4 на f_4, отримаємо $f_4(f_5(x;u);y)=f_2(\alpha^{-1}f_4(\beta x;y);u)$, тобто друге рівняння зі системи (10). З останньої рівності визначимо f_5, скориставшись заміною частин рівняння та лівим зовнішнім діленням для f_4:

$$f_5(x;u)={}^{\ell}f_4(f_2(\alpha^{-1}f_4(\beta x;y);u);y). \qquad (17)$$

Отримане f_5 із (17) підставимо в (16):

$$f_1(f_4({}^{\ell}f_4(f_2(\alpha^{-1}f_4(\beta x;y);u);y);y);v)=f_2(\alpha^{-1}f_1(f_4(\beta x;y);v);u) \qquad (18)$$

Перейменуємо однакові терми $f_4(\beta x;y)$ на x:

$$f_1(f_4({}^{\ell}f_4(f_2(\alpha^{-1}x;u);y);y);v)=f_2(\alpha^{-1}f_1(x;v);u). \qquad (19)$$

Згідно з первинними гіпертотожностями (3) $f_4({}^{\ell}f_4(t;y);y)=t$, тому рівність (19) матиме вигляд

$$f_1(f_2(\alpha^{-1}x;u);v)=f_2(\alpha^{-1}f_1(x;v);u), \qquad (20)$$

тобто отримали третє рівняння зі системи (10). Отже, довели, що рівняння (16) звідне і розпадається на друге і третє рівняння зі системи (10).

Отже, всі три рівняння зі системи (10) мають меншу кількість змінних, а це означає, що рівняння (9) звідне.

Навпаки, нехай існує система (10). Зокрема, це означає, що виконується рівність (20) на множині квазігрупових операцій $(Q;f)$. Скористаємося $f_4({}^{\ell}f_4(t;y);y)=t$ і підставимо у (20) замість терма $f_2(\alpha^{-1}x;u)$ терм $f_4({}^{\ell}f_4(f_2(\alpha^{-1}x;u);y);y)$, у результаті матимемо (19). В рівності (19) перейменуємо терм x на терм $f_4(\beta x;y)$, отримаємо (18). Оскільки існує рівність (17), то підставимо у (18) замість терма ${}^{\ell}f_4(f_2(\alpha^{-1}f_4(\beta x;y);u);y)$ терм $f_5(x;u)$, в результаті матимемо (16). В рівнянні (16) перейменуємо f_1 на ${}^{\ell}f_1$, отримаємо (15). З рівності (15) за зовнішнім лівим діленням операції f_1 отримуємо рівність (14), в якій замінимо терм x на терм $f_6(x;v)$, в результаті маємо (13). Оскільки існує рівність (12), то (13) матиме вигляд (11). Це означає, що тотожність (11) виконується, тому існує рівняння (9). ■

Теорема 4. *Функційне рівняння медіальності (1) нескоротне за трьома типами скоротності, але парастрофно звідне.*

Доведення. Розглянемо рівняння узагальненої медіальності (1).

Згідно з означенням скоротності типу *a*, рівняння (1) нескоротне. Справді, воно не містить терма з однаковими появами предметних змінних ні в лівій, ні в правій частинах.

Згідно з означенням скоротності типу *b*, рівняння (1) нескоротне. Дійсно, воно не має самодостатньої послідовності підтермів.

За означенням скоротності типу *c*, рівняння (1) нескоротне, тому що не містить неповного підтерма.

Отже, рівняння (1) нескоротне за трьома типами.

Рівняння (9) звідне. Справді, згідно з твердженням 4, воно рівносильне системі рівнянь (10). Як показано в твердженні 3, рівняння (1) і (9) парастрофно-первинно рівносильні. А це означає, що рівняння (1) є парастрофно звідним. ■

Висновки. З теореми 4 випливає, що поняття «скоротності» та «звідності» є різними, до того ж існують такі теореми.

Теорема 5. *Парастрофно нескоротні типу b узагальнені квадратичні квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 6 звідні.*

Доведення випливає з теореми 3 про класифікацію парастрофно нескоротних типу *b* узагальнених квадратичних квазігрупових функційних рівнянь довжини 6, твердження 2 про звідність псевдомедіальності та теореми 4 про парастрофну звідність функційного рівняння (1). ■

Теорема 6. *Всі квадратичні узагальнені квазігрупові функційні рівняння функційної довжини 6 парастрофно звідні.*

Доведення випливає з результату Р. Юрій [11] про класифікацію всіх узагальнених квадратичних квазігрупових функційних рівнянь довжини 6 та теореми 5. ■

1. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. – Москва: Наука, 1967. – 224 с.
2. *Белоусов В. Д.* Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами // Успехи мат. наук. – 1965. – 20, № 1(121). – С. 75–146.
3. *Белоусов В. Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах // Матем. сб. – 1966. – 70(112), № 1. – С. 55–97.
4. *Коваль Р. Ф.* Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 5. – С. 111–127.
5. *Крайнічук (Шелепало) Г., Акопян А., Андреєва Ю.* Про звідність нескоротних узагальнених квадратичних функційних рівнянь // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2018. – № 1-2. – С. 33–48.
6. *Сохацький Ф. М.* Асоціати та розклади багатомісних операцій: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук:. – Київ, 2006. – 334 с.
7. *Сохацький Ф. М., Крайнічук Г. В.,* Квадратичні функційні рівняння на квазігрупах // Тези доп. X Міжнар. алгебр. конф. в Україні, присв. 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015р.)– Одеса, 2015. – С. 107.
   Те саме: *Sokhatsky F.M., Krainichuk H.V.,* Quadratic functional equations on quasigroups. // Тези доп. X Міжн. алгебр. конф. в Укр. присв. 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.). – Одеса, 2015. – С. 107.
8. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 10. – С. 1387–1398.
9. *Сохацький Ф. М.* Про класифікацію функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, № 9. – С. 1259–1266.

10. *Шелепало Г. В.* Класифікація квазігрупових функційних рівнянь і тотожностей мінімальної довжини: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: – Хмельницький: Хмельницк. нац. ун-т МОН України, ДВНЗ Прикарп. нац. ун-т ім. Василя Стефаника, 2019. – 192 с.
11. *Юрій Р. Ф.* Класифікація функційних рівнянь малої довжини на квазігрупових операціях: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук:– Вінниця: Вінницький держ. пед. ун-т ім. Михайла Коцюбинського, 2006. – 134 с.
12. Aczél *J.* Lectures on functional equations and their applications // Mathematics in Science and Engineering. – New York and London: Academic Press, 1966. Vol. 19. – 510 p.
13. *Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M.* Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1960. – 11, Iss. 1-2. – P. 127–136, https://doi.org/10.1007/BF02020630
14. *Krapež A., Živković D.* Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publ. Inst. Math. (Beograd), N. S. – 2010. – 87(101). – P. 39–58, https://doi.org/10.2298/PIM1001039K
15. *Krapež A., Simić S. K., Tošić D. V.* Parastrophically uncancellable quasigroup equations. – Aequat. Math. – 2010. – 79, No. 3. – P. 261–280, https://doi.org/10.1007/s00010-010-0016-3
16. *Krapež A.* Srtrictly quadratic functional equations on quasigroups I // Publ. Inst. Math. (Beograd), NS. – 1981 – 29 (43) – P. 125–138.
17. *Krstic S.* Quadratic quasigroup identities [in Serbian]// PhD thesis, University of Belgrade, 1985. – 102p.
18. *Movsisyan Yu. M.* Hyperidentities and related concepts // Armenian J. Math. – 2017. – 9, No. 2. – P. 146–222.
19. *Sade A.* Entropie demosienne de multigroupoides et des quasigroupes // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. I. – 1959. – 73, No. 3. – P. 302–309. (in French)
20. *Sokhatsky F. M.* Parastrophic symmetry in quasigroup theory // Visn. Donetsk. Nats. Univ., Ser. A: Prypodn. Nauky. – 2016. – No. 1-2. – P. 70–83.

ON THE REDUCIBILITY OF FUNCTIONAL EQUATIONS OF FUNCTIONAL LENGTH 6

The article analyzes the results of generalized quadratic functional equations of functional length six on a set of binary quasigroups with respect to definitions of cancellability known in the literature. Different definitions of cancellability are called cancellability of type a, b, c. It is proved that the functional equation of generalized pseudomediality is uncancellable of type a and type c, but cancellable of type b, and therefore reducible. It is established that the generalized pseudomediality is equivalent to the system of equations from a smaller number of variables. It is found a reducible equation which is parastrophically primary equivalent to the equation of generalized mediality. Therefore, the generalized mediality is parastrophically reducible, although it is uncancellable in three types. The classification of uncancellable type b equations of length 6 has been clarified. It is established that uncancellable type b equations of length 6 are reducible. It is proved that all quadratic equations of functional length 6 are reducible.

Key words: quasigroup, functional equation, identity, parastrophic primary equivalence, mediality, pseudomediality, reducibility, cancellability.

Донецький нац. ун-т
ім. Василя Стуса, Вінниця

Одержано
08.12.20