

## АНАЛІЗ ДЕФОРМУВАННЯ НЕСКІНЧЕННОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ЗА РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНОГО ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*У межах узагальненої двопараметричної моделі проаналізовано деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії рівномірно розподіленого циклічного навантаження. Встановлено, що основні закономірності в'язкопружного деформування навантаженої поверхні шару такі ж, як і за дії зосередженої сили. Запропоновано формули, що значно пришвидшують обчислення вертикальних переміщень середини області навантаження.*

**Ключові слова:** нескінченний в'язкопружний шар, жорстка основа, узагальнена двопараметрична модель, циклічне навантаження, вертикальне переміщення.

**Вступ.** Циклічні навантаження часто зустрічаються у природі та в техніці. Тому важливо дослідити їх дію на непружні середовища та елементи конструкцій, коли з'являється запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію і виникають релаксація напружень, повзучість (течіння), незворотні залишкові деформації та гістерезисні втрати [1, 6, 10].

У монографії [3] подано результати теоретико-експериментальних досліджень накопичення незворотних залишкових деформацій у дорожньому асфальтобетоні за циклічних навантажень. При цьому асфальтобетон розглядають або як тверду рідину Максвелла [6], або як пружно-в'язко-пластичне середовище Богуславського. Праці [4, 11–14] присвячені дослідженню просідання (ступеня консолидації) ґрунтів в часі під дією нормального рівномірно розподіленого навантаження, що змінюється в часі за різними законами, у межах теорії одновимірної консолидації. При цьому в публікаціях [12–14] скелет ґрунту вважають пружним середовищем, а у [4, 11] враховують його в'язко-пластичні властивості. Зауважимо, що в працях [4, 11–14] використовують досить складні моделі двофазного середовища. Механічну поведінку нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії зосередженого циклічного навантаження на базі узагальненої двопараметричної моделі [9] вивчено у праці [8].

Нижче на основі досить простої узагальненої двопараметричної моделі [9] проаналізовано часові залежності вертикального переміщення середини області рівномірно розподіленого циклічного навантаження, що діє на нескінченний в'язкопружний шар, зчеплений з жорсткою основою, а також запропоновано формули, що значно пришвидшують табуляцію вертикальних переміщень.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо нескінченний в'язкопружний шар на жорсткій основі, що знаходиться під дією нормального рівномірно розподіленого на ділянці  $x \in [-a, a]$  циклічного навантаження виду

$$p(x, t) = p_0 H_-(a - |x|) \sum_{i=1}^N [H_+(t - t_i) - H_+(t - t_i - \tau_i)], \quad (1)$$

де  $p_0$  – амплітуда;  $N$  – кількість циклів;  $t_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ,  $t_1 = 0$ ) – моменти прикладання навантаження;  $\tau_i$  – час його дії;  $H_-(x)$  та  $H_+(t)$  – асиметричні функції Хевісайда. Матеріал шару описує модель Кельвіна–Фойгта. Задачу

---

✉ skorodynski@ukr.net

розглядаємо в межах узагальненої двопараметричної моделі [9] та плоскої деформації (рис. 1). Графік навантаження (1) зображено на рис. 2.

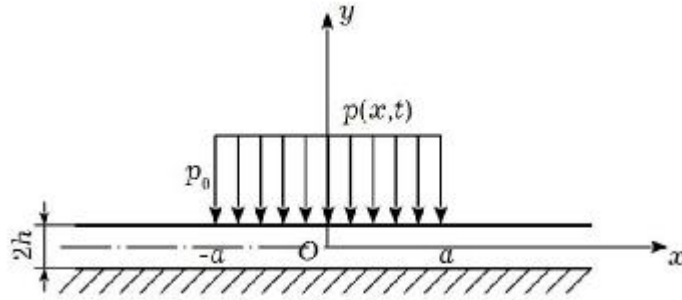


Рис. 1. Нескінченний в'язкопружний шар на жорсткій основі

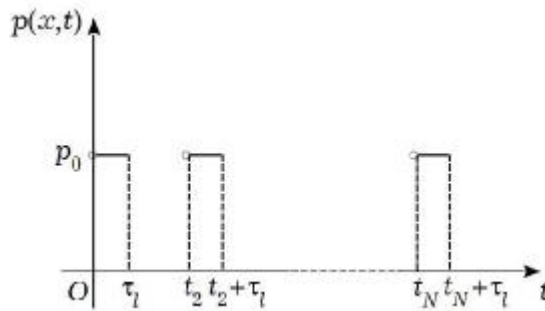


Рис. 2. Графік циклічного навантаження

Диференціальне рівняння для визначення вертикального переміщення  $v$  навантаженої поверхні в межах узагальненої двопараметричної моделі пружної основи [2, 5] разом з граничною та початковою умовами можна знайти у працях [7, 9].

При  $t_i = (i-1)T_c$  ( $i = \overline{1, N}$ ) функція (1) стає періодичною з періодом  $T_c$ . Формула (1) набуває вигляду

$$p(x, t) = p_0 H_-(a - |x|) \sum_{i=1}^N [H_+(t - (i-1)T_c) - H_+(t - (i-1)T_c - \tau_1)], \quad (2)$$

де  $T_c$  – період циклу.

2. **Вертикальне переміщення середини області навантаження.** Раніше [7, 9] подано загальний розв'язок задачі через функцію Гріна для довільного зовнішнього навантаження  $p(x, t)$ . Підставляючи у відповідну формулу вираз (1), для безрозмірного вертикального переміщення [7]  $v(0, t)$  отримаємо:

$$v(0, t) = -\frac{6}{\pi\lambda(1-\nu)} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \left[ \exp\left(\frac{\tau_1}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) - 1 \right] \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\pi(1 - e^{-\alpha})}{2\alpha^2} - \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)} \right\}, \quad t_i \leq t < t_i + \tau_1;$$

$$v(0, t) = -\frac{6}{\pi\lambda(1-\nu)} \sum_{j=1}^i \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \left[ \exp\left(\frac{\tau_1}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) - 1 \right] \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)},$$

$$t_i + \tau_i \leq t < t_{i+1} \quad (i = \overline{1, N}; \quad t_{N+1} \rightarrow \infty), \quad (3)$$

де  $\lambda = h/a$  – приведена товщина шару [7];  $\nu$  – рівноважний коефіцієнт Пуассона матеріалу шару;  $\tau_K$  – безрозмірний час запізнення елемента Кельвіна–Фойгта [7]. Величину  $\alpha$  визначаємо так:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2(1-\nu_0)}}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Зауважимо, що всі часові характеристики обезрозмірювали з допомогою одного характерного часу  $\tau_0$  [7].

Для короткотривалого навантаження ( $\tau_i \ll T_c$ )

$$\exp\left(\frac{\tau_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) - 1 \approx \frac{\tau_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2},$$

$$\exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \approx 1 - \frac{t-t_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}$$

і формули (3) спрощуються:

$$\begin{aligned} \nu(0, t) \approx & -\frac{3}{\tau_K(1-\nu)} \left[ \frac{2\tau_i}{\pi\lambda} \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\lambda^{-2} + u^2)} + \right. \\ & \left. + \lambda \left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}}\right) (t-t_i) \right], \quad t_i \leq t < t_i + \tau_i; \\ \nu(0, t) \approx & -\frac{6\tau_i}{\pi\lambda\tau_K(1-\nu)} \sum_{j=1}^i \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\lambda^{-2} + u^2)}, \quad t_i + \tau_i \leq t < t_{i+1} \\ & (i = \overline{1, N}; \quad t_{N+1} \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (4)$$

За періодичного навантаження (2) з формул (3) випливають подання

$$\begin{aligned} \nu(0, t) = & -\frac{6}{\pi\lambda(1-\nu)} \left[ \frac{\pi(1-e^{-\alpha})}{2\alpha^2} - \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)} \right] \\ & (0 \leq t < \tau_i), \\ \nu(0, t) = & -\frac{6}{\pi\lambda(1-\nu)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \left[ \exp\left(\frac{\tau_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) - 1 \right] \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)} \\ & (\tau_i \leq t < T_c); \\ \nu(0, t) = & \nu(0, t - T_c) - \\ & -\frac{6}{\pi\lambda(1-\nu)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \left[ \exp\left(\frac{\tau_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) - 1 \right] \frac{\sin udu}{u(\alpha^2 + u^2)} \\ & (t \geq T_c). \end{aligned} \quad (5)$$

Для наближених формул з (4) маємо:

$$\nu(0, t) \approx -\frac{3}{\tau_K(1-\nu)} \begin{cases} \lambda \left(1 - e^{-\frac{1}{\lambda}}\right) t & (0 \leq t < \tau_i) \\ \frac{2\tau_i}{\pi\lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\lambda^{-2} + u^2)} & (\tau_i \leq t < T_c), \end{cases}$$

$$v(0, t) \approx v(0, t - T_c) - \frac{6\tau_l}{\pi\lambda\tau_K(1-\nu)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{\lambda^{-2} + u^2}\right) \frac{\sin udu}{u(\lambda^{-2} + u^2)} \quad (t \geq T_c). \quad (6)$$

Користуючись співвідношеннями (5), (6), можна значно пришвидшити табуляцію вертикальних переміщень під час побудови графіків.

На рис. 3 наведено часові залежності вертикальних переміщень середини області навантаження для трьох матеріалів та трьох значень приведеної товщини шару за періодичного навантаження (2), отримані з допомогою формул (5), (6). В'язкопружні характеристики матеріалу, що відповідає рис. 3а, такі:  $E = 570$  МПа;  $\nu = 0.12$ ;  $\eta = 5$  ГПа·с;  $\tau_K = 19.65$  с ( $E$  – рівноважний модуль пружності;  $\eta$ ,  $\tau_K$  – в'язкість і час запізнення елемента Кельвіна–Фойгта). Найжорсткіший матеріал, що відповідає рис. 3б, відрізняється від попереднього тільки в'язкістю:  $\eta = 22$  ГПа·с;  $\tau_K = 86.46$  с. Найподатливішому матеріалу (рис. 3в) притаманні такі в'язкопружні характеристики:  $E = 300$  МПа;  $\nu = 0.2$ ;  $\eta = 600$  МПа·с;  $\tau_K = 4.8$  с. У всіх трьох випадках період циклу  $T_c = 5$  с; час навантаження  $\tau_l = 0.3$  с; характерний час  $\tau_0 = 10$  с. Графіки 1 відповідають значенню приведеної товщини шару  $\lambda = 0.1$ , графіки 2 –  $\lambda = 0.5$ , а графіки 3 –  $\lambda = 1$ . Суцільні лінії на рис. 3 відповідають точним формулам (3), (5), а штрихпунктирні – наближеним формулам (4), (6). Для обезрозмірювання вертикального переміщення навантаженої поверхні використовували пружні характеристики матеріалів, що відповідають рис. 3а,б.

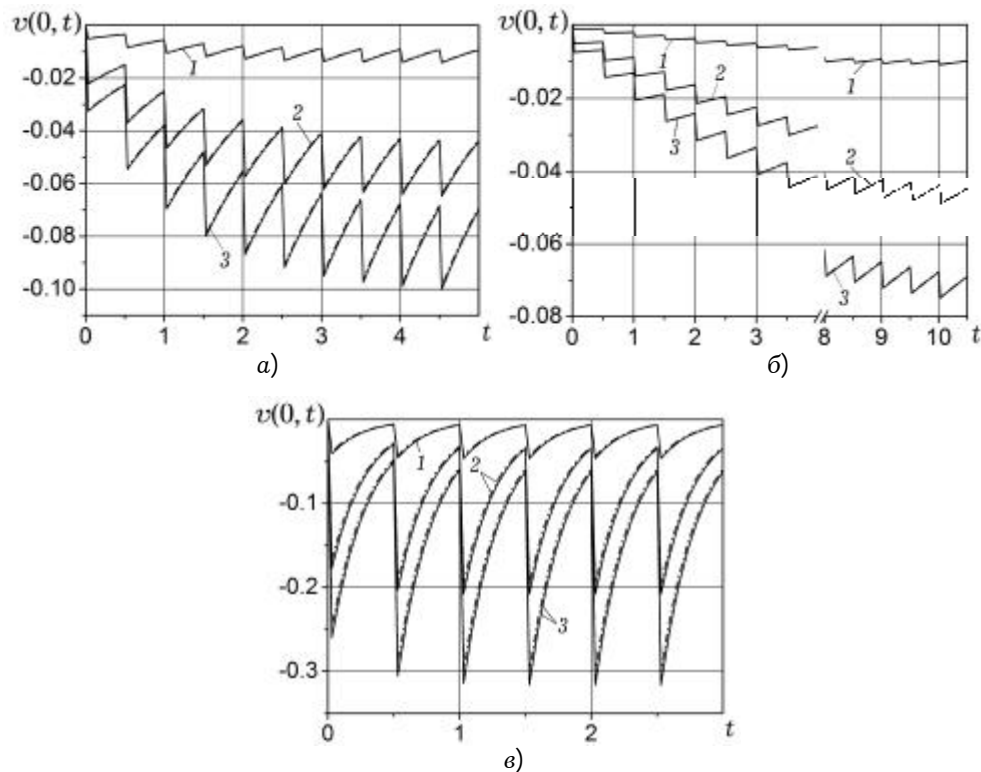


Рис. 3. Вертикальні переміщення середини області навантаження

Основні закономірності в'язкопружного деформування навантаженої поверхні шару за рівномірно розподіленого циклічного навантаження такі ж, як і за дії зосередженої сили [8]. Зокрема, в кожному циклі переміщення

навантаженої поверхні зростає зі скінченною швидкістю, поки діє зовнішній чинник, до максимального за модулем значення, яке досягається в момент закінчення дії навантаження. Далі здеформована поверхня намагається відновити свою форму з тим більшою швидкістю, що менший час запізнення  $\tau_K$  (рис. 3). За циклічного навантаження завжди є ненульові залишкові деформації (переміщення). Через природу тіла Кельвіна–Фойгта ці деформації завжди скінченні і за періодичного навантаження (2) мають певну границю. Максимальні за модулем вертикальні переміщення тим більші, що більший час  $\tau_l$ . На відміну від статичного [7, 9], за циклічного навантаження вертикальні переміщення навантаженої поверхні залежать не тільки від модуля пружності матеріалу шару, а й від його в'язкості (часу запізнення  $\tau_K$ ), що добре видно з рис. 3а,б. Швидкість вертикального переміщення та його коливання за період  $T_c$  є тим більшими, що податливіший матеріал шару (рис. 3). До цього слід додати монотонно зростаючу залежність абсолютних значень переміщень, швидкостей, коливань переміщень за період циклу та коливань на всьому проміжку  $[0, NT_c]$  від приведеної товщини шару (параметра  $\lambda$ ).

Зазначимо, що, використовуючи наближені формули (4), (6), можна суттєво пришвидшити розрахунки. Відносна максимальна похибка досягається для найподатливішого матеріалу (рис. 3в) при  $\lambda = 0.1$  в останньому циклі в момент зняття навантаження і становить 6%.

Співвідношення (5), (6) дають приблизно 60-кратний вииграш у часі порівняно з формулами (3), (4) за обчислень  $10^{-8}$ .

**Висновки.** Таким чином, у межах узагальненої моделі, що враховує деформацію поперечного зсуву, отримано та проаналізовано точні й наближені часові залежності вертикального переміщення середини області нормального рівномірно розподіленого циклічного (періодичного) навантаження, що діє на в'язкопружний шар, зчеплений з жорсткою основою. Встановлено, що основні закономірності в'язкопружного деформування навантаженої поверхні шару за рівномірно розподіленого періодичного навантаження такі ж, як і за дії зосередженої сили. Крім цього, виявлено монотонно зростаючу залежність абсолютних значень переміщень та швидкостей від приведеної товщини шару. Наближені формули (4), (6) суттєво пришвидшують обчислення. Відносна максимальна похибка при цьому становить 6%. Співвідношення (5), (6) дають можливість скоротити час розрахунку приблизно у 60 раз порівняно з (3), (4) за обчислень  $10^{-8}$ .

1. *Виноградов Г. В., Малкин А. Я.* Реология полимеров – Москва: Химия, 1977. – 440 с.
2. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 492 с.
3. *Дорожный асфальтобетон / Л. Б. Гезенцевей, Н. В. Горельшев, А. М. Богуславский, И. В. Королев / Под ред. Л. Б. Гезенцева.* – Москва: Транспорт, 1985. – 350 с.
4. *К вопросу адекватного определения деформационных и реологических характеристик водонасыщенного глинистого грунта при циклической нагрузке / В. В. Крысан, Е. И. Нестерова, Е. С. Причина, В. И. Марченко // Перспективи розвитку будівельних технологій: Матер. 7-ої міжнар. наук.-практ. конф. молодих учених, аспірантів і студентів (Дніпропетровськ, 18–19 квітня 2013 р.).* – Дніпропетровськ: Нац. гірничий ун-т, 2013. – С. 120–124.
5. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – Москва; Ленинград: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.
6. *Рейнер М.* Деформация и течение. – Москва: Гос. науч.-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной лит., 1963. – 382 с.

7. Скородинський І. С., Максимук А. В. Действие нормальной распределенной нагрузки на вязкоупругий слой, сцепленный с жестким основанием // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 6(52). – С. 15–24.
8. Скородинський І. С., Максимук О. В. Напружений стан в'язкопружного шару на жорсткій основі під дією зосередженого циклічного навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – № 1. – С. 82–88.  
 Те саме: Skorodyns'kyi I. S. and Maksymuk O. V. Stressed state of a viscoelastic layer on the rigid foundation under the action of concentrated cyclic loads // Mater. Sci. – 2020. – 56, No. 1. – P. 82–89.  
<https://doi.org/10.1007/s11003-020-00400-6>
9. Скородинський І. С., Максимук О. В. Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує деформацію поперечного зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 62–70.  
 Те саме: Skorodyns'kyi I. S. and Maksymuk O. V. A generalized model of viscoelastic interlayer or coating taking into account its transverse shear deformation // J. Math. Sci. – 2014. – 201, No. 1. – P. 72–82.  
<https://doi.org/10.1007/s10958-014-1974-0>
10. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров – М.: Иностран. лит., 1963. – 536 с.
11. Шаповал А. В., Марченко В. И. Определение деформационных и реологических характеристик водонасыщенного глинистого грунта // Комунальне господарство міст. – Харків: ХНАМГ, 2012. – Вып. 105. – С. 242–250.
12. Yazdani H. and Toufigh M. M. Nonlinear consolidation of soft clays subjected to cyclic loading – Part I: Theory // Geomechanics and Eng. – 2012. – 4, No. 4. – P. 229–241.
13. Yazdani H. and Toufigh M. M. Nonlinear consolidation of soft clays subjected to cyclic loading – Part II: Verification and application // Geomechanics and Eng. – 2012. – 4, No. 4. – P. 243–249.
14. Zhuang Y. Ch. and Xie K. H. Study on one-dimensional consolidation of soil under cyclic loading and with varied compressibility // J. Zhejiang Univ. SCI. – 2005. – 6A, No. 2. – P. 141–147.

#### DEFORMATION ANALYSIS OF AN INFINITE VISCOELASTIC LAYER ON THE RIGID FOUNDATION AT UNIFORMLY DISTRIBUTED CYCLIC LOAD

*The deformation of an infinite viscoelastic layer on a rigid foundation under the action of uniformly distributed cyclic load is analyzed within the framework of a generalized two-parameter model. It is established that the main regularities of viscoelastic deformation of the loaded surface of the layer are the same as under the action of a concentrated force. Formulae that significantly speed up the computation of vertical displacements in the middle of the loading region are proposed.*

*Key words:* infinite viscoelastic layer, rigid foundation, generalized two-parameter model, cyclic load, vertical displacement.