https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.111-120

УДК 517.95

С. М. Репетило[1,2]✉, М. М. Симотюк[1,2]

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ, ОДНОРІДНИХ ЗА ПОРЯДКОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

В області, що є декартовим добутком відрізка на коло одиничного радіуса, встановлено однозначну розв'язність задачі з умовами типу Діріхле–Неймана за виділеною змінною t та умовами періодичності за іншою змінною x для лінійних гіперболічних систем рівнян, однорідних за порядком диференціювання. Доведено, що умови коректної розв'язності задачі у просторах Соболєва виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега та Гаусдорфа) чисел, які є значеннями правого кінця часового проміжку.

***Ключові слова**: крайова задача, умови Діріхле–Неймана, система рівнянь з частинними похідними, малі знаменники, метричний підхід.*

Вступ. Крайові задачі типу Діріхле–Неймана для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними вивчали багато авторів (див. наприклад, [4, 6–13, 17] та бібліографію в них), оскільки інтерес до їх вивчення зумовлений як потребою побудови загальної теорії крайових задач, так і тим, що такі задачі є моделями багатьох фізичних процесів. Зокрема, у працях [2, 3, 8, 11, 13] вивчено задачі типу Діріхле–Неймана для рівнянь із частинними похідними на торі. Дослідження розв’язності цих задач пов’язане з проблемою малих знаменників, для оцінок знизу яких використано метричний підхід [1, 8] та результати метричної теорії чисел. Зауважимо, що умови коректної розв’язності задач типу Діріхле–Неймана встановлені в обмежених областях лише для таких класів систем рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку. Це пов’язано зі складною структурою малих знаменників, які виникають під час побудови розв’язків. У праці [6] застосовано апарат алгебри псевдодиференціальних операторів для побудови у необмеженій області розв’язку задачі типу Діріхле–Неймана для гіперболічних рівнянь довільного порядку.

Ця праця продовжує дослідження, розпочаті раніше у [12–15]. У ній встановлено умови розв’язності задачі типу Діріхле–Неймана за змінною t у класах періодичних за x вектор-функцій для гіперболічних систем рівнянь, однорідних за порядком диференціювання. Доведено, що такі умови виконуються для систем загального типу і для майже всіх (стосовно міри Лебега та Гаусдорфа) чисел T, які є значеннями другого вузла інтерполяції задачі. Уперше для систем високих порядку та розміру, які містять похідні за змінною t довільного (а не тільки парного) порядку запропоновано метод оцінювання малих знаменників, які виникли під час побудови розв’язку задачі.

1. **Основні позначення**. Використовуватимемо такі позначення: Ω – коло одиничного радіуса $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $Q_T=(0,T)\times\Omega$, $\operatorname{mes}_n M$ – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $M\subset\mathbb{R}^n$; C_n^m, $1\le m\le n$, – кількість комбінацій з n елементів по m; $C(n,m)$ – множина всіх наборів $\omega=(i_1,\dots,i_m)$, складених з m натуральних чисел $i_1,\dots,i_m$ таких, що $1\le i_1<\ldots<i_m\le n$; кількість усіх наборів, які належать до множини $C(n,m)$, дорівнює C_n^m; для набору $\omega=(i_1,\dots,i_m)\in C(n,m)$ символом $\operatorname{set}\omega$ позначатимемо множину $\{i_1,\dots,i_m\}$;

✉ repetylosofiya@gmail.com

H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий поповненням простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ikx)$ за нормою

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| := \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha}};$$

$C^n([0,T]; H_\alpha)$ – простір таких функцій $u(t,x)$, що за фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x) / \partial t^j$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^n([0,T]; H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; H_\alpha)\| := \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; H_\alpha \right\|;$$

$\overline{H}_\alpha^m$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ – простір таких вектор-функцій $\vec{\varphi} = \mathrm{col}(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, що $\varphi^j \in W_{\alpha,\beta}$, $j = 1, \ldots, m$, з нормою

$$\|\vec{\varphi}(x); \overline{H}_\alpha^m\| = \max_{1\leq j\leq m} \|\varphi^j(x); H_\alpha\|;$$

$C^n([0,T]; \overline{H}_\alpha^m)$ – простір таких вектор-функцій $\vec{u} = \mathrm{col}(u^1, \ldots, u^m)$, що $u^j(t,x) \in C^n([0,T]; H_\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, з нормою

$$\|\vec{u}(t,x); C^n([0,T]; \overline{H}_\alpha^m)\| = \max_{1\leq j\leq m} \|u^j(t,x); C^n([0,T]; H_\alpha)\|.$$

2. **Формулювання задачі**. Розглядаємо таку задачу типу Діріхле–Неймана для лінійної системи гіперболічних рівнянь, однорідних за порядком диференціювання:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{u}(t,x) \equiv \sum_{j=0}^{2n} A_j \frac{\partial^{2n} \vec{u}(t,x)}{\partial t^j \partial x^{2n-j}} = \vec{0}, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2j-2} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \vec{\varphi}_j(x), j = 1, \ldots, n, \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^{2j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \vec{\varphi}_{n+j}(x), j = 1, \ldots, n, \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

де $A_j = \|a_{q,r}^j\|_{q,r=1}^m$, $j = 0,1,\ldots,n$, – квадратні матриці порядку m, елементи $a_{q,r}^j$, $q, r = 1, \ldots, m$, $j = 0,1,\ldots,n$, яких є комплексними числами, A_n – одинична матриця, $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x))$, $\vec{0} = \mathrm{col}\,(\underbrace{0,\ldots,0}_{m})$, $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}(\varphi_j^1(x), \ldots, \varphi_j^m(x))$, $j = 1, \ldots, 2n$. Надалі припускатимемо, що корені $\mu_1, \ldots, \mu_{2mn}$ характеристичного рівняння

$$\det\|L(\mu, i)\| = 0. \tag{3}$$

Зауваження. До задачі (1), (2) можна звести задачу з умовами типу Діріхле–Неймана для рівняння з комплексними коефіцієнтами, однорідного за порядком диференціювання. Дійсно, нехай

$$v(t,x) = v_1(t,x) + iv_2(t,x), \ v_1(t,x) = \mathrm{Re}\, v(t,x), \ v_2(t,x) = \mathrm{Im}\, v(t,x) \ –$$

розв'язок задачі

$$\frac{\partial^{2n}v(t,x)}{\partial t^{2n}}+\sum_{j=1}^{2n}a_j\frac{\partial^{2n}v(t,x)}{\partial t^{2n-j}\partial x^j}=0,\quad (t,x)\in Q_T, \tag{4}$$

$$v_t^{(2j-2)}(0,x)=\psi_j(x),\quad v_t^{(2j-1)}(T,x)=\psi_{n+j}(x), j=1,\dots,n,\quad x\in\Omega, \tag{5}$$

де $a_j=\mathrm{Re}\,a_j+i\,\mathrm{Im}\,a_j\equiv\alpha_j+i\beta_j$, $\psi_j(x)=\mathrm{Re}\,\psi_j(x)+i\,\mathrm{Im}\,\psi_j(x)\equiv\xi_j(x)+i\eta_j(x)$, $j=1,\dots,2n$, причому хоча б для одного $j_0, 1\le j_0\le 2n, \beta_{j_0}\ne 0$. Легко перевірити, що вектор-функція $\vec v(t,x)=\mathrm{col}(v_1(t,x),v_2(t,x))$ є дійсним розв'язком такої задачі типу Діріхле–Неймана для системи з дійсними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial^{2n}\vec v}{\partial t^{2n}}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\beta_1\\ \beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix}\frac{\partial^{2n}\vec v}{\partial t^{2n-1}\partial x}+\ldots+\begin{pmatrix}\alpha_{2n} & -\beta_{2n}\\ \beta_{2n} & \alpha_{2n}\end{pmatrix}\frac{\partial^{2n}\vec v}{\partial x^{2n}}=\vec 0, \tag{6}$$

$$\vec v_t^{(2j-2)}(0,x)=\vec\varphi_j(x),\quad \vec v_t^{(2j-1)}(T,x)=\vec\varphi_{n+j}(x), j=1,\dots,n,\quad x\in\Omega, \tag{7}$$

де $\vec\varphi_j(x)=\mathrm{col}(\xi_j(x),\eta_j(x))$, $j=1,\dots,2n$. Навпаки, якщо вектор-функція $\vec v(t,x)=\mathrm{col}(v_1(t,x),v_2(t,x))$ – дійсний розв'язок задачі (6), (7), то функція $v(t,x)=v_1(t,x)+iv_2(t,x)$ є розв'язком задачі (4), (5), в якій $a_j=\alpha_j+i\beta_j$, $\psi_j(x)=\xi_j(x)+i\eta_j(x)$, $j=1,\dots,2n$.

3. **Єдиність розв'язку задачі**. Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$ шукаємо у вигляді векторного ряду Фур'є:

$$\vec u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\vec u_k(t)\exp(ikx). \tag{8}$$

Кожна вектор-функція $\vec u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, є розв'язком такої двоточкової задачі для лінійної системи:

$$L\left(\frac{d}{dt},ik\right)\vec u_k(t)\equiv\sum_{j=0}^{2n}A_j(ik)^{2n-j}\frac{d^j\vec u_k(t)}{dt^j}=\vec 0, \tag{9}$$

$$\vec u_k^{(2j-2)}(0)=\vec\varphi_{j,k},\quad \vec u_k^{(2j-1)}(T)=\vec\varphi_{n+j,k},\quad j=1,\dots,n, \tag{10}$$

де $\vec u_k(t)=\mathrm{col}(u_k^1(t),\dots,u_k^m(t))$, $\vec\varphi_{j,k}=\mathrm{col}(\varphi_{jk}^1,\dots,\varphi_{jk}^m)$, $k\in\mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec u(t,x)$ та $\vec\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,2n$, відповідно.

Якщо $k=0$, то система (9) розпадається на m незалежних рівнянь. Тоді задача (9), (10) має єдиний розв'язок $\vec u_0(t)=\mathrm{col}(u_0^1(t),\dots,u_0^m(t))$, компоненти $u_0^r(t)$, $r=1,\dots,m$, якого є многочленами $(2n-1)$-го степеня; коефіцієнти цих многочленів однозначно визначають з умов

$$\left(u_0^r\right)^{(2j-2)}(0)=\varphi_{j,0}^m,\quad \left(u_0^r\right)^{(2j-1)}(T)=\varphi_{n+j,0}^m,\quad j=1,\dots,n,\quad r=1,\dots,m,$$

які випливають з умов (10) при $k=0$. Якщо $k\ne 0$, то розв'язок задачі (9), (10) зображає формула [8]

$$\vec u_k(t)=\sum_{q=1}^{2mn}C_{k,q}\exp(\mu_q kt)\vec h_q, \tag{11}$$

де $\vec h_q=\mathrm{col}(h_q^1,\dots,h_q^m)$ – деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\mu_q,i)$, приєднаної до матриці $L(\mu_q,i)$, $q=1,\dots,2mn$. Зауважимо, що оскільки корінь μ_q є простим, то, як відомо, матриця $L^*(\mu_q, i)$ має ненульовий стовпець. Сталі $C_{k,q}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q = 1,\ldots,2mn$, у рівності (11) знаходимо зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{2mn} C_{k,q}(\mu_q k)^{2j-2} h_q^s = \varphi_{j,k}^s, \quad s = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n, \\ \sum\limits_{q=1}^{2mn} C_{k,q}(\mu_q k)^{2j-1} \exp(\mu_q kT) h_q^s = \varphi_{n+j,k}^s, \quad s = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{12}$$

Нехай $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – визначник системи (12), тобто

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} h_1^1 & \ldots & h_{2mn}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^m & \ldots & h_{2mn}^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{2n-2} h_1^1 & \ldots & (\mu_{2mn} k)^{2n-2} h_{2mn}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{2n-2} h_1^m & \ldots & (\mu_{2mn} k)^{2n-2} h_{2mn}^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^1 \mu_1 k \exp(\mu_1 kT) & \ldots & h_{2mn}^1 \mu_{2mn} k \exp(\mu_{2mn} kT) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^m \mu_1 k \exp(\mu_1 kT) & \ldots & h_{2mn}^m \mu_{2mn} k \exp(\mu_{2mn} kT) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{2n-1} h_1^1 \exp(\mu_1 kT) & \ldots & (\mu_{2mn} k)^{2n-1} h_{2mn}^1 \exp(\mu_{2mn} kT) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mu_1 k)^{2n-1} h_1^m \exp(\mu_1 kT) & \ldots & (\mu_{2mn} k)^{2n-1} h_{2mn}^m \exp(\mu_{2mn} kT) \end{vmatrix} \tag{13}$$

Для дослідження єдиності розв'язку задачі (1), (2) використовуватимемо однорідні умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2j-2} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} = \vec{0}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial^{2j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} = \vec{0}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

які відповідають умовам (2).

Теорема 1. *Якщо корені* $\mu_1,\ldots,\mu_{2mn}$ *рівняння (3) є простими, то для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі* $C^{2n}([0,T]; \overline{H}_\alpha^m)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{15}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо $\Delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то при $k = k^0$ система (12) з нульовими правими частинами ($\varphi^s_{j,k^0} = 0$, $s = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,2n$) має нетривіальний розв'язок $C^*_{k^0,q}$, $q = 1,\ldots,2mn$. Тоді вектор-функція $\vec{v}(t,x) = \sum_{q=1}^{2mn} C^*_{k^0,q} \exp(\mu_q k^0 t)\vec{h}_q \exp(ik^0 x)$ належить до простору $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$ і є ненульовим розв'язком однорідної задачі (1), (14). Тому розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (1), (2) має два різні розв'язки $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$. Тоді функція $\vec{v}(t,x) = \vec{u}_1(t,x) - \vec{u}_2(t,x)$ є нетривіальним розв'язком системи (1) і справджує однорідні умови (10). Для коефіцієнтів Фур'є $\vec{v}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, вектор-функції $\vec{v}(t,x)$ справедливі зображення (11), в яких сталі $C_{k,q}$, $q = 1,\ldots,2mn$, є розв'язками однорідної системи лінійних рівнянь з ненульовим, згідно з умовою теореми, визначником $\Delta(k)$. Тому $C_{k,q} = 0$, $q = 1,\ldots,2mn$, а отже, $\vec{v}_k(t) \equiv \vec{0}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Враховуючи, що $\vec{v}_0(t) \equiv \vec{0}$, бо компонентами вектора $\vec{v}_0(t)$ є многочлени $(2n-1)$-го степеня, які перетворюються в нуль разом з відповідними похідними в двох точках $0, T$, звідси отримуємо, що $\vec{v}(t,x) \equiv \vec{0}$ всупереч припущенню.

Встановимо достатні умови нетривіальної розв'язності однорідної задачі (1), (14).

Теорема 2. *Нехай корені $\mu_1,\ldots,\mu_{2mn}$ рівняння (3) є простими і нехай*

$$\{\mu_r T : r = 1,\ldots,2mn\} \subset i2\pi\mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Тоді однорідна задача (1), (14) має в просторі $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$ зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.

Доведення. Нехай $\mu_r T = i2\pi l_r / k_r$, $l_r \in \mathbb{Z}$, $k_r \in \mathbb{N}$, $r = 1,\ldots,2mn$. Позначимо через K найменше спільне кратне чисел $k_1,\ldots,k_{2mn}$. Тоді $\exp(\mu_r zKT) = 1$, $r = 1,\ldots,2mn$, для довільного $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тому кожен із визначників $\Delta(zK)$, $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, має однакові рядки $(h^s_1,\ldots,h^s_{2mn})$ і

$$(h^s_1 \exp(\mu_1 zKT),\ldots,h^s_{2mn}\exp(\mu_{2mn} zKT)), s = 1,\ldots,m,$$

а отже, дорівнює нулю. Звідси, як і під час доведення необхідності в теоремі 1, випливає, що однорідна задача (1), (14) має зліченну кількість розв'язків вигляду

$$\vec{v}_{zK}(t,x) = \sum_{q=1}^{2mn} C_{zK,q} \exp(\mu_q zKt)\vec{h}_q \exp(izKx), \quad z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{16}$$

де для кожного $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ сталі $C_{zK,q}$, $q = 1,\ldots,mn$, не можуть одночасно дорівнювати нулю. Доведемо, що отримані розв'язки (16) є лінійно незалежними в просторі $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$. Припустимо, всупереч цьому, що для деякого $N \in \mathbb{N}$ існують такі ненульові цілі $z_1,\ldots,z_N$ та $\lambda_1,\ldots,\lambda_N \in \mathbb{R}$, які одночасно не дорівнюють нулю, що

$$\lambda_1 \vec{v}_{z_1K}(t,x) + \ldots + \lambda_N \vec{v}_{z_NK}(t,x) = \vec{0}.$$

Згідно з означенням норми в $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\alpha)$ звідси випливає, що для довільного r, $r = 1,\ldots,N$, вектор-функція

$$\vec{w}_{z_rK}(t) \equiv \sum_{q=1}^{2mn} \lambda_r C_{z_rK,q} \exp(\mu_q z_r K t)\vec{h}_q$$

є розв'язком системи (9) при $k = z_r K$ і справджує нульові умови Коші: $\vec{w}^{(j-1)}_{z_rK}(0) = \vec{0}$, $j = 1,\ldots,2n$. За теоремою про єдиність розв'язку задачі Коші $\vec{w}_{z_rK}(t) \equiv \vec{0}$, а отже, $\lambda_r C_{z_rK,q} = 0$ для всіх q, $q = 1,\ldots,2mn$. Оскільки серед сталих $C_{z_rK,q}$, $q = 1,\ldots,2mn$, хоча б одна відмінна від нуля, то $\lambda_r = 0$. Через довільність r отримуємо, що $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N = 0$, тобто лінійну незалежність вектор-функцій (18).

4. **Існування розв'язку задачі**. Надалі вважатимемо, що справджуються умови (15). Тоді з формул (8), (11), (12) для розв'язку задачі (1), (2) одержимо формальне зображення у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \vec{u}_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \sum_{j,q=1}^{2mn} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \exp(\mu_q k t)\vec{h}_q \psi_{j,k}, \tag{17}$$

де $\mathrm{col}(\psi_{1,k},\ldots,\psi_{2mn,k}) = \mathrm{col}(\varphi^1_{1,k},\ldots,\varphi^m_{1,k};\ldots,\varphi^1_{2n,k},\ldots,\varphi^m_{2n,k})$, $k \neq 0$, $\Delta_{j,q}(k)$, $j,q = 1,\ldots,2mn$, $k \neq 0$, – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначника $\Delta(k)$, а вектор-функція $\vec{u}_0(t)$ є розв'язком задачі (9), (10) при $k = 0$.

Збіжність ряду (17), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел k.

Встановимо умови розв'язності задачі (1), (2). Позначимо:

$$\zeta_j = \begin{cases} mn(2n-1) - 2j + 2, & \text{ÿêù î} \quad j = 1,\ldots,n, \\ mn(2n-1) - 2j + 2n + 1, & \text{якù î} \quad j = n+1,\ldots,2n. \end{cases} \tag{18}$$

Теорема 3. *Нехай корені $\mu_1,\ldots,\mu_{mn}$ рівняння (3) є простими, виконується умова (15) та існує така дійсна стала α, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k справджуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq (1+|k|)^{-\alpha}. \tag{19}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j \in \overline{H}^m_{\xi+\alpha+2n+\zeta_j}$, $j = 1,\ldots,2n$, то в просторі $C^{2n}([0,T];\overline{H}^m_\xi)$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який зображує ряд (17) і неперервно залежить від вектор-функцій $\vec{\varphi}_j(x)$, $j = 1,\ldots,2n$.

Доведення. Згідно з вибором сталих ζ_j, $j = 1,\ldots,2mn$, з умов теореми випливає, що для коефіцієнтів ряду (17) виконуються оцінки

$$\|\vec{u}_k(t)\|_{C^n[0,T]} \leq C_1 \sum_{j=1}^{2n} \|\vec{\varphi}_{j,k}\| \cdot |k|^{\alpha+2n+\zeta_j}. \tag{20}$$

Тоді з нерівностей (20) отримуємо, що

$$\left\| \vec{u}(t,x); C^n([0,T];\overline{H}^m_\xi) \right\| \leq C_2 \sum_{j=1}^{2n} \left\| \vec{\varphi}_j; \overline{H}^m_{\xi+\alpha+2n+\zeta_j} \right\|. \tag{21}$$

З оцінок (21) дістаємо твердження теореми.

5. **Метричні оцінки знизу малих знаменників**. З'ясуємо питання про виконання нерівностей (19).

Запровадимо необхідні позначення. Нехай

$$\vec{V}_j = \mathrm{col}(\vec{h}_j, \mu_j^2\vec{h}_j, \ldots, \mu_j^{2n-2}\vec{h}_j), \quad \vec{W}_j = \mathrm{col}(\mu_j\vec{h}_j, \mu_j^3\vec{h}_j, \ldots, \mu_j^{2n-1}\vec{h}_j), \quad 1 = 1, \ldots, 2mn.$$

Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_{mn}) \in C(2mn, mn)$ покладемо:

$$M_\omega = \mu_{i_1} + \ldots + \mu_{i_{mn}}, \quad V_\omega = \det\left\|\vec{V}_{i_1}, \ldots, \vec{V}_{i_{mn}}\right\|, \quad W_\omega = \det\left\|\vec{W}_{i_1}, \ldots, \vec{W}_{i_{mn}}\right\|.$$

Означення. *Систему (1) назвемо системою загального типу, якщо виконується умова*

$$\forall \omega, \sigma \in C(2mn, mn), \omega \neq \sigma: \quad M_\omega \neq M_\sigma. \tag{22}$$

Позначимо:

$$\vec{Y} \equiv \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_\nu) \equiv \mathrm{col}(a_{q,r}^j; q, r = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, 2n-1) \;-$$

вектор розміру $\nu = 2m^2n$, складений з коефіцієнтів системи (1). У праці [15] за допомогою методів метричної теорії чисел [1, 8] та теорії симетричних многочленів (див. [16]) доведено, що множина тих векторів $\vec{Y} \in \mathbb{R}^\nu$, які задають системи (1) не загального типу, є множиною нульової міри Лебега в $\mathbb{R}^\nu$.

Для систем (1) загального типу справджуються такі твердження.

Лема 1. *Якщо система* (1) *є системою загального типу, то знайдуться такі неперетинні набори* $\omega_1 \in C(2mn, mn)$, $\omega_2 \in C(2mn, mn)$, *що* $\mathrm{set}\,\omega_1 \cap \mathrm{set}\,\omega_2 = \varnothing$, $\mathrm{set}\,\omega_1 \cup \mathrm{set}\,\omega_2 = \{1, \ldots, 2mn\}$, *для яких виконується нерівність*

$$V_{\omega_1} W_{\omega_2} \neq 0. \tag{23}$$

Доведення. Нехай $\vec{H}_j = \mathrm{col}(\vec{h}_j, \mu_j\vec{h}_j, \mu_j^2\vec{h}_j, \ldots, \mu_j^{2n-2}\vec{h}_j, \mu_j^{2n-1}\vec{h}_j)$, $1 = 1, \ldots, 2mn$. Оскільки корені рівняння (3) є простими, то вектори $\vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_{2mn}$ є лінійно незалежними і визначник $H = \det\left\|\vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_{mn}\right\|$ є відмінним від нуля. Розкриваючи визначник H за правилом Лапласа за мінорами непарних рядків, дістанемо, що

$$H = \sum_{\omega \in C(2mn, mn)} \pm V_\omega W_{\sigma(\omega)}, \tag{24}$$

де $\sigma(\omega) \in C(2mn, mn)$ – набір, що однозначно визначається за набором $\omega \in C(2mn, mn)$ умовою $\mathrm{set}\,\sigma(\omega) \cap \mathrm{set}\,\omega = \varnothing$. Тоді з формули (29) випливає, що виконується нерівність

$$\sum_{\omega \in C(2mn, mn)} |\, V_\omega \cdot W_{\sigma(\omega)} \,| > 0, \tag{25}$$

ліва частина якої містить C_{2mn}^{mn} доданків, а отже, хоча б один з них є відмінним від нуля. Нехай цей доданок відповідає набору $\omega_1 \in C(2mn, mn)$, таким чином, $|\, V_{\omega_1} | \cdot |\, W_{\sigma(\omega_1)} | \neq 0$. Лему доведено.

Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_{mn}) \in C(2mn, mn)$ покладемо:

$$P_\omega(\mu, k) = \prod_{\substack{\sigma \in C(2mn, mn), \\ \sigma \neq \omega}} \left(\mu - M_\sigma k\right), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{26}$$

Зауважимо, що степінь многочлена $P_\omega(\mu,k)$, $\omega\in C(2mn,mn)$, за змінною μ дорівнює $d=C_{2mn}^{mn}-1$.

Лема 2. *Якщо система (1) є системою загального типу, то для довільного набору* $\omega\in C(2mn,mn)$ *виконується нерівність*

$$|P_\omega(M_\omega k,k)|\geq C_3(1+|k|)^d,\quad C_3>0,\quad d=C_{2mn}^{mn}-1,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (27)$$

Доведення леми є очевидним, бо з формули (32) випливає, що для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ справджується рівність

$$|P_\omega(M_\omega(k),k)|=\prod_{\substack{\sigma\in C(2mn,mn),\\ \sigma\neq\omega}}\left|M_\omega k-M_\sigma k\right|=C_4\,|k|^d, \qquad (28)$$

де $C_4=\prod_{\substack{\sigma\in C(2mn,mn),\\ \sigma\neq\omega}}|M_\omega-M_\sigma|$. Оскільки система (1) є системою загального типу, то $C_4>0$. Лему доведено.

Теорема 4. *Нехай система (1) є системою загального типу. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T>0$ *нерівність (19) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{Z}$ *при* $\alpha>d-mn(2n-1)$*, де* $d=C_{2mn}^{mn}-1$.

Доведення. Розвинемо визначник $\Delta(k)$ за теоремою Лапласа за мінорами перших mn рядків. Отримаємо таку рівність:

$$\Delta(k)=k^{mn(2n-1)}\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_{mn}),\\ \omega\in C(2mn,mn)}}(-1)^{\rho_\omega}V_\omega W_{\sigma(\omega)}\exp(M_{\sigma(\omega)}kT), \qquad (29)$$

де $\rho_\omega=1+\ldots+mn+i_1+\ldots+i_{mn}$, а набір $\sigma(\omega)\in C(2mn,mn)$ однозначно визначається за набором $\omega\in C(2mn,mn)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega)\cap\operatorname{set}\omega=\varnothing$.

Із того, що система (1) загального типу, на підставі леми 1 дістаємо, що існують такі неперетинні набори $\omega_1\in C(2mn,mn)$, $\omega_2\in C(2mn,mn)$, що виконується нерівність (23). Нехай $P_{\omega_2}(\mu,k)$ – многочлен, визначений за набором ω_2 формулою (26). Тоді з формул (28), (29), враховуючи твердження лем 1, 2, отримуємо:

$$|P_{\omega_2}(d/dT,k)\Delta(k)|=|k|^{mn(2n-1)}\cdot|V_{\omega_1}|\cdot|W_{\omega_2}|\cdot|P_{\omega_2}(M_{\omega_2}k,k)|\geq$$
$$\geq C_5\,|k|^{mn(2n-1)+d},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (30)$$

Розглянемо множини $E(k,\rho)=\{T\in(0,\rho]:|\Delta(k)|<\nu(k)\}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\rho>0$, де $\nu(k)=(1+|k|)^{mn(2n-1)-d-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Із формул (29), (30) на основі допоміжних тверджень [5] одержуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}E(k,\rho)\leq C_6\,|k|\left(\frac{\nu(k)}{|k|^{d+mn(2n-1)}}\right)^{1/d}\leq\frac{C_7}{|k|^{1+\varepsilon/d}},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \qquad (31)$$

З нерівностей (31) випливає збіжність ряду $\sum_{|k|>0}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}E(k,\rho)$. Тоді за лемою Бореля–Кантеллі [8] отримуємо, що міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел T, які належать до нескінченної кількості множин $E(k,\rho)$, $k\in\mathbb{Z}$, дорівнює нулю. З огляду на довільність числа $\rho>0$ отримуємо доведення теореми.

Теорема 5. *Нехай система (1) є системою загального типу. Тоді для майже всіх (стосовно* ρ*-міри Гаусдорфа,* $0 < \rho \le 1$*) чисел* $T > 0$ *нерівність (19) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) чисел* $k \in \mathbb{Z}$ *при* $\alpha > \dfrac{2d}{\rho} - d - mn(2n-1)$, *де* $d = C_{2mn}^{mn} - 1$.

Теорема 6. *Нехай система (1) є системою загального типу. Якщо* $\alpha > d - mn(2n-1)$, $d = C_{2mn}^{mn} - 1$, *то розмірність Гаусдорфа множини тих чисел* $T > 0$, *для яких нерівність, протилежна до (19), виконується для нескінченної кількості чисел* $k \in \mathbb{Z}$, *не перевищує* $\dfrac{2d}{\alpha + \delta + mn(2n-1)}$.

Доведення теорем 5, 6 проводимо із використанням міркувань, наведених під час доведення теореми 4, а також результатів праці [1].

Зауваження. Результати праці можна перенести на випадок задачі з умовами (2) для гіперболічних систем рівнянь, збурених нелінійними інтегро-диференціальними доданками, та систем рівнянь, у яких невідома вектор-функція містить відхилення часового та просторових аргументів.

1. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 7.– С. 795–802.
   Те саме: Bobyk I. O., PtashnykB .Yo. Boundary value problems for hyperbolic equations with constant coefficients // Ukr. Math. J. – 1994. – 46, No. 7. P. 869–877, https://doi.org/10.1007/BF01056663
3. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 625. – С. 11–19.
4. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 7–17.
   Те саме: Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations // J. Math. Sci. – 2011. – 174, No. 2, 121–135, https://doi.org/10.1007/s10958-011-0285-y
5. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – 28, № 2. – С. 115–140.
6. *Нитребич З. М., Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 94–105.
7. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – 18, № 2. – С. 199–204.
8. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – 22, № 4. – С. 669–678.
10. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми механіки і математики – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.
11. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013.– 56, № 3. – С. 15–28.
    Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet-Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – 205, No. 4. – P. 501–517, https://doi.org/10.1007/s10958-015-2263-2
12. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 2. – С. 25–31.

Те саме: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet–Neumann problem for systems of hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2016. – 215, No. 1. – P. 26–35, https://doi.org/10.1007/s10958-016-2819-9

13. *Репетило С. М., Симотюк М. М.* Задача Діріхле-Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 147–153, http://doi.org/10.15407/apmm2018.16.147-153
14. *Симотюк М. М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.
15. *Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матем. вісник НТШ. – 2004. – Т. 1. – С. 130–148.
16. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – Москва: Наука, 1984. – 446 с.
17. *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions // Russ. Math. – 2007. – 51, No. 2. – P. 44–52, https://doi.org/10.3103/S1066369X07020065

DIRICHLET–NEUMANN TYPE PROBLEM FOR A LINEAR SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS HOMOGENEOUS IN THE ORDER OF DIFFERENTIATION

In the domain, that is a Cartesian product of an interval on the unit circle, a unique solvability of the problem with conditions of the Dirichlet–Neumann type with respect to the selected variable and periodicity conditions with respect to another variable for linear hyperbolic systems of equations homogeneous in the order of differentiation is established. It is proved, that the conditions for the correct solvability of the problem in Sobolev spaces are satisfied for almost all (with respect to the Lebesgue and Hausdorf measure) numbers, that are the values of the right end of the time interval.

Key words: boundary value problem, Dirichlet–Neumann conditions, system of equations with partial derivatives, small denominators, metric approach.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
05.12.20