

**ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ СИЛЬНОГО  
РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРО –  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З  
ІНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА (ІДРВЗІС)**

©2008 р. *Ігор МАЛИК*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,  
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 15 жовтня 2008 р.

Досліджено існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного інтегро-диференціального рівняння Вольтерри з інтегралом Скорохода.

## 1 Вступ

В даній роботі розглядається стохастичне інтегро – диференціальне рівнянь Вольтерри з інтегралом Скорохода (1.1) з початковою умовою (1.2). Для даної задачі Коші ставиться питання про існування та єдність  $l$ -го моменту сильного розв'язку при  $l > 1$ . Даному питанню присвячено багато праць, але в більшості випадків, по-перше, розглядається дана задача не випадкового характеру, тобто при відсутності інтегралів Вінера та Скорохода [3, 4, 6]. По-друге, при розгляді навіть стохастичних систем увага приділяється стійкості в середньому квадратичному, тобто при  $l = 2$  [1, 2]. По-третє, наявність доданків Вольтерри зумовлює додаткові ускладнення.

## 2 Постановка задачі. Основні означення і позначення

Нехай на імовірнісному базисі  $(\Omega, F, P, \mathbb{F})$ , де  $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$  - фільтрація, задано для  $t \in [0, T]$  випадковий процес,  $x(t) = x(t, \omega) \in R^n$  як сильний розв'язок рівняння з простору  $X = R^n \times S_{[-h, 0]}$

$$\begin{aligned}
 dD(t, x_t) = & [a_1(t, u, x_t) + \int_0^t a_2(s, u, x_s) ds + \\
 & + \int_0^t a_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} a_4(s, u, x_s, z_1) \times \\
 & \times \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dt + [b_1(t, u, x_t) + \int_0^t b_2(s, u, x_s) ds + \\
 & + \int_0^t b_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} b_4(s, u, x_s, z_1) \times \\
 & \times \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dW_2(t) + \int_{Z_2} [c_1(t, u, x_t, z_2) + \\
 & + \int_0^t c_2(s, u, x_s, z_2) ds + \\
 & + \int_0^t c_3(s, u, x_s, z_2) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} c_4(s, u, x_s, z_1, z_2) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] \tilde{v}_2(dt, dz_2)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.1) з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

де  $x_t = \{x(t + \theta), -h \leq \theta \leq 0\}$  - відрізок розв'язку,  $h > 0$ ;  $D(t, x_t) = x(t) - \Phi(t, x_t)$ ,  $\varphi \in S_{[-h, 0]}$ ,  $S_{[-h, 0]}$  - простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (зауважимо, що функціонал  $\Phi(t, x_t)$  не залежить від  $x(t)$  [1, 2, 5]);  $\Phi : (0, T] \times S_{[-h, 0]} \rightarrow R^n$ ,  $a_1, b_1 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \rightarrow R^n$ ,  $a_2, a_3, b_2, b_3 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \rightarrow R^n$ ,  $a_4, b_4 : (0, T] \times (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_1 \rightarrow R^n$ ,  $c_1, c_2, c_3 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_2 \rightarrow R^n$ ,  $c_4 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_1 \times Z_2 \rightarrow R^n$  - обмежені та неперервні за сукупністю змінних функціонали,  $\{Z_1, Z_2\}$  - борелеві множини з  $R^1$ ,  $\varphi \in S_{[-h, 0]}$ .

**Означення 1.1.** Стохастичний процес  $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in [-h, T]\}$  називається *сильним розв'язком* рівняння (1.1), якщо  $x(t)$  прогресивно вимірний [1] відносно  $F_t$  при  $t \leq T$ , відрізки траєкторій процесу  $x^t \in X$  при  $t \in [t_0, T]$ ,  $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$  м.н. і (1.1) виконується з ймовірністю 1 для всіх  $t \in [t_0, T]$  одночасно.

Якщо два сильні розв'язки майже напевне рівні, то вони називаються стохастично еквівалентними. Будемо говорити, що рівняння (1.1) має сильний розв'язок при початковій умові (1.2), якщо всі розв'язки (1.1) стохастично еквівалентні.

Норму в просторі  $X$  введемо наступним чином[4, 6]

$$\|\varphi\| \equiv \|\varphi\|_X^p \equiv (|\varphi(0)|^p + \int_{-h}^0 |\varphi(s)|^p \rho(s) ds)^{1/p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p)^{1/p}, \quad (1.3)$$

де

$$\|\varphi\|_\rho^p = \int_{-h}^0 |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Зауважимо, що в (1.3) функція  $\rho$  — це функція, яка має такі властивості [3]:

1.  $\rho$  - сумовна  $[-h, 0]$  ;
2.  $0 < K_1 < |\rho(s)| < K_2 < \infty, s \in [-h, 0]$  ;
3.  $\rho > 0$  - строго додатна на  $[-h, 0]$  ;

При доведенні теореми існування та єдиності сильного розв'язку будемо використовувати нерівності Букхольдера[2]: для довільного  $l > 1$  існують такі сталі  $K_1, K_2$ , що

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^t \psi_1(s) dW(s) \right|^l \leq K_1 \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t |\psi_1(s)|^2 ds \right)^{l/2};$$

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^t \int_{\Theta} \psi_2(\theta, s) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|^l \leq K_2 \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t \int_{\Theta} |\psi_2(\theta, s)|^2 \Pi(d\theta) ds \right)^{l/2};$$

для будь-яких  $F_t$  - узгоджених процесів  $\psi_1(t, \omega)$  і  $\psi_2(\theta, t, \omega)$  , таких, що

$$\int_0^T \psi_1^2(t) dt < \infty; \quad \int_0^T \int_{\Theta} \psi_2^2(\theta, t) \Pi(d\theta) dt < \infty$$

майже напевне.

### 3 Основний результат

**Теорема 1.1.** *Нехай коефіцієнти рівняння (1.1) задовольняють такі умови:*

1. *Функціонали  $a_i, b_i, c_i$ ,  $i = \{1, 2, 3, 4\}$  вимірні за сукупністю змінних;*
2. *Виконуються умови обмеженого росту коефіцієнтів рівномірно по  $t \in [0, T]$  :*

$$\begin{aligned} |a_1(t, u, \psi)| + |a_2(t, u, \psi)| + |a_3(t, u, \psi)| + \int_{Z_1} |a_4(t, u, \psi, z_1)| dz_1 &\leq \\ &\leq L(1 + \|\psi\|); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b_1(t, u, \psi)| + |b_2(t, u, \psi)| + |b_3(t, u, \psi)| + \int_{Z_1} |b_4(t, u, \psi, z_1)| dz_1 &\leq \\ &\leq L(1 + \|\psi\|); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{Z_2} (|c_1(t, u, \psi, z_2)| + |c_2(t, u, \psi, z_2)| + |c_3(t, u, \psi, z_2)| + \\ + \int_{Z_1} |c_4(t, u, \psi, z_1, z_2)| \Pi_1(dz_1) \Pi_2(dz_2) &\leq L(1 + \|\psi\|); \end{aligned}$$

$$|\Phi(t, \psi)| \leq L(1 + \|\psi\|).$$

3. *Виконуються умови Ліпшиця для коефіцієнтів, тобто для  $\forall \varphi, \psi \in S_{[-h, 0]}$  виконується умова:*

$$\begin{aligned} |a_1(t, u, \psi) - a_1(t, u, \varphi)| + |a_2(t, u, \psi) - a_2(t, u, \varphi)| + \\ + |a_3(t, u, \psi) - a_3(t, u, \varphi)| + \int_{Z_1} |a_4(t, u, \psi, z_1) - a_4(t, u, \varphi, z_1)| dz_1 &\leq L\|\psi - \varphi\|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |b_1(t, u, \psi) - b_1(t, u, \varphi)| + |b_2(t, u, \psi) - b_2(t, u, \varphi)| + \\ + |b_3(t, u, \psi) - b_3(t, u, \varphi)| + \int_{Z_1} |b_4(t, u, \psi, z_1) - b_4(t, u, \varphi, z_1)| dz_1 &\leq L\|\psi - \varphi\|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{Z_2} (|c_1(t, u, \psi, z_2) - c_1(t, u, \varphi, z_2)| + |c_2(t, u, \psi, z_2) - c_2(t, u, \varphi, z_2)| + \\
 & \quad + |c_3(t, u, \psi, z_2) - c_3(t, u, \varphi, z_2)| + \\
 & + \int_{Z_1} |c_4(t, u, \psi, z_1, z_2) - c_4(t, u, \varphi, z_1, z_2)| \Pi_1(dz_1) \Pi_2(dz_2) \leq \\
 & \leq L \|\psi - \varphi\|;
 \end{aligned}$$

$$|\Phi(t, u, \psi) - \Phi(t, u, \varphi)| \leq L \|\psi - \varphi\|$$

4. Початкова умова (1.2) задовольняє наступну умову

$$\mathbf{E} \|\varphi\|_X^l < \infty, l > 1.$$

Тоді

1. Існує єдиний сильний розв'язок  $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$  з простору Ско-рохода рівняння (1.1) такий, що

$$x_0 = \varphi;$$

2. Для  $\forall t \in [t_0, T]$  і  $l > 1$  існує  $l$ -ий момент розв'язку (1.1)

$$\mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |x(t)|^l < \infty.$$

**Доведення існування.** Для доведення існування розв'язку дано-го рівняння скористаємося методом послідовних наближень. Визначимо наближення розв'язку задачі (1.1), (1.2) наступним чином:

$$x^0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -h \leq t \leq 0, \\ \varphi(0), & t > 0. \end{cases}.$$

$$x^n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -h \leq t \leq 0, \\ \Phi(t, x_t^{n-1}) + x(0) - \Phi(0, x_0^{n-1}) + R(t, x^{n-1}), & t > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

де випадковий процес  $R(t, x)$  описаний нижче.

Для спрощення деяких викладок введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}
R(\tilde{t}, x) = & \int_0^{\tilde{t}} [a_1(t, u, x_t) + \int_0^t a_2(s, u, x_s) ds + \int_0^t a_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \\
& + \int_0^t \int_{Z_1} a_4(s, u, x_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dt + \int_0^{\tilde{t}} [b_1(t, u, x_t) + \int_0^t b_2(s, u, x_s) ds + \\
& + \int_0^t b_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} b_4(s, u, x_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dW_2(\tilde{t}) + \\
& + \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} [c_1(t, u, x_t, z_2) + \int_0^t c_2(s, u, x_s, z_2) ds + \\
& + \int_0^t c_3(s, u, x_s, z_2) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} c_4(s, u, x_s, z_1, z_2) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] \tilde{v}_2(dt, dz_2)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Тобто запис (1.1) можна подати у вигляді

$$D(t, x_t) - D(0, x_0) = R(t, x). \tag{1.6}$$

або використовуючи означення функціонала  $D(t, x_t)$  отримаємо

$$x(t) = \Phi(t, x_t) + x(0) - \Phi(0, x_0) + R(t, x).$$

Введемо наближення для розв'язку рівняння (1.1)

$$x^0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h, 0], \\ \varphi(0), & t \in (0, T]. \end{cases}$$

$$x^n(t) = \Phi(t, x_t^{n-1}) + x^{n-1}(0) - \Phi(0, x_0^{n-1}) + R(t, x^{n-1}), \quad n \geq 1 \tag{1.7}$$

За умови 2. теореми можна стверджувати, що  $x^n$  - є вимірною функцією відносно потоку  $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$  та не має розривів другого роду.

Спочатку покажемо за індукцією, що

$$\mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |x^n(t)|^l < \infty \tag{1.8}$$

Для  $n=0$  нерівність (1.8) є безпосереднім наслідком пункту 4 теореми. Нехай  $n \geq 1$ . Доведемо нерівність (1.8) для цього випадку:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |x^n(t)|^l &= \mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1}) + x^{n-1}(0) - \Phi(0, x_0^{n-1}) + R(t, x^{n-1})|^l \leq \\
 &\leq K(\mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1})|^l + \mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |x^{n-1}(0)|^l + \mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |\Phi(0, x_0^{n-1})|^l + \\
 &\quad + \mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |R(t, x^{n-1})|^l). \tag{1.9}
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що другий і третій доданок нерівності (1.9) є обмеженими в силу пункту 4 теореми. Доведемо, що доданки 1 та 4 є також обмеженими.

Для цього припустимо, що виконується нерівність (1.8) для  $n - 1$ . Тоді для доданку 1 обмеженість має місце в силу обмеженості та неперервності функціонала  $\Phi(t, x_t)$ . Аналогічно в силу обмеженості та неперервності функціоналів  $a_1, b_1 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \rightarrow R^n$ ,  $a_2, a_3, b_2, b_3 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \rightarrow R^n$ ,  $a_4, b_4 : (0, T] \times (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_1 \rightarrow R^n$ ,  $c_1, c_2, c_3 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_2 \rightarrow R^n$ ,  $c_4 : (0, T] \times U \times S_{[-h, 0]} \times Z_1 \times Z_2 \rightarrow R^n$  отримуємо обмеженість четвертого доданку нерівності (1.9). обмеженість наближень розв'язку рівняння (1.1) доведена, тобто маємо нерівність

$$\mathbf{E} \sup_{0 < t \leq T} |x^n(t)|^l \leq K(n) \leq K \tag{1.10}$$

Розглянемо оцінки зверху для різниць  $E|x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l$ . Для даної оцінки використаємо наступну твердження:

**Лема 1.1.** *Нехай функціонали  $a_i, b_i, c_i$  задовольняють умовам теореми 1.1. Тоді для  $\forall l > 1$  виконується нерівність*

$$E|R(\tilde{t}, x) - R(\tilde{t}, y)|^l \leq L_1 \int_0^T E\|x - y\|^l dt + L_2 \left( \int_0^T E\|x - y\|^2 dt \right)^{\frac{l}{2}} \tag{1.11}$$

**Доведення.** Розглянемо  $E|R(t, x) - R(t, y)|^l$ :

$$\begin{aligned}
 E|R(\tilde{t}, x) - R(\tilde{t}, y)|^l &= E \left| \int_0^{\tilde{t}} [a_1(t, u, x_t) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t a_2(s, u, x_s) ds + \int_0^t a_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{Z_1} a_4(s, u, x_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dt + \int_0^{\tilde{t}} [b_1(t, u, x_t) + \int_0^t b_2(s, u, x_s) ds + \\
& + \int_0^t b_3(s, u, x_s) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} b_4(s, u, x_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dW_2(t) + \\
& + \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} [c_1(t, u, x_t, z_2) + \int_0^t c_2(s, u, x_s, z_2) ds + \\
& + \int_0^t c_3(s, u, x_s, z_2) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} c_4(s, u, x_s, z_1, z_2) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] \tilde{v}_2(dt, dz_2) - \\
& - \int_0^{\tilde{t}} [a_1(t, u, y_t) + \int_0^t a_2(s, u, y_s) ds + \int_0^t a_3(s, u, y_s) dW_1(s) + \\
& + \int_0^t \int_{Z_1} a_4(s, u, y_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dt - \int_0^{\tilde{t}} [b_1(t, u, y_t) + \int_0^t b_2(s, u, y_s) ds + \\
& + \int_0^t b_3(s, u, y_s) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} b_4(s, u, y_s, z_1) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] dW_2(t) - \\
& - \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} [c_1(t, u, y_t, z_2) + \int_0^t c_2(s, u, y_s, z_2) ds + \\
& + \int_0^t c_3(s, u, x_s, z_2) dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} c_4(s, u, x_s, z_1, z_2) \tilde{v}_1(ds, dz_1)] \tilde{v}_2(dt, dz_2) | \leq \\
& \leq K_1 (E | \int_0^{\tilde{t}} (a_1(t, u, x_t) - a_1(t, u, y_t)) dt |^l + \\
& + E | \int_0^{\tilde{t}} \int_0^t (a_2(s, u, x_s) - a_2(s, u, y_s)) ds dt |^l +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_0^t(a_3(s,u,x_s)-a_3(s,u,y_s))dW_1(s)dt\right|^l+ \\
 & +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_0^t\int_{Z_1}(a_4(s,u,x_s,z_1)-a_4(s,u,y_s,z_1))\tilde{v}_1(ds,dz_1)dt\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}(b_1(t,u,x_t)-b_1(t,u,y_t))dW_2(t)\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_0^t(b_2(s,u,x_s)-b_2(s,u,y_s))dsdW_2(t)\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_0^t(b_3(s,u,x_s)-b_3(s,u,y_s))dW_1(s)dW_2(t)\right|^l+ \\
 & +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_0^t\int_{Z_1}(b_4(s,u,x_s,z_1)-b_4(s,u,y_s,z_1))\tilde{v}_1(ds,dz_1)dW_2(t)\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_{Z_2}(c_1(t,u,x_t,z_2)-c_1(t,u,y_t,z_2))\tilde{v}_2(dt,dz_2)\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t(c_2(s,u,x_s,z_2)-c_2(s,u,y_s,z_2))\tilde{v}_2(dt,dz_2)ds\right|^l+ \\
 & +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t(c_3(s,u,x_s,z_2)-c_3(s,u,y_s,z_2))\tilde{v}_2(dt,dz_2)dW_1(s)\right|^l+ \\
 & \quad +E\left|\int_0^{\tilde{t}}\int_{Z_2}\int_0^t\int_{Z_1}(c_4(s,u,x_s,z_1,z_2)-\right. \\
 & \quad \left.-c_4(s,u,y_s,z_1,z_2))\tilde{v}_1(ds,dz_1)\tilde{v}_2(dt,dz_2)\right|^l \tag{1.12}
 \end{aligned}$$

Для нерівності (1.12) використаємо нерівності Букхольдера і отримаємо наступний результат

$$E|R(\tilde{t},x)-R(\tilde{t},y)|^l \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_2(\tilde{t}^{l-1} \int_0^{\tilde{t}} E|a_1(t, u, x_t) - a_1(t, u, y_t)|^l dt + \\
&+ \tilde{t}^{l-1} \int_0^{\tilde{t}} t^{l-1} \int_0^t E|a_2(s, u, x_s) - a_2(s, u, y_s)|^l ds dt \\
&+ \tilde{t}^{l-1} \int_0^{\tilde{t}} (\int_0^t E|a_3(s, u, x_s) - a_3(s, u, y_s)|^2 ds)^{\frac{l}{2}} dt + \\
&+ \tilde{t}^{l-1} \int_0^{\tilde{t}} (\int_0^t \int_{Z_1} E|a_4(s, u, x_s, z_1) - a_4(s, u, y_s, z_1)|^2 \Pi_1(dz_1) ds)^{\frac{l}{2}} dt + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} E|b_1(t, u, x_t) - b_1(t, u, y_t)|^2 dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_0^t E|b_2(s, u, x_s) - b_2(s, u, y_s)|^2 ds dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_0^t E|b_3(s, u, x_s) - b_3(s, u, y_s)|^2 ds dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_0^t \int_{Z_1} E|b_4(s, u, x_s, z_1) - b_4(s, u, y_s, z_1)|^2 \Pi_1(dz_1) ds dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} E|c_1(t, u, x_t, z_2) - c_1(t, u, y_t, z_2)|^2 \Pi_2(dz_2) dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} t \int_{Z_2} \int_0^t E|c_2(s, u, x_s, z_2) - c_2(s, u, y_s, z_2)|^2 ds \Pi_2(dz_2) dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} \int_0^t E|c_3(s, u, x_s, z_2) - c_3(s, u, y_s, z_2)|^2 ds \Pi_2(dz_2) dt)^{\frac{l}{2}} + \\
&\quad + (\int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} \int_0^t \int_{Z_1} E|c_4(s, u, x_s, z_1, z_2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -c_4(s, u, y_s, z_1, z_2)|^2 ds \Pi_1(dz_1) dt \Pi_2(dz_2))^{1/2} \leq \\
 \leq & K_3 \left( \int_0^{\tilde{t}} E \|x - y\|^l dt + \int_0^{\tilde{t}} \int_0^t E \|x - y\|^l ds dt + \int_0^{\tilde{t}} \left( \int_0^t E \|x - y\|^2 ds \right)^{1/2} dt + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^{\tilde{t}} \left( \int_0^t \int_{Z_1} E \|x - y\|^2 \Pi_1(dz_1) ds \right)^{1/2} dt + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \int_0^{\tilde{t}} E \|x - y\|^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_0^t E \|x - y\|^2 ds dt \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_0^t E \|x - y\|^2 ds dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_0^t \int_{Z_1} E \|x - y\|^2 \Pi_1(dz_1) ds dt \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} E \|x - y\|^2 \Pi_2(dz_2) dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} \int_0^t E \|x - y\|^2 ds \Pi_2(dz_2) dt \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} \int_0^t E \|x - y\|^2 ds \Pi_2(dz_2) dt \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \int_0^{\tilde{t}} \int_{Z_2} \int_0^t \int_{Z_1} E \|x - y\|^2 ds \Pi_1(dz_1) dt \Pi_2(dz_2) \right)^{1/2} \right) \leq \\
 \leq & K_4 \int_0^T E \|x - y\|^l dt + K_5 \left( \int_0^T E \|x - y\|^2 dt \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

де  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  - обмеженні константи, залежні тільки від  $l$  і  $\rho$ .

Тобто, отримали нерівність

$$E |R(\tilde{t}, x) - R(\tilde{t}, y)|^l \leq K_4 \int_0^T E \|x - y\|^l dt + K_5 \left( \int_0^T E \|x - y\|^2 dt \right)^{1/2}$$

або

$$E \sup_{0 \leq \tilde{t} \leq T} |R(\tilde{t}, x) - R(\tilde{t}, y)| \leq K_4 \int_0^T E \|x - y\|^l dt + K_5 \left( \int_0^T E \|x - y\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Лема 1.1. доведена.

Продовжимо доведення існування розв'язку рівняння (1.1). Для цього розглянемо різницю

$$\begin{aligned}
& E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l = \\
& = E \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1}) + x(0) - \\
& - \Phi(0, x_0^{n-1}) + R(t, x^{n-1}) - \Phi(t, x_t^{n-2}) + x(0) - \Phi(0, x_0^{n-2}) + R(t, x^{n-2})|^l = \\
& = E \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1}) + R(t, x^{n-1}) - \Phi(t, x_t^{n-2}) - R(t, x^{n-2})|^l \leq \\
& \leq K_6 E \sup_{0 \leq t \leq T} |R(t, x^{n-1}) - R(t, x^{n-2})| + K_6 E \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1}) - \Phi(t, x_t^{n-2})| \\
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Оцінимо другий доданок нерівності (1.13):

$$\begin{aligned}
& E \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t, x_t^{n-1}) - \Phi(t, x_t^{n-2})|^l \leq LE \sup_{0 \leq t \leq T} \|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^l \leq \\
& \leq L \int_0^T E \|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^l dt.
\end{aligned}$$

Тобто нерівність (1.13) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned}
& E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l \leq K_7 \int_0^T E \|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^l dt + \\
& + K_5 \left( \int_0^T E \|x_t^{n-1} - x_t^{n-2}\|^2 dt \right)^{\frac{l}{2}}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Для подальшого доведення нам буде потрібна оцінка

$$\begin{aligned}
& E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^1(t) - x^0(t)|^l \leq \\
& = E \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(t, x_t^0) + x(0) - \Phi(0, x_0^0) + R(t, x^0) - x_t^0|^l = \\
& = E \sup_{0 \leq t \leq T} |R(t, x^0)|^l \leq L(1 + \|x^0\|) = K_8.
\end{aligned}$$

Для  $n = 2$  отримаємо оцінку

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^2(t) - x^1(t)|^l \leq K_7 \int_0^T E \|x_t^1 - x_t^0\|^l dt + \\ + K_5 \left( \int_0^T E \|x_t^1 - x_t^0\|^2 dt \right)^{\frac{l}{2}} \leq K(T + T^{\frac{l}{2}}). \quad (1.5)$$

Загальний вигляд оцінки (1.15) має вигляд

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l \leq K(T + T^{\frac{l}{2}})^{n-1}.$$

Для подальшого розгляду нам потрібно розглянути випадок, коли  $T + T^{\frac{l}{2}} = q < 1$ . Тоді розглянемо  $x^n$  у вигляді суми

$$x^n(t) = \sum_{k=1}^n (x^k(t) - x^{k-1}(t)) + x^0(t) \quad (1.16)$$

Доведемо, що границя  $x^n$  є розв'язком рівняння (1.1). Для цього потрібно показати збіжність суми в правій частині рівності (1.16). Використовуючи нерівність Чебишова, отримуємо

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l < \frac{1}{n^2} \right\} \leq \\ \leq E \sup_{0 \leq t \leq T} |x^n(t) - x^{n-1}(t)|^l n^{2l} \leq K n^{2l} (T + T^{\frac{l}{2}}).$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} K n^{2l} (T + T^{\frac{l}{2}})^{n-1} \quad (1.17)$$

Він є збіжним тоді, коли  $T + T^{\frac{l}{2}} = q < 1$ . Тому за лемою Бореля – Кантеллі отримуємо факт, що існує рівномірна збіжність майже напевне на  $[0, T]$  суми  $x^n(t) = \sum_{k=1}^n (x^k(t) - x^{k-1}(t)) + x^0(t)$ . Тому границя  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$  існує на  $[0, T]$  з простору Скорохода  $S_{[0, T]}$ .

Покажемо, що  $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$  - розв'язок рівняння (1.1). Для цього використаємо подання (1.7). Перейшовши в (1.7) до границі, отримаємо

$$x(t) = \Phi(t, x_t) + x(0) - \Phi(0, x_0) + R(t, x)$$

тобто отримали рівняння (1.1).

Таким чином, доведено існування розв'язку (1.1) для  $t \in [0, T]$  при умові, що  $T + T^{\frac{1}{2}} = q < 1$ .

Нехай  $T + T^{\frac{1}{2}} \geq 1$ . Тоді на відрізку  $[0, T]$  вибираємо точку  $t_1$  таку, що  $t_1 + t_1^{\frac{1}{2}} < 1$ . Тоді використовуємо пророблені кроки для доведення існування розв'язку на відрізку  $[0, t_1]$ . Далі вибираючи точки  $t_2, \dots, t_k$  таким чином, що  $(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{2}} = q < 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ , доведемо існування розв'язку на відрізку  $[0, T]$ . Існування сильного розв'язку задачі Коші для ІДРВзІС (1.1), (1.2) з простору  $S_{[0, T]}$ .

**Доведення єдиності.** Проведемо доведення єдиності розв'язку від супротивного. Припустимо, що є два розв'язки задачі (1.1), (1.2)  $x(t)$  та  $y(t)$ . Тоді згідно з (1.15) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^l &\leq K_7 \int_0^T E \|x_t - y_t\|^l dt + K_5 \left( \int_0^T E \|x_t - y_t\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_8(T, L, \rho, l) E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^l \end{aligned}$$

Припустимо, що  $K_8(T, L, \rho, l) < 1$ . Тоді можна зробити висновок про те, що

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^l = 0$$

на відрізку  $[0, T]$ , що і потрібно довести для єдиності розв'язку рівняння (1.1).

Справді, оскільки

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l \leq K_8 E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l,$$

то

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l \leq K_8^m E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l, \quad m \geq 1.$$

А це, якщо перейти в останній нерівності до границі, дає те, що потрібно:

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l \leq \lim_{m \rightarrow \infty} K_8^m E \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^l = 0.$$

Припустимо, що  $K_8(T, L, \rho, l) \geq 1$ . Тоді знову вибираємо на відрізку  $[0, T]$  точку  $t_1$ , таку що  $K_8(t_1, L, \rho, l) < 1$ , тобто отримуємо єдиність розв'язку на відрізку  $[0, t_1]$ . Далі пророблюючи цю процедуру, отримуємо єдиність розв'язку на відрізку  $[0, T]$

Зауважимо, що у тому випадку, коли ми покроково доводимо існування чи єдиність, тобто доводимо на відрізках  $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T]$ , потрібно змінювати початкову задачу. А саме для відрізка  $[t_1, t_2]$  будемо мати наступну задачу Коші:

$$\begin{aligned}
 dD(t, x_t) = & [a_1(t, u, x_t) + \int_0^t a_2(s, u, x_s)ds + \int_0^t a_3(s, u, x_s)dW_1(s) + \\
 & + \int_0^t \int_{Z_1} a_4(s, u, x_s, z_1)\tilde{v}_1(ds, dz_1)]dt + \\
 & + [b_1(t, u, x_t) + \int_0^t b_2(s, u, x_s)ds + \int_0^t b_3(s, u, x_s)dW_1(s) + \\
 & + \int_0^t \int_{Z_1} b_4(s, u, x_s, z_1)\tilde{v}_1(ds, dz_1)]dW_2(t) + \int_{Z_2} [c_1(t, u, x_t, z_2) + \\
 & + \int_0^t c_2(s, u, x_s, z_2)ds + \\
 & + \int_0^t c_3(s, u, x_s, z_2)dW_1(s) + \int_0^t \int_{Z_1} c_4(s, u, x_s, z_1, z_2)\tilde{v}_1(ds, dz_1)]\tilde{v}_2(dt, dz_2)
 \end{aligned}$$

за початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, t_1], \quad (1.2n)$$

Тобто для  $k$ -го кроку, а саме на відрізку  $[t_{k-1}, t_k]$ , будемо мати наступну початкову умову

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, t_{k-1}].$$

Теорема 1.1. доведена.

- [1] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
- [2] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.
- [3] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- [4] Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кунуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части. – Укр. мат. журн., 1985, 37, № 1. – С. 13-20.
- [5] Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи зі скінченною післядією. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 560 с.
- [6] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 420 с.

**ABOUT EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE STRONG  
SOLUTION OF THE STOCHASTIC  
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF VOLTERRA  
WITH SKOROKHOD INTEGRAL**

*Igor MALYK*

Chernivtsi National University

The existence and uniqueness of the strong solution of the stochastic integro-differential equation of Volterra with Skorokhod integral is investigated.