https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.79-83

УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк[1,2]✉

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ СИЛЬВЕСТРА У КІЛЬЦІ БЛОЧНО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Встановлено умови існування розв'язку матричного рівняння $AX - YB = C$ *із блочно-трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *у кільці блочно-трикутних матриць над комутативною областю головних ідеалів.*

Ключові слова: *матричне рівняння типу Сильвестра, розв'язок матричного рівняння, блочно-трикутна матриця, кільце блочно-трикутних матриць.*

Нехай R – комутативна область головних ідеалів, $M(n,R)$ та $M(m,n,R)$ – відповідно кільце $n \times n$ та множина $m \times n$ матриць над R. Через $M_{BT}(n_1,\dots n_k,R)$ позначатимемо кільце верхніх блочно-трикутних матриць, що є підкільцем кільця $M(n,R)$, тобто матриць вигляду

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & \dots & T_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T_{kk} \end{Vmatrix},$$

де $T_{ii} \in M(n_i,R)$, $i = 1,\dots,k$; $T_{ij} \in M(n_i,n_j,R)$, $i,j = 1,\dots,k$, $i < j$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Добре відома теорема Рота [12], яка встановлює зв'язок між існуванням розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра

$$AX - YB = C, \tag{1}$$

де A, B, C – відомі матриці, X, Y – невідомі матриці відповідних розмірів, та еквівалентністю блочно-трикутної $M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix}$ та блочно-діагональної $N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$ матриць. Нагадаємо, що матриці M та N називають еквівалентними, якщо існують такі оборотні над R матриці U і V відповідних розмірів, що виконується співвідношення $UMV = N$.

В. Рот довів цей результат у випадку, коли коефіцієнти та невідомі у рівнянні (1) є матрицями над полем P або поліноміальними матрицями, тобто матрицями над кільцем поліномів $P[\lambda]$ від змінної λ, де P – поле. Теорема Рота також доведена над областю головних ідеалів [6], над довільним комутативним кільцем [8] та іншими кільцями.

Відзначимо, що, використовуючи теорему Рота, Р. Файнберг [6] встановив зв'язок між еквівалентністю блочно-трикутних матриць з кількістю блоків більше двох і блочно-діагональних матриць із тими самими блочними діагоналями та існуванням розв'язку системи матричних рівнянь типу Сильвестра.

Сьогодні теорема Рота продовжує привертати увагу багатьох дослідників, які отримують все нові і нові доведення цього результату [див. 7 та

✉ nataliya.dzhalyuk@gmail.com

наведений у п. 1.1 огляд], а також поширюють його на інші типи матричних рівнянь, наприклад, для матричних рівнянь $AX - \hat{X}B = C$ та $X - A\hat{X}B = C$ над полем кватерніонів. Узагальнюють результат Рота і для систем матричних рівнянь [3]. Такий інтерес дослідників пов'язаний насамперед із численними застосуваннями матричних рівнянь типу Сильвестра в інших розділах математики та прикладних задачах [див. 3 і наведену там бібліографію].

Багато уваги встановленню умов існування розв'язків певного вигляду поліноміального матричного рівняння типу Сильвестра приділяв у своїх працях Т. Качорек [9].

Один із підходів до розв'язування матричних рівнянь типу Сильвестра полягає у застосуванні до них спеціальних форм матриць над кільцями [1], зокрема спеціальної трикутної форми матриць над поліноміальними кільцями відносно напівскалярної еквівалентності та стандартної форми матриць відносно узагальненої еквівалентності над адекватними кільцями [2]. Цим підходом вдалося визначити мінімальні степені розв'язків поліноміального матричного рівняння Сильвестра [4], а також для матричних рівнянь типу Сильвестра із однією та двома змінними над адекватними кільцями записати формули загальних розв'язків і встановити критерій їх єдиності [5].

До розв'язування матричних рівнянь типу Сильвестра та опису факторизацій матриць менших порядків зводять також задачу про опис з точністю до асоційовності факторизації блочно-трикутних матриць, тобто матриць у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots n_k, R)$. Зокрема, у праці [11] встановлені умови існування та єдності з точністю до асоційовності факторизацій матриць у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots n_k, R)$ і запропоновано метод їх побудови.

Треба зауважити, що якщо матричне рівняння (1) має розв'язок у кільці $M(n, R)$, то воно може не мати блочно-трикутного розв'язку, тобто розв'язку у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots n_k, R)$, як видно із такого прикладу.

Приклад. Розглянемо матричне рівняння (1), в якому

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \in M_{BT}(2, 2, \mathbb{Z}),$$

тобто це блочно-трикутні матриці над кільцем цілих чисел $R = \mathbb{Z}$.

Таке матричне рівняння за теоремою Рота має розв'язок, оскільки матриці $M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix}$ та $N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$ еквівалентні [12, 6]. Але блочно-трикутного розв'язку, тобто розв'язку в кільці $M_{BT}(2, 2, \mathbb{Z})$ воно не має, бо, якщо б існував такий розв'язок, то існував би й розв'язок матричного рівняння

$$A_{11}X_{11} - Y_{11}B_{11} = C_{11},$$

де $A_{11} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $B_{11} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$, $C_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$, а це матричне рівняння не має розв'язку, тому що матриці $\begin{Vmatrix} A_{11} & C_{11} \\ 0 & B_{11} \end{Vmatrix}$ та $\begin{Vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B_{11} \end{Vmatrix}$ не є еквівалентними.

Теорема. *Нехай у матричному рівнянні* (1) *коефіцієнти* A, B *і* $C \in M_{BT}(n_1, \ldots n_k, R)$, *тобто є верхніми блочно-трикутними матрицями. Якщо*

1) *матриці* $\begin{Vmatrix} A_{ii} & C_{ii} \\ 0 & B_{ii} \end{Vmatrix}$ та $\begin{Vmatrix} A_{ii} & 0 \\ 0 & B_{ii} \end{Vmatrix}$ *еквівалентні для усіх* $i = 1, \dots, k$

та

2) $\left(\det A_{ii}, \det B_{i+j,i+j}\right) = 1$ *для усіх* $i = 1, \dots, k-1$, $j = 1, \dots, k-i$,

тоді матричне рівняння (1) *має розв'язок* X, Y *у кільці* $M_{BT}(n_1, \dots n_k, R)$, *тобто* X *та* Y *є верхніми блочно-трикутними матрицями.*

Доведення. Запишемо матричне рівняння (1) із коефіцієнтами A, B і $C \in M_{BT}(n_1, \dots n_k, R)$, тобто верхніми блочно-трикутними матрицями, причому невідомі матриці X та Y також подамо у відповідному блочному вигляді:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} \end{Vmatrix} -$$

$$- \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1k} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{k1} & Y_{k2} & \dots & Y_{kk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{kk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1k} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{kk} \end{Vmatrix},$$

де відомі матриці $A_{ii}, B_{ii}, C_{ii} \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k$; $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1, \dots, k$, $i < j$, та невідомі – $X_{ii}, Y_{ii} \in M(n_i, R)$, $i = 1, \dots, k$; $X_{ij}, Y_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $i, j = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Тоді із цього матричного рівняння отримаємо систему матричних рівнянь, де коефіцієнтами є блоки відповідних блочних матриць:

$$\sum_{t=i}^{k} A_{it} X_{tj} - \sum_{s=1}^{j} Y_{is} B_{sj} = C_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, k. \tag{2}$$

Система матричних рівнянь (2) містить рівняння вигляду:

$$\sum_{t=i}^{k} A_{it} X_{tj} - \sum_{s=1}^{j} Y_{is} B_{sj} = 0, \text{ при } i > j,\ i = 2, \dots, k,\ j = 1, \dots, k-1.$$

Усі ці матричні рівняння мають нульові розв'язки, тобто можемо прийняти, що

$$X_{ij} = Y_{ij} = 0, \text{ при } i > j,\ i = 2, \dots, k,\ j = 1, \dots, k-1. \tag{3}$$

Підставимо ці значення невідомих (3) у систему матричних рівнянь (2). Тоді отримаємо два типи матричних рівнянь:

$$A_{ii} X_{ii} - Y_{ii} B_{ii} = C_{ii},\ i = 1, \dots, k, \tag{4}$$

тобто коли $i = j$, та

$$\sum_{t=i}^{k} A_{it} X_{tj} - \sum_{s=1}^{j} Y_{is} B_{sj} = C_{ij}, \quad i < j,\ i = 1, \dots, k-1,\ j = 2, \dots, k. \tag{5}$$

Якщо виконується умова 1) теореми, то згідно з теоремою Рота [12, 6] матричні рівняння (4) мають розв'язки:

$$X_{ii} = X_{ii}^{(0)},\ Y_{ii} = Y_{ii}^{(0)},\ i = 1, \dots, k. \tag{6}$$

Підставимо розв'язки (6) у матричні рівняння (5) і перепишемо їх так:

$$A_{ii}X_{ij} - Y_{ij}B_{jj} = C_{ij} - \sum_{t=i+1}^{k} A_{it}X_{tj}^{(0)} + \sum_{s=1}^{j-1} Y_{is}^{(0)}B_{sj}, \tag{7}$$

$i < j$, $i = 1,\ldots,k-1$, $j = 2,\ldots,k$. За виконання умови 2) теореми і, зважаючи на результат праці [10], матричні рівняння (7) мають розв'язки:

$$X_{ij} = X_{ij}^{(0)},\; Y_{ij} = Y_{ij}^{(0)},\; i < j,\; i = 1,\ldots,k-1,\; j = 2,\ldots,k. \tag{8}$$

Із розв'язків (3), (6) та (8) складемо розв'язок $X = \left\|X_{ij}^{(0)}\right\|_1^k$, $Y = \left\|Y_{ij}^{(0)}\right\|_1^k$ матричного рівняння (1), який матиме верхній блочно-трикутний вигляд, тобто $X, Y \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k, R)$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай у матричному рівнянні* (1) *коефіцієнти* A, B *і* $C \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k, R)$. *Якщо* $(\det A, \det B) = 1$, *то матричне рівняння* (1) *має розв'язок* $X, Y \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k, R)$.

Нагадаємо, що кожна неособлива матриця $A \in M(n, R)$ еквівалентна до нормальної форми Сміта S^A, тобто існують такі оборотні над R матриці U, V, що

$$S^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\ldots,\mu_n^A),$$

де $\mu_i^A \,|\, \mu_{i+1}^A$, $i = 1,\ldots,n-1$ та діагональні елемнти μ_i^A називають інваріантними множники матриці A.

Наслідок 2. *Нехай у матричному рівнянні* (1) *коефіцієнти* A, B *і* $C \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k, R)$. *Якщо матриці* $\left\|\begin{matrix} A_{ii} & C_{ii} \\ 0 & B_{ii}\end{matrix}\right\|$ та $\left\|\begin{matrix} A_{ii} & 0 \\ 0 & B_{ii}\end{matrix}\right\|$ *еквівалентні для усіх* $i = 1,\ldots,k$ *та останні інваріантні множники блоків* A_{ii} *матриці* A *та* $B_{i+j,i+j}$ *матриці* B *є взаємно прості, тоді матричне рівняння* (1) *має розв'язок* $X, Y \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k, R)$.

1. *Петричкович В. М.* Стандартні форми матриць над кільцями відносно різних типів еквівалентностей і їх застосування в теорії факторизації матриць і матричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – 62, № 4. – С. 7–27.
2. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць та їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2015. – 312 с.
3. *Dmytryshyn A., Kågström B.* Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2015. – 36, No. 2. – P. 580–593.
4. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – 27, No. 2. – P. 243–251.
5. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Notices. ISRN Algebra. – 2012. – Article ID 205478. – 14 pages. – http://dx.doi.org/10.5402/2012/205478.
6. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bul. Stand. – 1976. – 80B, No. 1. – P. 89–97.
7. *Futorny V., Klymchuk T., Sergeichuk V.* Roth's solvability criteria for the matrix equations $AX - \hat{X}B = C$ and $X - A\hat{X}B = C$ over the skew field of quaternions with an involutive automorphism $q \to \hat{q}^*$ // Linear Algebra Appl. – 2016. – 510. – P. 246–258.
8. *Gustafson W. H.* Roth's theorem over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1979. – 23. – P. 245–251.

9. *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory. – London: Springer, 2007. – 504 p.
10. *Newman M.* The Smith normal form of a partitioned matrices // J. Res. Natl. Bur. Stand. – 1974. – 78B, No. 1. – P. 3–6.
11. *Petrychkovych V., Dzhaliuk N.* Factorizations in the rings of the block matrices // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2017. – 85, No. 3. – P. 23–33.
12. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Am. Math. Soc. – 1952. – 3, No. 3. – P. 392–396. – https://doi.org/10.2307/2031890.

EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE SYLVESTER-TYPE MATRIX EQUATION IN THE RING OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

The conditions for the existence of a solution of the Sylvester-type matrix equation $AX - YB = C$ with block triangular coefficients A, B and C in the ring of block triangular matrices over a commutative principal ideal domain are established.

Key words: *Sylvester-type matrix equation, solution of matrix equation, block triangular matrix, ring of block triangular matrices.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів
[2] Нац. ун-т "Львівська політехніка", Львів

Одержано
25.10.21