https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.12-18

УДК 517.95

В. М. Кирилич, О. О. Куклюк, О. В. Мільченко✉

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЗАДАЧЕЮ ТЕОРІЇ БІОПОПУЛЯЦІЙ ЗА ОДНАКОВИХ СТАРТОВИХ УМОВ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ

Досліджено задачу оптимального керування динамікою вікової структури біопопуляції, еволюційний процес якої описує гіперболічна система двох рівнянь під час виродження в точку лінії задання початкових умов (однакові стартові умови еволюційного процесу). Одержано необхідні умови оптимальності, які можуть бути основою числових методів розв'язування задач оптимального керування.

Ключові слова: *теорія біопопуляцій, оптимальне керування, гіперболічна система, метод характеристик.*

1. **Формулювання задачі**. На деякому проміжку часу $t \in [0,T]$ розглянемо вектор-функцію $x(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t))$, яка характеризує щільність розподілу популяції деяких видів залежно від віку $s \in [aT, bT]$, a, b – const. Тоді еволюційний процес розвитку популяції в області $S = \{s, t : at < s < bt,$ $0 < t < T\}$ можна описати системою гіперболічних рівнянь першого порядку [1, 7]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} + \dfrac{\partial x_1}{\partial s} = -\mu(s) x_1(s,t), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} - \dfrac{\partial x_2}{\partial s} = -x_1(s,t) x_2(s,t), \end{cases} \quad (s,t) \in S, \tag{1}$$

де $\mu : [aT, bT] \to \mathbb{R}_+$ – задана функція, яку в теорії біопопуляцій називають коефіцієнтом смертності популяції.

Припустимо, що $a < -1$ і $b > 1$. Тоді із точки $(0,0)$ в область S попадають характеристики системи (1), які розбивають S на три складові:

$$S_1 = \{s, t : at < s < -t,\ t < T\},$$
$$S_2 = \{s, t : -t < s < t,\ t < T\},$$
$$S_3 = \{s, t : t < s < bt,\ t < T\},\ S = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

Крайові та початкові умови задамо у вигляді

$$x_1(at,t) = \beta_1(t) \int_{at}^{bt} K_1(r) u(r) x_2(r,t) dr,\ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$x_2(at,t) = \lambda_2(t),\ \ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$x_1(bt,t) = \lambda_1(t),\ \ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$x_2(bt,t) = \beta_2(t) \int_{at}^{bt} K_2(r) u(r) x_2(r,t) dr,\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Тут всі задані функції є стандартними біологічними параметрами, зокрема, β_i – коефіцієнти середньої народжуваності, K_i – частка самок. Роль керування відіграє функція $u = u(s)$, яка задає віковий розподіл продуктив-

✉ olga.milchenko@lnu.edu.ua

ності самок.

Мета задачі – мінімізувати функціонал

$$I(u)=\int_{aT}^{bT}\varphi(x_1(s,T),x_2(s,T),s)ds. \tag{6}$$

Задачу (1)–(6) розв'язуватимемо за таких обмежень на її вихідні дані:

1) функції $u,\ K_i\ (i=1,2)\in C^1[aT,bT]$;
2) функції $\lambda_i,\ \beta_i\ (i=1,2)$ – неперервно диференційовані на відрізку $[0,T]$;
3) функція $\mu\in C[aT,bT]$;
4) функція $\varphi=\varphi(x_1(s,T),x_2(s,T),s)$ – неперервна за всіма змінними і має неперервні та обмежені похідні за $x_i\ (i=1,2)$ в області свого визначення, $\varphi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times[aT,bT]\to\mathbb{R}$.

Після зроблених припущень для довільного допустимого керування задача (1)–(6) матиме єдиний узагальнений розв'язок, для неперервності якого необхідно також виконати умови погодження:

$$\lambda_1(0)=\beta_1(0)=\lambda_2(0)=\beta_2(0). \tag{7}$$

Описана модель – одна із різновидностей структурованих за віком керуючих впливів. Крім моделей динаміки популяцій, задачі виду (1)–(7) можна використати для вивчення розподілу інфекційних захворювань [6], динаміки безробіття [8], капітальних ресурсів [2, 3, 5] тощо, якщо вважати, що всі учасники відповідних еволюційних процесів знаходяться в однакових стартових умовах (лінія задання початкових умов вироджується в точку), тобто областю визначення задач є сектор, зазвичай, криволінійний.

2. **Коректна розв'язність задачі для гіперболічної системи**. Редукуємо задачу (1)–(5) для довільного допустимого керування в інтегральну форму. Для цього використаємо метод характеристик для системи (1). Рівняння характеристик для цієї системи виражають співвідношення $\xi=\tau+s-t$ та $\xi=-\tau+s+t$ як розв'язки відповідних задач Коші:

$$\frac{d\xi}{d\tau}=1,\ \frac{d\xi}{d\tau}=-1,\ \xi\big|_{\tau=t}=s.$$

Тоді для кожного допустимого керування $u=u(s)$ задача (1)–(5) еквівалентна системі інтегро-функціональних рівнянь [2, 3]:

$$x_1(s,t)=\begin{cases}\beta_1\left(\dfrac{t-s}{1-a}\right)e^{-\int\limits_{a\frac{t-s}{1-a}}^{s}\mu(\rho)d\rho}\displaystyle\int\limits_{a\frac{t-s}{1-a}}^{b\frac{t-s}{1-a}}K_1(r)u(r)x_2\left(r,\frac{t-s}{1-a}\right)dr,\ (s,t)\in S_1\cup S_2,\\[2ex] \lambda_1\left(\dfrac{t-s}{1-b}\right)e^{-\int\limits_{b\frac{t-s}{1-b}}^{s}\mu(\rho)d\rho},\ (s,t)\in S_3,\end{cases} \tag{8}$$

$$x_2(s,t)=\begin{cases}\beta_2\left(\dfrac{t+s}{1+b}\right)e^{-\int\limits_{\frac{t+s}{1+b}}^{t} x_1(-\rho+s+t,\rho)d\rho}\times \\ \times\int\limits_{a\frac{t+s}{1+b}}^{b\frac{t+s}{1+b}} K_2(r)u(r)x_2\left(r,\dfrac{t+s}{1+b}\right)dr,\ (s,t)\in S_2\cup S_3, \\ \lambda_2\left(\dfrac{t+s}{1+a}\right)e^{-\int\limits_{\frac{t+s}{1+a}}^{t} x_1(-\rho+s+t,\rho)d\rho}, \quad (s,t)\in S_1.\end{cases} \tag{9}$$

Означення. *Під узагальненим розв'язком задачі (1)–(5), що відповідає керуванню* u, *розумітимемо неперервну в* S *вектор-функцію* $x=(x_1,x_2)$, *компоненти якої задовольняють систему інтегро-функціональних рівнянь (8), (9) у* $\bar{S}$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови:*

1) $\mu\in C[aT,bT]$;
2) $K_i\in C^1[aT,bT],\ i=1,2$;
3) $u\in C^1[aT,bT]$;
4) $\lambda_i,\ \beta_i\in C^1[0,T],\ i=1,2$;
5) *погодження нульового порядку (7), то існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).*

Доведення теореми 1 повторює із незначними змінами доведення подібних теорем із праці [2].

3. **Формула приросту функціонала та необхідні умови оптимальності**. Розглянемо приріст функціонала (6) на двох допустимих процесах $\{u,x_1,x_2\}$ та $\{\tilde{u}=u+\Delta u,\ \tilde{x}_1=x_1+\Delta x_1,\ \tilde{x}_2=x_2+\Delta x_2\}$. Функції $\Delta x_1=\Delta x_1(s,t)$, $\Delta x_2=\Delta x_2(s,t)$ є розв'язками відповідної мішаної задачі:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Delta x_1(s,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial\Delta x_1(s,t)}{\partial s}=-\mu(s)\Delta x_1(s,t), \\ \dfrac{\partial\Delta x_2(s,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial\Delta x_2(s,t)}{\partial s}=-\Delta x_1(s,t)\Delta x_2(s,t),\end{cases}\quad (s,t)\in S, \tag{10}$$

$$\Delta x_1(at,t)=\beta_1(t)\int\limits_{at}^{bt}K_1(s)[\tilde{u}(s)\tilde{x}_2(s,t)-u(s)x_2(s,t)]ds, \tag{11}$$

$$\Delta x_2(at,t)=0, \tag{12}$$

$$\Delta x_2(bt,t)=\beta_2(t)\int\limits_{at}^{bt}K_2(s)[\tilde{u}(s)\tilde{x}_2(s,t)-u(s)x_2(s,t)]ds, \tag{13}$$

$$\Delta x_1(bt,t)=0, \tag{14}$$

$t\in[0,T]$.

$$\beta_1(0)=\beta_2(0)=0\,. \tag{15}$$

Враховуючи (10)–(15), приріст цільового функціонала можна записати у вигляді

$$I(u) = I(\tilde{u}) - I(u) = \int\limits_{aT}^{bT} \Delta\varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)ds +$$
$$+ \int\limits_{aT}^{bT}\int\limits_{0}^{T} \psi_1(s,t)\left[\frac{\partial \Delta x_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x_1(s,t)}{\partial s} + \mu(s)\Delta x_1(s,t)\right] dtds + \qquad (16)$$
$$+ \int\limits_{aT}^{bT}\int\limits_{0}^{T} \psi_2(s,t)\left[\frac{\partial \Delta x_2(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial \Delta x_2(s,t)}{\partial s} + \Delta x_2(s,t)\Delta x_1(s,t)\right] dtds,$$

де $\Delta\varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s) = \varphi(\tilde{x}_1(s,T), \tilde{x}_2(s,T), s) - \varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)$, а $\psi_i = \psi_i(s,t)$, $i = 1,2$ – довільні кусково-гладкі функції, визначені в $\overline{S}$.

Перетворимо співвідношення (16), враховуючи подання приросту $\Delta\varphi$ за формулою Тейлора, виділивши лінійну частину відносно Δx_1 та Δx_2, тобто

$$\Delta\varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s) = \frac{\partial \varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)}{\partial x_1}\Delta x_1(s,T) +$$
$$+ \frac{\partial \varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)}{\partial x_2}\Delta x_2(s,T) + o_\varphi\left(|\Delta x_1(s,T)|, |\Delta x_2(s,T)|\right),$$

та, застосувавши формулу інтегрування частинами, приходимо до співвідношення

$$\Delta I(u) = \int\limits_{aT}^{bT} \Delta x_1(s,t)\left[\frac{\partial \varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)}{\partial x_1} + \psi_1(s,T)\right] ds +$$
$$+ \int\limits_{aT}^{bT} \Delta x_2(s,t)\left[\frac{\partial \varphi(x_1(s,T), x_2(s,T), s)}{\partial x_2} + \psi_2(s,T)\right] ds -$$
$$- \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{aT}^{bT} \Delta x_1(s,t)\left[\frac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial s} - \psi_1(s,t)\mu(s)\right] dsdt -$$
$$- \int\limits_{0}^{T}\int\limits_{aT}^{bT} \Delta x_2(s,t)\left[\frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial s} - \psi_2(s,t)\Delta x_1(s,t) + \right. \qquad (17)$$
$$\left. + \beta_1(t)K_1(s)\psi_1(at,t)u(s) + \beta_2(t)K_2(s)\psi_2(bt,t)u(s)\right] dsdt -$$
$$- \int\limits_{aT}^{bT}\int\limits_{0}^{T} \Delta u(s)x_2(s,t)\beta_1(t)\psi_1(at,t)K_1(s)dsdt -$$
$$- \int\limits_{aT}^{bT}\int\limits_{0}^{T} \Delta u(s)x_2(s,t)\beta_2(t)\psi_2(bt,t)K_2(s)dsdt -$$
$$- \int\limits_{aT}^{bT} o_\varphi\left(|\Delta x_1(s,T)|, |\Delta x_2(s,T)|\right)ds.$$

Функції $\psi_i(s,t)$, $i = 1,2$ у (17) виберемо як розв'язки спряженої задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial \psi_1(s,t)}{\partial s} = \psi_1(s,t)\mu(s), \\ \dfrac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial s} = \psi_2(s,t)\Delta x_1(s,t) - \\ -\beta_1(t)K_1(s)\psi_1(at,t)u(s) + \beta_2(t)K_2(s)\psi_2(bt,t)u(s) \end{cases} \qquad (18)$$

з умовами

$$\psi_1(s,T) = -\frac{\partial\varphi(x_1(s,T),x_2(s,T),s)}{\partial x_1},\ s\in[aT,bT], \tag{19}$$

$$\psi_2(s,T) = -\frac{\partial\varphi(x_1(s,T),x_2(s,T),s)}{\partial x_2},\ s\in[aT,bT]. \tag{20}$$

Оскільки спряжена задача (18)–(20) за структурою розв'язку зберігає вигляд системи (1), то за накладених вище умов (теорема 1) стверджуємо про існування та єдиність узагальненого розв'язку (в сенсі означення) цієї задачі [2, 3].

Тепер кінцевий варіант формули приросту функціонала (17) можемо записати так:

$$\begin{aligned}\Delta I(u) = &-\int_{aT}^{bT}\int_0^T \Delta u(s)x_2(s,t)\beta_1(t)\psi_1(at,t)K_1(s)dsdt -\\ &-\int_{aT}^{bT}\int_0^T \Delta u(s)x_2(s,t)\beta_2(t)\psi_2(bt,t)K_2(s)dsdt + \eta,\end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\begin{aligned}\eta = &-\int_{aT}^{bT}\int_0^T \Delta u(s)\Delta x_2(s,t)\beta_1(t)\psi_1(at,t)K_1(s)dsdt -\\ &-\int_{aT}^{bT}\int_0^T \Delta u(s)\Delta x_2(s,t)\beta_2(t)\psi_2(bt,t)K_2(s)dsdt +\\ &+\int_{aT}^{bT} o_\varphi\left(|\Delta x_1(s,T)|,|\Delta x_2(s,T)|\right)ds.\end{aligned} \tag{22}$$

Співвідношення (21), (22) одержали для двох довільних, згаданих вище, допустимих процесів.

Нехай $u = u(s)$ – допустиме керування. Варійоване керування виберемо так [2]:

$$u_{\varepsilon,\delta}(s) = u(s+\varepsilon\delta(s)). \tag{23}$$

Тут $\varepsilon\in[0,1]$ – параметр, що характеризує малість варіації, $\delta(s)$ – неперервно-диференційовна функція, яка задовольняє умови

$$at \le s+\varepsilon\delta(s)\le bt,\ s\in[aT,bT],\ \delta(at)=\delta(bt)=0,\ t\in[0,T]. \tag{24}$$

Зазначимо, що керування (23) є гладким, а область значень функції $u_{\varepsilon,\delta}(s)$ визначена областю значень керування $u(s)$. Крім того, існує поточкова збіжність $u_{\varepsilon,\delta}(s)\to u(s)$, якщо $\varepsilon\to 0$, у кожній точці відрізка $[aT,bT]$ для довільного $\delta(s)$, що задовольняє умови (24). Остання властивість характеризує відповідну варіацію $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s) = u_{\varepsilon,\delta}(s) - u(s)$ як варіацію гладкої функції $u(s)$, зберігаючи близькість до нуля функції $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s)$ та її похідної $\frac{d}{ds}\Delta u_{\varepsilon,\delta}(s)$.

Вибравши варіацію керування за правилом (23), використавши подання

$$\Delta u(s) = \dot u(s)\varepsilon\delta(s) + o(\varepsilon),$$

приходимо до висновку, що приріст керування є величиною порядку ε.

Аналізуючи тепер прирости Δx_1 та Δx_2, враховуючи обмеженість у $\bar S$ відповідних функцій, одержимо нерівності

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta x_1(s,t)\right| \le M_1^1 \int\limits_{a\frac{t-s}{1-a}}^{b\frac{t-s}{1-a}} \left|\Delta u(r)\right| dr \, + \\
+ M_2^1 \int\limits_{a\frac{t-s}{1-a}}^{b\frac{t-s}{1-a}} \int\limits_{\frac{t-s}{1-a^2}+\frac{r}{1+a}}^{\frac{t-s}{1-a}} \left|\Delta x_1\left(-\rho + r + \frac{t-s}{1-a}, \rho\right)\right| d\rho dr,
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\left|\Delta x_2(s,t)\right| \le M_1^2 \int\limits_{a\frac{t+s}{1+b}}^{b\frac{t+s}{1+b}} \left|\Delta u(r)\right| dr + M_2^2 \int\limits_{a\frac{t+s}{1+b}}^{b\frac{t+s}{1+b}} \left|\Delta x_2\left(r, \frac{t+s}{1+b}\right)\right| dr, \tag{26}
$$

де M_i^j, $(i, j = 1,2)$ – $\mathrm{const} \ge 0$.

Застосувавши для (25), (26) метод послідовних наближень, беручи до уваги, що $\left|\Delta u(s)\right| \le \varepsilon U$, U – $\mathrm{const} \ge 0$, одержимо оцінки

$$
\left|\Delta x_i(s,t)\right| \sim \varepsilon, \; i = 1,2, \; (s,t) \in \bar{S}.
$$

У підсумку формулу приросту функціонала (21), (22) можемо записати так:

$$
\begin{aligned}
I(u_{\varepsilon,\delta}) - I(u) = -\varepsilon \int\limits_{aT}^{bT} \int\limits_0^T K_1(s) \frac{d}{ds}\left[\delta(s)u(s)\right] \psi_1(at,t)\beta_1(t)x_2(s,t)dtds \, - \\
-\varepsilon \int\limits_{aT}^{bT} \int\limits_0^T K_2(s) \frac{d}{ds}\left[\delta(s)u(s)\right] \psi_2(bt,t)\beta_2(t)x_2(s,t)dtds + o(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Інтегруючи це співвідношення частинами, враховуючи $\delta(aT) = \delta(bT) = 0$, одержимо:

$$
\begin{aligned}
I(u_{\varepsilon,\delta}) - I(u) = -\varepsilon \int\limits_{aT}^{bT} \int\limits_0^T \delta(s)u(s)\psi_1(at,t)\beta_1(t) \frac{d}{ds}\left[K_1(s)x_2(s,t)\right] dtds \, - \\
-\varepsilon \int\limits_{aT}^{bT} \int\limits_0^T \delta(s)u(s)\psi_2(bt,t)\beta_2(t) \frac{d}{ds}\left[K_2(s)x_2(s,t)\right] dtds + o(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Оскільки $\delta = \delta(s)$ – довільні неперервно-диференційовні на $[at, bt]$, $t \in [0,T]$ функції, то, застосовуючи основну лему варіаційного числення [4, с. 78], можна сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Якщо процес* $\{x^*, u^*\}$ *є оптимальним у задачі (1)–(7), то виконуються умови*

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^T u^*(s)\psi_1^*(at,t)\beta_1(t) \frac{d}{ds}\left[K_1(s)x_2^*(s,t)\right] dt = 0, \\
\int\limits_0^T u^*(s)\psi_2^*(bt,t)\beta_2(t) \frac{d}{ds}\left[K_2(s)x_2^*(s,t)\right] dt = 0,
\end{aligned} \tag{27}
$$

де $\psi_i^* = \psi_i^*(s,t)$, $i = 1,2$ – *розв'язки спряженої задачі (18)–(20), якщо* $u = u^*(s)$, $x = x^*(s,t)$.

Доведення теореми 2 побудоване на одержаних вище формулах приросту цільового функціонала та довільності вибору функції $\delta(s)$.

Зауваження. *Необхідні умови оптимальності (27) можуть бути основою для побудови числових алгоритмів розв'язку задачі оптимального керування.*

Зокрема, нехай задано початкове наближення $u^0 = u^0(s)$, тоді послідовно знаходимо $u^i(s)$, $i = 1, 2, \ldots$ та розв'язки $x_i^j(s,t)$, $\psi_i^j(s,t)$, $j = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots$ для цих керувань. Далі в основі алгоритму є функції

$$\omega_1^i(s) = \int_0^T \psi_1^i(at,t)\beta_1(t)\frac{d}{ds}\Big[K_1(s)x_2^i(s,t)\Big]dt,$$

$$\omega_2^i(s) = \int_0^T \psi_2^i(bt,t)\beta_2(t)\frac{d}{ds}\Big[K_2(s)x_2^i(s,t)\Big]dt,$$

$i = 1, 2, \ldots$, за допомогою яких, використовуючи, наприклад, характеристичні різницеві сітки [1], можна досягти заданої точності для цільового функціонала.

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. – Москва: Физматлит, 2007.– 168 с.
2. *Дерев'янко Т. О., Кирилич В. М.* Оптимальне керування гіперболічною системою напівлінійних рівнянь першого порядку з нескінченним горизонтом планування // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 2. – С. 185–201.
   Те саме: *Derev'anko T. O., Kyrylych V. M.* Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning // Ukr. Math. J. – 2015. – 67, No. 2. – P. 211–229.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-015-1075-3
3. *Дерев'янко Т. О., Кирилич В. М.* Оптимальне керування квазілінійною гіперболічною системою, що описує попит Слуцького // Мат. студії. – 2015. – 43, № 1. – С. 66–77. – https://doi.org/10.15330/ms.43.1.66-77
4. *Моклячук М. П.* Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – Київ: ТВіМС, 2004. – 384 с.
5. *Москаленко А. И.* Оптимальное управление моделями экономической динамики. – Новосибирск: Наука, 1999. – 186 с.
6. *Ammar-Khodja F., Bader A.* Stabilizability of systems of one-dimensional wave equations by one internal or boundary control force // SIAM J. Control Optim. – 2001. – 39, No. 6. – P. 1833–1851. – https://doi.org/10.1137/S0363012900366613.
7. *Dawidowicz A. L., Poskrobko A.* Matematyczne modele dynamiki populacji zależne od wieku. // Metody matematyczne w zastosowaniach. – Politechnika Gdańska.– 2014.– 2. – P. 39–58.
8. *Feichtinger G., Tragler G., Veliov V. M.* Optimality conditions for age-structured control systems // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – 288, No. 1. – P. 47–68.
   – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.07.001

OPTIMAL CONTROL OF A BIOPOPULATION THEORY PROBLEM UNDER THE SAME STARTING CONDITIONS OF AN EVOLUTIONARY PROCESS

The optimal control problem of the age-structured biopopulation dynamics is investigated. The evolutionary process is described by a hyperbolic system of two equations where the initial condition line degenerates to a point (identical starting conditions of the evolutionary process). Necessary optimality conditions are obtained that can be used as the basis of numerical methods for solving optimal control problems.

Key words: *bio-population theory*, optimal control, hyperbolic system, *method of characteristics.*

Львів. нац. ун-т
ім. Івана Франка, Львів

Одержано
23.11.21