https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.14-24

УДК 517.98

В. Я. Лозинська[1]✉, С. В. Шарин[2]

ЗАДАЧА КОШІ В ПРОСТОРІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ω-УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ

Розв'язано задачу Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності в просторі поліноміальних ω-ультрарозподілів типу Берлінга.

***Ключові слова**: нескінченновимірне рівняння теплопровідності, лапсасіан Гросса, поліноміальні ω-ультрарозподіли.*

Вступ. Алгебри розподілів та ультрарозподілів використовують у квантовій теорії поля [4]. Дослідженням у цьому напрямку, зокрема, вивченню алгебр поліноміальних розподілів та ультрарозподілів присвячені праці [1], [8], [14], [15]. Нижче розглянуто простір ω-ультрарозподілів типу Берлінга $E'_{(\omega)}$, який введено у працях [5], [16]. Відомо, що $E'_{(\omega)}$ є ядерним простором Фреше. Тому з результатів статей [14], [15] випливає, що можна побудувати мультиплікативну алгебру $P(E'_{(\omega)})$ неперервних скалярних поліномів на просторі $E'_{(\omega)}$, а також сильно спряжену до неї згорткову алгебру $P'(E'_{(\omega)})$ поліноміальних ω-ультрарозподілів типу Берлінга. У просторі $P'(E'_{(\omega)})$ розв'язано задачу Коші для нескінченновимірного рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Гросса. Встановлено, що лапласіан Гросса діє як згортковий оператор, що дає можливість звести узагальнене рівняння теплопровідності до згорткового рівняння і отримати розв'язок у вигляді явної формули. Цей лапласіан ввів Л. Гросс [9], щоб вивчити рівняння теплопровідності у нескінченновимірних просторах. Існує багато досліджень цього лапласіану за різних підходів. Згадаємо теорію білого шуму, що ґрунтується на працях Ю. Березанського, Ю. Самойленка [3], Т. Хіди [10] і на нескінченновимірному аналогу теорії розподілів Шварца [11]. У межах цієї теорії лапласіан Гросса – це лінійний неперервний оператор, що діє на основні функції теорії білого шуму. Цей лапласіан і відповідні задачі Коші вивчали також у працях [6], [13].

1. **Попередні відомості і позначення**. ω*-ультрарозподіли типу Берлінга.* Нехай $\nu(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ – така неперервна зростальна функція, що $\nu|_{[0,1]}\equiv 0$. Функцію $\omega(t):=\nu(|t|)$ назвемо ваговою, якщо вона задовольняє такі умови (див. [5, 16]):

(α) існує таке $L\ge 1$, що $\omega(2t)\le L(1+\omega(t))$ для всіх $t\ge 0$,

(β) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2}\,dt<\infty$,

(γ) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t)}{\omega(t)}=0$,

(δ) функція $\eta: t\mapsto\omega(e^t)\in[0,\infty)$ є опуклою.

Нехай $\eta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ є опуклою і зростальною, що задовольняє умови і $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\eta(x)}=0$. Спряжену за Юнгом до функції η визначимо як

✉ vlozynska@yahoo.com

$\eta^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\eta^*(y) := \sup_{x\geq 0}(xy - \eta(x))$. Функція η^* є опуклою і зростальною.

Для вагової функції ω і відкритої множини $\Omega \subset \mathbb{R}$ визначимо простір

$$E_{(\omega)}(\Omega) = \Big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \textit{для всіх компактних } K \in \Omega \textit{ і всіх } \lambda \in \mathbb{N}:$$

$$p_{K,\lambda}(\varphi) := \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+}\sup_{t\in K} |\varphi^{(\alpha)}(x)| \exp\left(-\lambda\eta^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) < \infty\Big\}.$$

Простір $E_{(\omega)}(\Omega)$ наділяють метричною локально опуклою топологією, яку задають півнорми $p_{K,\lambda}$, де K – компактна підмножина Ω і $\lambda \in \mathbb{N}$; $E_{(\omega)} = E_{(\omega)}(\Omega)$ – ядерний простір Фреше [5].

Елементи простору $E_{(\omega)}(\mathbb{R})$ називають основними ω-ультрадиференційовними функціями типу Берлінга з довільними носіями. Сильно спряжений простір до $E_{(\omega)}(\mathbb{R})$ позначаємо $E'_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Елементи простору $E'_{(\omega)} = E'_{(\omega)}(\mathbb{R})$ називатимемо згідно з [5, 16] ω-ультрарозподілами типу Берлінга (з компактними носіями).

Для послідовності $\Lambda = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неперервних функцій $\mu_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ визначимо простір

$$\mathrm{A}_\Lambda(\mathbb{C}) = \{\varphi \in H(\mathbb{C}) \mid \text{для деякого } n : \sup_{z\in\mathbb{C}} |\varphi(z)| \exp(-\mu_n(z)) < \infty\}.$$

Виберемо компактні підмножини $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \Omega$ і визначимо простір функцій

$$\mathrm{A}_{(\omega)} = \mathrm{A}_\Lambda(\mathbb{C}), \text{ де } \Lambda = \{\mu_n : z \to H_{K_n}(\operatorname{Im} z) + n\omega(z) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$H_K(x) = \sup_{y\in K} \langle x, y\rangle.$$

Перетворення Фур'є–Лапласа

$$F(f)[z] = \langle f, \exp(-ixz)\rangle, \quad f \in E'_{(\omega)}$$

є лінійним топологічним ізоморфізмом з простору $E_{(\omega)}$ на простір цілих функцій $\mathrm{A}_{(\omega)}$ [5]. Позначимо через $F' : \mathrm{A}'_{(\omega)} \to E'_{(\omega)}$ оператор, спряжений до оператора F.

Поліноми на локально опуклих просторах. Нехай X, Y – локально опуклі комплексні векторні простори. Простір всіх лінійних неперервних операторів з X в Y позначимо $\mathrm{L}(X,Y)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. Для простоти писатимемо $\mathrm{L}(X)$ замість $\mathrm{L}(X,X)$.

Для довільного локально опуклого простору X сильно спряжений простір завжди позначатимемо X'. Дію функціонала $f \in X'$ на елемент $x \in X$ записуватимемо як $\langle f, x\rangle$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ простір всіх n-лінійних неперервних функціоналів на X позначимо $\mathrm{L}(^nX,\mathbb{C}) := \mathrm{L}(X\times\ldots\times X,\mathbb{C})$. Функціонал $F \in \mathrm{L}(^nX,\mathbb{C})$ називають симетричним, якщо $F(x_1,\ldots,x_n) = F(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$, де σ – довільна перестановка множини $\{1,\ldots,n\}$. Простір всіх симетричних n-лінійних неперервних функціоналів позначимо $\mathrm{L}_s(^nX,\mathbb{C})$.

Визначимо діагональне відображення $\Delta_n : X \ni x \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in X \times \dots \times X$. Відображення P називають неперервним n-однорідним поліномом, якщо знайдеться таке $F \in \mathsf{L}_s({}^n X, \mathbb{C})$, що $P(x) = F(\Delta_n(x))$. Простір усіх неперервних n-однорідних поліномів позначимо $P_n(X)$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X. За означенням приймемо $P_0(X) := \mathbb{C}$.

Для n-го (симетричного) тензорного степеня простору X використовуватимемо позначення $\otimes^n X$ (відповідно $\otimes_s^n X$), $n \in \mathbb{N}$. За означенням приймемо $\otimes^0 X = \otimes_s^0 X := \mathbb{C}$. Поповнення тензорного добутку $\otimes$ (симетричного тензорного добутку $\otimes_s$) у проективній локально опуклій топології позначатимемо $\otimes_p$ (відповідно $\otimes_{s,p}$).

Для означення простору $P_n(X)$ можна використати лінійні топологічні ізоморфізми

$$P_n(X) \simeq \mathsf{L}_s({}^n X, \mathbb{C}) \simeq (\otimes_{s,p}^n X)', \tag{1}$$

описані раніше [7]. Розглянемо природне вкладення

$$\otimes_n : X \times \dots \times X \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in \otimes_p^n X.$$

Ізоморфізм $\left(\otimes_{s,p}^n X\right)' \ni p_n \mapsto P_n := p_n \circ \otimes_n \circ \Delta_n \in P_n(X)$ однозначно визначає n-однорідний поліном як композицію

$$P_n(X) = \left\langle p_n, x^{\otimes n} \right\rangle, \text{ де } x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{n} = (\otimes_n \circ \Delta_n) x, \quad x \in X. \tag{2}$$

Простір всіх скінченних сум $P(X) = \left\{ P = \sum_{n=0}^{m} P_n : P_n \in P_n(X), m \in \mathbb{N} \right\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в X, називають *простором неперервних поліномів* на X.

Символами $P'(X)$, $P_n'(X)$ позначатимемо сильно спряжені простори до $P(X)$, $P_n(X)$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $P(X')$, $P_n(X')$ і сильно спряжених до них просторів $P'(X')$, $P_n'(X')$ вважаємо визначеними для простору X'.

Простір $P(X)$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sum_{m=0}^{n} P_m(x) \cdot Q_{n-m}(x)$. Якщо X неперервно і щільно вкладається в X', то правильним є неперервне щільне вкладення $P(X') \rightarrowtail P'(X')$. Тому множення алгебри $P(X')$ можна продовжити до множення в алгебрі $P'(X')$.

Символом $\mathop{\times}\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ позначимо декартовий локально опуклий добуток, символом $\bigoplus\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n X$ – пряму локально опуклу суму симетричних тензорних степенів $\otimes_{s,p}^n X$ простору X; аналогічні позначення і для простору X'. Зауважимо, що елементи прямої суми містять лише скінченну кількість доданків.

Якщо простір X є ядерним (F) або (DF) локально опуклим (див. [2, 11]), то простори $\otimes_{s,p}^n X'$ і $(\otimes_{s,p}^n X)'$ – топологічно ізоморфні.

Поліноміальні ω*-ультрарозподіли типу Берлінга.* У працях [14, 15] побудовано поліноміальне розширення ультрарозподілів з носіями на півосі $[0,+\infty)$ та в конусі $\mathbb{R}_+^d$ відповідно. Побудуємо поліноміальні розширення ω-ультрарозподілів типу Берлінга. Простір неперервних n-однорідних поліномів над простором $E_{(\omega)}$ позначимо $P_n(E'_{(\omega)})$ і наділимо його топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в $E_{(\omega)}$. За означенням приймемо $P_0(E_{(\omega)}) := \mathbb{C}$. Для означення простору використовуємо лінійні топологічні ізоморфізми $P_n(E_{(\omega)}) \simeq L_s({}^nE_{(\omega)},\mathbb{C}) \simeq (\otimes_{s,p}^n E_{(\omega)})'$, які слідують з виразу (1). Простір всіх скінченних сум $P(E_{(\omega)}) = \left\{P = \sum_{n=0}^{m} P_n : P_n \in P_n(E_{(\omega)}), m \in \mathbb{N}\right\}$, наділений топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах в $E_{(\omega)}$, називають простором неперервних поліномів на $E_{(\omega)}$. Простір $P(E_{(\omega)})$ є топологічною алгеброю з одиницею і множенням $P(x)\cdot Q(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\sum_{m=0}^{n} P_m(x)\cdot Q_{n-m}(x)$.

Символами $P'(E_{(\omega)})$, $P'_n(E_{(\omega)})$ позначатимемо сильно спряжені простори до просторів $P(E_{(\omega)})$, $P_n(E_{(\omega)})$ відповідно. Аналогічні простори поліномів $P(E'_{(\omega)})$, $P_n(E'_{(\omega)})$ і сильно спряжених до них просторів $P'(E'_{(\omega)})$, $P'_n(E'_{(\omega)})$ вважаємо визначеними для простору $E'_{(\omega)}$.

Для $X = E'_{(\omega)}$ можна застосувати абстрактну теорію, розвинуту раніше [15], і, як наслідок, отримати такі теореми, які наведемо без доведень.

Теорема 1. *Справджуються такі лінійні топологічні ізоморфізми:*

$$\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)} \overset{\Psi}{\simeq} P'(E'_{(\omega)}),\quad \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)} \overset{\Upsilon}{\simeq} P(E'_{(\omega)}).$$

Елементи простору $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ та $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ записуємо у формі $\mathsf{f} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n := (f_0, f_1, f_2,\ldots, f_n,\ldots)$ та $\mathsf{p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n := (p_0,p_1,p_2,\ldots,p_m,0,\ldots)$ для деякого $m\in\mathbb{Z}_+$. Відомо [2], що $\left\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)} \right\rangle$ – це дуальна пара відносно білінійної форми $\langle \mathsf{f},\mathsf{p}\rangle = \left\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \langle f_n, p_n\rangle$, де $p_n \in \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$, $f_n \in \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$.

Елементи простору $P(E'_{(\omega)})$ називаємо поліноміальними основними функціями типу Берлінга. Елементи простору $P'(E'_{(\omega)})$) – *поліноміальними* ω-*ультрарозподілами типу Берлінга.*

Дуальні пари $\left\langle \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n \mathrm{A}'_{(\omega)}, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n \mathrm{A}_{(\omega)} \right\rangle$ і $\langle P'(\mathrm{A}'_{(\omega)}), P(\mathrm{A}'_{(\omega)})\rangle$ будуємо аналогічно.

Теорема 2. *(i) Пряма сума* $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$ *є локально опуклою алгеброю відносно операції згорткового типу* $\mathsf{p} \star \mathsf{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{m=0}^{n} p_m \otimes_s q_{n-m} \right)$, *де* $\mathsf{p} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} p_n$, $\mathsf{q} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} q_n$.

(ii) Декартів добуток $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$ *є локально опуклою алгеброю відносно операції згорткового типу* $\mathrm{f} \star \mathrm{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\sum_{m=0}^{n} f_m \otimes_s g_{n-m} \right)$, *де* $\mathrm{f} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} f_n$, $\mathrm{g} := \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n$.

(iii) Відображення $\left\{ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}, \star \right\} \to \left\{ P(E'_{(\omega)}), \cdot \right\}$ *та* $\left\{ \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}, \star \right\} \to$ $\to \left\{ P'(E'_{(\omega)}), \cdot \right\}$ *є ізоморфізмами відповідних алгебр.*

Операцію множення в алгебрі $P(E'_{(\omega)})$ можна продовжити до множення в $P'(E'_{(\omega)})$. Простір $P'(E'_{(\omega)})$ є топологічною алгеброю відносно введеного множення.

2. **Оператор згортки для поліноміальних** ω**-ультрарозподілів типу Берлінга**. Нехай $g \in E'_{(\omega)}$. Визначимо оператор зсуву $T_g \in \mathcal{L}(P(E'_{(\omega)}))$ за формулою $T_g P(f) := P(f+g)$, $P \in P(E'_{(\omega)})$, $f \in E'_{(\omega)}$.

Символом $\odot$ позначимо (праве) k-скорочення симетричного тензорного добутку, тобто $g^{\otimes k} \odot_k \varphi^{\otimes s} := \langle g, \varphi\rangle^k \varphi^{\otimes(s-k)}$, $k \le s$, $g \in E'_{(\omega)}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$.

Для довільного $g \in E'_{(\omega)}$ оператор зсуву T_g діє так:

$$P = \sum_n \left\langle \cdot^{\otimes n}, p_n \right\rangle \mapsto T_g P = \sum_n \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \odot_k p_{n+k} \right\rangle,$$

де $p_n \in \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$, $n = 0,1,\ldots,m$, $m = \deg P$.

Не втрачаючи загальності, доведемо це для поліномів виду $P_{\varphi,m} = \sum_{k=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \right\rangle$, де $(1, \varphi, \varphi^{\otimes 2}, \ldots, \varphi^{\otimes m}, 0, \ldots) \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E_{(\omega)}$, $\varphi \in E_{(\omega)}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Дійсно,

$$T_g P_{\varphi,m}(f) = P_{\varphi,m}(f+g) = \sum_{k=0}^{m} \left\langle (f+g)^{\otimes k}, \varphi^{\otimes k} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{k} C_k^n \left\langle f^{\otimes n} \otimes_s g^{\otimes(k-n)}, \varphi^{\otimes k} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=n}^{m} C_k^n \left\langle f^{\otimes n} \otimes_s g^{\otimes(k-n)}, \varphi^{\otimes k} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \left\langle f^{\otimes n} \otimes_s g^{\otimes k}, \varphi^{\otimes(n+k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \left\langle f^{\otimes n}, \langle g, \varphi\rangle^k \varphi^{\otimes n} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left\langle f^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n \langle g, \varphi\rangle^k \varphi^{\otimes n} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left\langle f^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^n g^{\otimes k} \odot_k \varphi^{\otimes(n+k)} \right\rangle.$$

Визначимо згортку поліноміального ω-ультрарозподілу $U \in P'(E'_{(\omega)})$ і поліноміальної основної функції $P \in P(E'_{(\omega)})$ за формулою $(U * P)(g) := \left\langle U, T_g P \right\rangle$ відносно дуальної пари $\left\langle P'(E'_{(\omega)}), P(E'_{(\omega)}) \right\rangle$.

Якщо подати $U\in P'(E'_{(\omega)})$ і $P\in P(E'_{(\omega)})$ у вигляді $U=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle u_n,\cdot^{\otimes n}\right\rangle$ і $P=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},p_n\right\rangle$, тоді згортку можна записати так:

$$(U*P)(g)=\sum_{n=0}^{m}\left\langle u_n,\sum_{k=0}^{m-n}C_{n+k}^{n}g^{\otimes k}\odot_k p_{n+k}\right\rangle=\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{m-n}C_{n+k}^{n}\left\langle u_n\otimes_s g^{\otimes k},p_{n+k}\right\rangle=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{m-k}C_{n+k}^{n}\left\langle g^{\otimes k},u_n\odot_n p_{n+k}\right\rangle=\sum_{k=0}^{m}\left\langle g^{\otimes k},\sum_{n=0}^{m-k}C_{n+k}^{n}u_n\odot_n p_{n+k}\right\rangle. \quad (3)$$

Елемент $\sum_{n=0}^{m-k}C_{n+k}^{n}u_n\odot_n p_{n+k}\in\otimes_{s,p}^{k}E_{(\omega)}$ для кожного $k=0,1,\ldots,m$. Отже, згортка $U*P$ є поліномом з простору $P(E'_{(\omega)})$.

Для довільного поліноміального ω-ультрарозподілу $U\in P'(E'_{(\omega)})$ визначимо оператор згортки:

$$C_U : P(E'_{(\omega)})\ni P\mapsto U*P\in P(E'_{(\omega)}).$$

Покажемо, що композиція двох операторів згортки C_V і C_U, що відповідають $U,V\in P'(E'_{(\omega)})$, є оператором згортки, що відповідає поліноміальному ω-ультрарозподілу, який позначаємо $V*U$.

Розглянемо $V=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle g^{\otimes n},\cdot^{\otimes n}\right\rangle\in P'(E'_{(\omega)})$, $U=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle f^{\otimes n},\cdot^{\otimes n}\right\rangle\in P'(E'_{(\omega)})$ і $P=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},\varphi^{\otimes n}\right\rangle\in P(E'_{(\omega)})$, де $f,g\in E'_{(\omega)}$, $\varphi\in E_{(\omega)}$. З формули (3) отримуємо:

$$(C_V\circ C_U)(P)=V*(U*P)=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},\sum_{j=0}^{m-n}C_{n+j}^{j}g^{\otimes j}\odot_j p_{n+j}\right\rangle=$$

$$=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},\sum_{j=0}^{m-n}C_{n+j}^{j}g^{\otimes j}\odot_j\left(\sum_{k=0}^{m-n-j}C_{n+j+k}^{k}f^{\otimes k}\odot_j\varphi^{\otimes(n+j+k)}\right)\right\rangle=$$

$$=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},\sum_{j=0}^{m-n}C_{n+j}^{j}\sum_{k=0}^{m-n-j}C_{n+j}^{j}C_{n+j+k}^{k}\left\langle g,\varphi\right\rangle^{j}\left\langle f,\varphi\right\rangle^{k}\varphi^{\otimes n}\right\rangle=$$

$$=\sum_{n=0}^{m}\left\langle \cdot^{\otimes n},\sum_{j+k=0}^{m-n}\frac{(n+j+k)!}{n!\,j!\,k!}(g^{\otimes j}\otimes_s f^{\otimes k})\odot_{j+k}\varphi^{\otimes(n+j+k)}\right\rangle=$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\left\langle \sum_{j+k=s}\frac{s!}{j!\,k!}g^{\otimes j}\otimes_s f^{\otimes k},\sum_{n=0}^{m-s}C_{n+s}^{s}(\cdot^{\otimes n})\odot_n\varphi^{\otimes(n+s)}\right\rangle.$$

Отже, композиція операторів $C_V\circ C_U$ є оператором згортки, що відповідає поліноміальному ω-ультрарозподілу:

$$V*U=\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\langle \sum_{j+k=n}\frac{s!}{j!\,k!}g^{\otimes j}\otimes_s f^{\otimes k},\cdot^{\otimes n}\right\rangle\in P'(E'_{(\omega)}). \quad (4)$$

3. **Задача Коші для рівняння теплопровідності**, **породженого лапласіаном Гросса**. Введемо поліноміальне перетворення Фур'є–Лапласа. Враховуючи тензорну структуру простору $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^{n}E'_{(\omega)}$, розширимо відображення F'^{-1} на $\bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\otimes_{s,p}^{n}E'_{(\omega)}$. Для елементів тотальної підмножини простору $\otimes_{s,p}^{n}E'_{(\omega)}$

визначимо оператор $F'^{\otimes n} : f^{\otimes n} \mapsto \widehat{f}^{\otimes n}$, $F'^{\otimes 0} := I_{\mathbb{C}}$, де $\widehat{f}^{\otimes n} := (F'^{-1} f)^{\otimes n}$. Розширимо відображення $F'^{\otimes n}$ на цілий простір $\otimes_{s,p}^{n} E'_{(\omega)}$ за лінійністю і неперервністю. Як результат отримаємо відображення $F'^{\otimes n} \in \mathrm{L}(\otimes_{s,p}^{n} E'_{(\omega)}, \otimes_{s,p}^{n} \mathrm{A}'_{(\omega)})$. Визначимо відображення $F'^{\otimes}$ за формулою

$$F'^{\otimes} := (F'^{\otimes n}) : \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^{n} E'_{(\omega)} \ni f = (f_n) \mapsto \widehat{f} := (\widehat{f}_n) \in \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^{n} \mathrm{A}'_{(\omega)},$$

де $f_n \in \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^{n} E'_{(\omega)}$, $(\widehat{f}_n) := F'^{\otimes n} f_n \in \otimes_{s,p}^{n} \mathrm{A}'_{(\omega)}$.

Справедливо

$$P'(E'_{(\omega)}) \xrightarrow{F_p'^{\otimes}} P'(\mathrm{A}'_{(\omega)}),$$

$$P'(E'_{(\omega)}) \xrightarrow{\Upsilon} \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^{n} E'_{(\omega)} \xrightarrow{F'^{\otimes}} \bigtimes_{n \in \mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^{n} \mathrm{A}'_{(\omega)} \xrightarrow{\Psi^{-1}} P'(\mathrm{A}'_{(\omega)}),$$

що однозначно визначає оператор $F_p'^{\otimes} \in \mathrm{L}(P'(E'_{(\omega)}), P'(\mathrm{A}'_{(\omega)}))$.

Нехай $\{U_t : t \in J\}$ – сім'я елементів з простору $P'(E'_{(\omega)})$, де J – довільний інтервал $[0, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Нехай функція $t \mapsto U_t$ є неперервним відображенням з J в $P'(E'_{(\omega)})$. Тоді функція $t \mapsto F_p'^{\otimes} U_t$ є неперервним відображенням з J в $P'(\mathrm{A}'_{(\omega)})$, де відображення $F_p'^{\otimes} U_t : P'(E'_{(\omega)}) \mapsto P'(\mathrm{A}'_{(\omega)})$, $F_p'^{\otimes}$ – поліноміальне перетворення Фур'є–Лапласа.

Для $t \in J$ множина $\left\{F_p'^{\otimes} U_s : s \in [0, t]\right\}$ є компактною підмножиною в $P'(\mathrm{A}'_{(\omega)})$. Зокрема, вона обмежена. Отже, елемент $\int_0^t F_p'^{\otimes} U_s ds$ належить простору $P'(\mathrm{A}'_{(\omega)})$ для кожного $t \in J$. Тому у просторі $P'(E'_{(\omega)})$ існує такий єдиний елемент $\int_0^t U_s ds$, що

$$F_p'^{\otimes} \int_0^t U_s ds = \int_0^t F_p'^{\otimes} U_s ds.$$

Відображення $E_t = \int_0^t U_s ds$, $t \in J$ є диференційованим в $P'(E'_{(\omega)})$ і задовольняє $\frac{\partial}{\partial t} E_t = U_t$.

Теорема 3. *Задача Коші*

$$\frac{\partial}{\partial t} X_t = U_t * X_t, \ t \in J,$$

$$X_0 = P, \ P \in P(E'_{(\omega)})$$

має єдиний розв'язок в $P(E'_{(\omega)})$, *який запишемо у вигляді*

$$X_t = e^{*\int_0^t U_s ds} * P, \quad t \in J, \tag{5}$$

де $e^{*\int_0^t U_s ds}$ *розуміємо у сенсі*

$$e^{*U} := \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!} U^{*n}, \text{ де } U^{*n} := \underbrace{U * \ldots * U}_{n},\ U \in P'(E'_{(\omega)}).$$

Доведення. Запишемо розв'язок X_t задачі Коші у вигляді (5) (використовуючи ітерацію Пікарда). Поліном $P \in P(E'_{(\omega)})$ має скінченну кількість доданків, тому значення $e^{*\int_0^t U_s ds} * P$ залежить від деякої часткової суми ряду $e^{*\int_0^t U_s ds}$. З формули (3) випливає, що (5) належить простору $P(E'_{(\omega)})$. ◊

Переходимо до розгляду узагальненого рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Гросса. Визначимо оператор сліду τ:

$$\langle \tau, \varphi \otimes_s \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}_+^d} \varphi(t)\psi(t)dt,\quad \varphi, \psi \in E'_{(\omega)}.$$

Зрозуміло, що $\tau \in \mathrm{L}(\otimes_{s,p}^2 E'_{(\omega)}, \mathbb{C}) = (\otimes_{s,p}^2 E_{(\omega)})' \simeq \otimes_{s,p}^2 E'_{(\omega)}$.

Лапласіан Гросса Δ_G (за означенням з [12]) – це оператор

$$\Delta_G : P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle \mapsto \Delta_G P :=$$

$$= \sum_{n=0}^{m-2} (n+2)(n+1) \left\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \right\rangle \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle,$$

$$\varphi \in E_{(\omega)}.$$

Δ_G – оператор, який поліному $P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle, \varphi \in E_{(\omega)}$ ставить у відповідність поліном $\Delta_G P$ степеня $m-2$.

Теорема 4. *Лапласіан Гросса Δ_G діє як оператор згортки:*

$$\frac{1}{2}\Delta_G P = U_\tau * P,\quad P \in P(E'_{(\omega)}),$$

де U_τ – поліноміальний ω-ультрарозподіл з простору $P'(E'_{(\omega)})$, якому відповідає елемент $(0,0,\tau,0,\ldots) \in \times_{n\in\mathbb{Z}_+} \otimes_{s,p}^n E'_{(\omega)}$.

Доведення. Поліноміальний ω-ультрарозподіл U_τ можемо записати у вигляді

$$U_\tau = \times_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle u_{\tau,n}, \cdot^{\otimes n} \right\rangle = \left(0, 0, \left\langle \tau, \cdot^{\otimes 2} \right\rangle, 0, \ldots\right),$$

де $u_{\tau,n} = \tau$, якщо $n = 2$, і $u_{\tau,n} = 0$, якщо $n \neq 2$. Поліном $P \in P(E'_{(\omega)})$ записуємо $P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle$, $\varphi \in E_{(\omega)}$. Використовуючи (3), отримуємо:

$$U_\tau * P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^k u_{\tau,k} \odot_k \varphi^{\otimes(n+k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} \left\langle \cdot^{\otimes n}, C_{n+2}^2 \tau \odot_2 \varphi^{\otimes(n+2)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} C_{n+2}^2 \left\langle \tau, \varphi^{\otimes 2} \right\rangle \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle = \frac{1}{2}\Delta_G P. \qquad ◊$$

Теорема 5. *Задача Коші*

$$\frac{\partial}{\partial t}X_t = \frac{1}{2}\Delta_G X_t, \ \ t \in J,$$

$$X_0 = P, \ \ P \in P(E'_{(\omega)})$$

для рівняння теплопровідності, породженого лапсасіаном Гросса, має єдиний розв'язок в $P(E'_{(\omega)})$, *який записуємо так*:

$$X_t = e^{*tU_\tau} * P, \ \ t \in J.$$

Доведення. Перепишемо рівняння теплопровідності у вигляді $\frac{\partial}{\partial t}X_t = U_t * X_t$. З теореми 1 слідує, що задача Коші має єдиний розв'язок:

$$X_t = e^{*\int_0^t U_s ds} * P = e^{*tU_\tau} * P.$$

Користуючись формулою (4), визначимо $(tU_\tau)^{*n}$. Для $n = 2$ отримуємо:

$$(tU_\tau) * (tU_\tau) = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle t^2 \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!k!} u_{\tau,j} \otimes_s u_{\tau,k}, \cdot^{\otimes n} \right\rangle =$$

$$= \left(0,0,0,0,\frac{4!}{2!2!}t^2\left\langle \tau^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 4}\right\rangle, 0, \ldots\right),$$

$u_{\tau,n}$ не перетворюється в нуль тільки для $n = 2$. За математичною індукцією доводимо, що

$$(tU_\tau)^{*n} = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{2n}, \frac{(2n)!}{2^n} t^n \left\langle \tau^{\otimes n}, \cdot^{\otimes 2n}\right\rangle, 0, \ldots\right).$$

Звідси маємо:

$$e^{*tU_\tau} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}(tU_\tau)^{*n} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{n!}\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{2n}, \frac{(2n)!}{2^n} t^n \left\langle \tau^{\otimes n}, \cdot^{\otimes 2n}\right\rangle, 0, \ldots\right) =$$

$$= \left(1, 0, t\left\langle \tau, \cdot^{\otimes 2n}\right\rangle, 0, 3t^2\left\langle \tau^{\otimes 2}, \cdot^{\otimes 4}\right\rangle, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{(2n)!}{2^n}\frac{t^n}{2^n}\left\langle \tau^{\otimes n}, \cdot^{\otimes 2n}\right\rangle}_{\text{на } 2n-\text{му місці}}, 0, \ldots\right).$$

Залишилось знайти згортку $e^{*tU_\tau} * P$. Записуємо поліном $P \in P(E'_{(\omega)})$ у вигляді $P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n}\right\rangle$, $\varphi \in E_{(\omega)}$. Для довільного $n \in \mathbb{Z}_+$ позначимо $e_{2n} := \frac{(2n)!}{2^n}\frac{t^n}{2^n}\tau^{\otimes n}$ і $e_{2n+1} := 0$. Тоді e^{*tU_τ} можна записати у вигляді $e^{*tU_\tau} = \bigtimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\langle e_n, \cdot^{\otimes n}\right\rangle$. Звідси одержуємо:

$$e^{*tU_\tau} * P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{m-n} C_{n+k}^{k} e_k \odot_k \varphi^{\otimes(n+k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} C_{n+2k}^{2k} e_{2k} \odot_{2k} \varphi^{\otimes(n+2k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{(2k)!\,n!} \frac{(2k)!}{k!} \frac{t^k}{2^k} \left\langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \right\rangle \varphi^{\otimes n} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!\,n!} \frac{t^k}{2^k} \left\langle \tau^{\otimes k}, \varphi^{\otimes 2k} \right\rangle \left\langle \cdot^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n} \right\rangle,$$

де символ $[\cdot]$ означає цілу частину числа.

Отже, якщо поліном P записувати у вигляді $P = \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, p_n \right\rangle$, $p_n \in \otimes_{s,p}^{n} E_{(\omega)}$, тоді розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, породженого лапласіаном Гросса, можна подати так:

$$X_t == \sum_{n=0}^{m} \left\langle \cdot^{\otimes n}, \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} \frac{(n+2k)!}{k!\,n!} \frac{t^k}{2^k} \tau^{\otimes k} \odot_{2k} p_{n+2k} \right\rangle. \qquad \Diamond$$

1. *Шарин С. В.* Поліноміальні повільно зростаючі узагальнені функції // Карпатські матем. публікації – 2010. – 2, № 2. – С. 123–132.
2. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.
3. *Berezanskii Yu. M., Samoilenko Yu. S.* Nuclear spaces of functions of infinitely many variables // Ukrainian Math. J. – 1973 – 25 (6). – P. 723–737.
4. *Borchers H.* Algebras of unbounded operators in quantum fields theory. – Physica. – 1988. – 124. – P. 1–127.
5. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Math. – 1990. – 17. – P. 206–237, https://doi.org/10.1007/BF03322459
6. *Chung D. M., Ji U. C.* Some Cauchy problems in white noise analysis and associated semigroups of operators // Stochastic Anal. Appl. – 1999. – 17 (1). – P. 1–22. https://doi.org/10.1080/07362999908809585
7. *Dineen S.* Complex analysis on infinite dimensional spaces. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 544 p.
8. *Grasela K.* Generalized derivations and Fourier transform of polynomial ultradistributions // Mat. Studii. – 2003. – 20, No. 2. – P. 167–178.
9. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space // J. Funct. Anal. – 1967. – 1(2). – P. 123–181, https://doi.org/10.1016/0022-1236(67)90030-4
10. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals // Carleton Math. Lect. Notes. – Vol. 13. – Ottawa: Carleton Univer. Press, 1975. – P. 1–46.
11. *Komatsu H.* An Introduction to the theory of generalized functions. – Tokyo University Publ., 2000. – 186 p.
12. *Kuo H.* White Noise distribution theory. – CRC Press, Boca Ration, FL, 1996.
13. *Lee J.-S. K.* Heat equation in white Noise analysis // J. Korean Math. Soc. – 1996. – 33(3). – P. 541–555.
14. *Lopushansky O.* Polynomial ultradistributions: differentiation and Laplace transformation // Banach Center Publ. IM PAN. – 2010. – 88. – P. 195–209, https://doi.org/10.4064/bc88-0-16
15. *Lopushansky O., Sharyn S.* Polynomial ultradistributions on $\mathbb{R}_{+}^{d}$ // Topology. – 2009. – 48. – P. 80–90, https://doi.org/10.1016/j.top.2009.11.005
16. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Mat. – 1988. – 26. – P. 265–287, https://doi.org/10.1007/BF02386123

CAUCHY PROBLEM IN THE SPACE OF POLYNOMIAL ω-ULTRADISTRIBUTIONS

We study the Cauchy problem for infinite dimensional heat equation in the space of polynomial ω-ultradistributions of Beurling type.

Key words: infinite dimensional heat equation, Gross Laplacian, polynomial ω-ultradistributions.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Прикарпатський нац. ун-т
ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
10.09.20