ПОБУДОВА ω-ПЕРВІСНИХ: КОЛИВАННЯ СУМИ ФУНКЦІЙ

©*2008 р. Олександр МАСЛЮЧЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 20 серпня 2008 р.

Як відомо, коливання суми функцій, взагалі кажучи, не дорівнює сумі коливань, а має місце лише оцінка $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$. В цій статті ми встановимо деякі формули для обчислення коливання суми функцій при різних умовах на доданки.

1 Вступ

В роботах багатьох авторів вивчалася задача про побудову нарізно неперервних і подібних до них функцій з даною множиною точок розриву. Окремо відзначимо статтю [1], де отримано повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів, і статтю [2], в якій охарактеризовано множини точок розриву квазінеперервних функцій на спадково нормальних просторах.

Більш точною, а тому і складнішою, є задача про побудову функцій з того чи іншого класу, коливання якої рівне даній функції.

Означення 1.1. *Нехай X топологічний простір і Y – метричний простір.* ***Коливанням*** *функції $f : X \to Y$ називається функція $\omega_f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, яка задається формулою*

$$\omega_f(x) = \inf_{x \in \operatorname{int} U} \sup_{x', x'' \in U} |f(x') = f(x'')|_Y.$$

*Функція $f : X \to Y$ називається ω-**первісною** функції $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, якщо $\omega_f = g$.*

УДК 517.51, MSC 2000: 54C20, 54C05

Побудова довільних ω-первісних і ω-первісних з другого класу Бера у метризовному чи "майже" метризовному випадку було здійснене в статтях [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Крім того, в [9] охарактеризовано коливання нарізно неперервних функцій, квазінеперервних функцій і функцій першого та другого класу Бера у метризовному (і навіть дещо загальнішому) випадку.

В цій статті ми розробимо техніку обчислення коливання суми певним чином узгоджених функцій, яка в подальшому в роботі [10] дозволить нам отримати загальні результати про існування ω-первісних з тих чи інших класів функцій.

2 Карти функцій та їх найпростіші властивості

В цьому пункті ми пов'яжемо з дійснозначними відображеннями певну сім'ю множин, яку ми називатимемо картою відображення.

Означення 2.1. *Сім'я $\alpha = (A_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ підмножин простору X називається* ***картою****, якщо для довільних раціональних чисел $s < t$ виконується включення $A_t \subseteq A_s$. Карта $\alpha = (A_t)$ називається* ***картою функції*** *$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, якщо $f(x) \geq t$ при $x \in A_t$ і $f(x) \leq t$ при $x \in X \setminus A_t$. При цьому функція f називається* ***рельєфом карти*** *α.*

Зауважимо, що для довільної функції $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ завжди існує (хоча і не єдина) карта $\alpha = (A_t)$ (за A_t можна брати довільні множини з $f^{-1}((t, +\infty]) \subseteq A_t \subseteq f^{-1}([t, +\infty])$ для довільного $t \in \mathbb{Q}$). Зараз ми покажемо, що довільна карта α породжує єдиний рельєф r_α.

Твердження 2.2. *Нехай $\alpha = (A_t)$ – деяка карта на множині X. Тоді існує єдина функція $r_\alpha : X \to \overline{\mathbb{R}}$, яка є рельєфом карти α. При цьому, $r_\alpha = \sup\limits_{t\in\mathbb{Q}} \varphi_t$, де*

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} t & , \quad x \in A_t; \\ -\infty & , \quad x \in X \setminus A_t, \end{cases}$$

для довільних $t \in \mathbb{Q}$ і $x \in X$.

Доведення. Перш за все з'ясуємо, що α є картою r_α. Візьмемо $t \in \mathbb{Q}$. Якщо $x \in A_t$, то $\varphi_t(x) = 1$, а значить, $r_\alpha(x) \geq t\varphi_t(x) = t$. Нехай тепер $x \notin A_t$. Тоді $x \notin A_s$ при $s > t$. Отже, $\varphi_s(x) = -\infty$ при $s > t$. Тому $r_\alpha(x) \leq t$.

Доведемо тепер єдиність. Припустимо що єдиності немає і є два різні рельєфи f та g карти α. Тоді $f(x) \neq g(x)$ для деякого $x \in X$. Нехай, для певності, $f(x) < g(x)$. Візьмемо $t \in (f(x), g(x)) \cap \mathbb{Q}$. Оскільки $f(x) < t$, то $x \notin A_t$. З іншого боку, $g(x) > t$. Тому $x \notin X \setminus A_t$. Таким чином, $x \in A_t$ і ми прийшли до суперечності. □

Далі ми встановимо як пов'язані між собою карти більшої і меншої функцій.

Означення 2.3. *Нехай $\alpha = (A_t)$ і $\beta = (B_t)$ – карти на множині X. Запис $\alpha \lesssim \beta$ означає що для довільних раціональних чисел $s < t$ виконується включення $A_t \subseteq B_s$. Писатимемо $\alpha \sim \beta$, якщо $\alpha \lesssim \beta$ і $\beta \lesssim \alpha$.*

Твердження 2.4. *Нехай $\alpha = (A_t)$ та $\beta = (B_t)$ – карти на множині X. Тоді*

(i) $\alpha \lesssim \beta \Leftrightarrow r_\alpha \le r_\beta$;

(ii) $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow r_\alpha = r_\beta$.

Доведення. Ясно, що *(i)*⇒*(ii)*. Доведемо *(i)*. Нехай $\alpha \lesssim \beta$. Припустимо, що $r_\alpha(x) > r_\beta(x)$ для деякого $x \in X$. Візьмемо такі раціональні числа s та t, що $r_\beta(x) < s < t < r_\alpha(x)$. Тоді $x \notin B_s$ і $x \notin X \setminus A_t$. Отже, $x \in A_t \setminus B_s$. Значить, $A_t \not\subseteq B_s$ і $s < t$. Тому $\alpha \not\lesssim \beta$, що суперечить умові.

Нехай тепер $r_\alpha \le r_\beta$. Доведемо, що $\alpha \lesssim \beta$. Візьмемо раціональні числа $s < t$ і доведемо, що $A_t \subseteq B_s$. Візьмемо $x \in A_t$. Тоді $r_\beta(x) \ge r_\alpha(x) \ge t > s$. Значить, $x \notin X \setminus B_s$. Отже, $x \in B_s$. □

Означення 2.5. *Нехай $\alpha = (A_t)$ і $\beta = (B_t)$ – карти на множині X. Позначатимемо $\mathcal{E}_\alpha = \Big\{A_t : t \in \mathbb{Q}\Big\} \cup \{X, \varnothing\}$. Карта α називається **простою** /β-**простою**/, якщо система $\mathcal{E}_\alpha$ є скінченною /підмножиною системи $\mathcal{E}_\beta$/.*

Твердження 2.6. *Нехай $\alpha = (A_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ – карта на множині X і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – її рель'єф. Тоді існує така послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ з α-простими картами $\alpha_n = (A_{nt})_{t\in\mathbb{Q}}$, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X відносно рівномірності на $\overline{\mathbb{R}}$.*

Доведення. Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $t \in \mathbb{Q}$ покладемо

$$A_{nt} = \begin{cases} X & , \quad t \le -n; \\ A_{\frac{k}{n}} & , \quad \frac{k-1}{n} < t \le \frac{k}{n}, -n^2 < k \le n^2; \\ \varnothing & , \quad t \ge n. \end{cases}$$

Ясно, що карти $\alpha_n = (A_{nt})$ є α-прості. Нехай $f_n = r_{\alpha_n}$. Доведемо, що $f_n \rightrightarrows f$. Зрозуміло, що

$$f_n(x) = \begin{cases} -n & , \quad x \notin X \setminus A_{-n}; \\ \frac{k}{n} & , \quad x \in A_{\frac{k-1}{n}} \setminus A_{\frac{k}{n}}, -n^2 < k \le n^2; \\ n & , \quad x \in A_n. \end{cases}$$

Зауважимо, що на $\overline{\mathbb{R}}$ існує єдина рівномірність що породжує його топологію (як і на будь-якому компакті). Базу цієї рівномірності утворює довільна спадна послідовність замкнених оточень діагоналі $\Delta_{\overline{\mathbb{R}}} = \left\{(x,x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$, перетин якої дорівнює діагоналі. Покладемо

$$W_n = \left\{(u,v) \in \overline{\mathbb{R}}^2 : |u-v| \le \tfrac{1}{n} \text{ або } |u|, |v| \ge n\right\}$$

Ясно, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} W_n = \Delta_{\overline{\mathbb{R}}}$. Тому $\left\{W_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ є базою оточення діагоналі.

Покажемо, що $(f(x), f_n(x)) \in W_n$ для довільних $x \in X$ та $n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$. Якщо $x \in A_n \cup (X \setminus A_{-n})$, то $|f(x)| \le n$ і $|f_n(x)| = n$. Отже, $(f(x), f_n(x)) \in W_n$. Нехай тепер $x \in A_{-n} \setminus A_n$. Тоді $x \in A_{\frac{k-1}{n}} \setminus A_{\frac{k}{n}}$ для деякого цілого k з $-n^2 < k \le n^2$. Тоді $\frac{k-1}{n} \le f(x) \le \frac{k}{n}$ і $f_n(x) = \frac{k}{n}$. Отже, $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{n}$. Значить, $(f(x), f_n(x)) \in W_n$. □

3 Побудова ω-первісних за допомогою карт.

Означення 3.1. ***Верхньою /нижньою/ функцію Бера*** *функції $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ називається функція*

$$f^*(x) = \inf_{x \in \mathrm{int} U} \sup f(U), \qquad /f_*(x) = \sup_{x \in \mathrm{int} U} \inf f(U)/.$$

Добре відомо, що коливання функції $f : X \to \mathbb{R}$ обчислюється за формулою $\omega_f = f^* - f_*$.

Перш за все зрозуміємо, як змінюються карти відображень при переході до верхньої та нижньої функції Бера.

Означення 3.2. *Для карти $\alpha = (A_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ в топологічному просторі X покладемо*

$$\alpha^* = \left(\overline{A}_t\right)_{t \in \mathbb{Q}} \qquad i \qquad \alpha_* = \left(\mathrm{int} A_t\right)_{t \in \mathbb{Q}}.$$

Твердження 3.3. *Нехай $\alpha = (A_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ – карта в топологічному просторі X і $f = r_\alpha$ – її рельєф. Тоді f^* – рельєф α^* і f_* – рельєф α_*.*

Доведення. Доведемо спочатку, що f^* – рельєф α^*. Візьмемо $t \in \mathbb{Q}$. Якщо $x \in \overline{A}_t$, то для довільного околу U точки x існує $u \in U \cap A_t$. Тому $\sup f(U) \geq f(u) \geq t$. Значить, $f^*(x) \geq t$. Якщо ж $x \in X \setminus \overline{A}_t$, то $X \setminus A_t$ є околом x. Отже, $f^*(x) \leq \sup f(X \setminus A_t) \leq t$. Таким чином, α^* – карта f^*.

Аналогічно доводимо, що f_* – рельєф α_*. □

Далі ми з допомогою попереднього твердження наведемо геометричний спосіб побудови ω-первісних.

Означення 3.4. *Нехай $\alpha = (A_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ – деяка карта на X і $\lambda \in \mathbb{R}$. Запис $\alpha \gtrsim \lambda$ /$\alpha \lesssim \lambda$/ означає, що $A_t = X$ для $t < \lambda$ /$A_t = \varnothing$ при $t > \lambda$/. Для довільної множини $E \subseteq X$ покладемо $\alpha|_E = (A_t \cap E)_{t\in\mathbb{Q}}$.*

Зрозуміло, що $\alpha \gtrsim t$ /$\alpha \lesssim t$/ рівносильно виконанню нерівності $r_\alpha \geq t$ /$r_\alpha \leq t$/. Крім того, якщо α – карта f, то $\alpha|_E$ – карта звуження $f|_E$.

Теорема 3.5. *Нехай $\gamma = (G_t) \gtrsim 0$ і $\varphi = (F_t) \gtrsim 0$ карти на топологічному просторі X, причому всі множини G_t відкриті, $\overline{G}_t \setminus G_0 = F_t$ для всіх раціональних $t > 0$ і $\overline{G}_t \cap G_0 \subseteq G_s$ при $s < t$. Тоді функція $f = r_\gamma$ є ω-первісною функції $g = r_\varphi$.*

Доведення. Оскільки G_t – відкриті, то $\gamma = \gamma_*$. Отже, за твердженням 3.3, $f = f_*$. Далі, оскільки то $\overline{G}_t \cap G_0 \subseteq G_s$ при $s < t$, то $\gamma^*|_{G_0} \lesssim \gamma = \gamma_*$. Значить, за твердженням 2.4, $f(x) \leq f_*(x) \leq f_*(x) = f(x)$ при $x \in G_0$. Тому $f_*(x) = f^*(x)$ на G_0, а значить, f неперервна на G_0.

Покладемо, $F = X \setminus G_0$. За умовою, $\overline{G}_t \cap F = F_t = F_t \cap F$ при $s > 0$. Тому $\gamma^*|_F \sim \varphi|_F$. Значить, $f^*|_F = g|_F$. Крім того, $G_t \cap F = \varnothing$ при $t > 0$. Отже, $f|_F = 0$. Таким чином, $g(x) = f^*(x) = f^*(x) - f_*(x) = \omega_f(x)$ при $x \in F$. Далі, оскільки $F_t \cap G_0 = \varnothing$, то $g(x) = 0$ на G_0. Отже, $g(x) = 0 = \omega_f(x)$ при $x \in G_0$. Таким чином, ми з'ясували, що $\omega_f = g$. □

4 Структура напівнеперервних і квазінеперервних функцій

Спочатку ми з'ясуємо, які карти мають квазінеперервні і напівнеперервні функції.

Означення 4.1. *Нагадаємо, що підмножина E топологічного простору називається* ***канонічно замкненою /канонічно відкритою/****, якщо* $E = \overline{\mathrm{int}E}$ $/E = \mathrm{int}\overline{E}/$.

Твердження 4.2. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Для того, щоб f була*

(i) напівнеперервною зверху /знизу/ чи

(ii) квазінеперервною і напівнеперервною зверху /знизу/

необхідно і досить, щоб існувала така карта $\alpha = (A_t)$ функції f, що

(i′) всі множини A_t замкнені /відкриті/ чи, відповідно,

(ii′) всі множини A_t канонічно замкнені /канонічно відкриті/.

Доведення. *(i)⇒(i′).* Досить покласти $A_t = f^{-1}([t, +\infty])$ /чи відповідно, $A_t = f^{-1}((t, +\infty])$/.

(ii)⇒(ii′) Розглянемо спочатку випадок, коли f квазінеперервна і напівнеперервна зверху. Покладемо $A_t = \overline{\mathrm{int}f^{-1}((t, +\infty])}$. Доведемо, що $\alpha = (A_t)$ є картою f. Зафіксуємо $t \in \mathbb{Q}$. По-перше, оскільки f напівнеперервна зверху, то $A_t \subseteq \overline{f^{-1}([t, +\infty])} = f^{-1}([t, +\infty])$, а тому $f(x) \geq t$ на A_t. Далі, оскільки f квазінеперервна, то $f^{-1}((t, +\infty]) \subseteq \overline{\mathrm{int}f^{-1}((t, +\infty])} = A_t$. А значить, $f(x) \leq t$ на $X \setminus A_t$.

У випадку, коли f квазінеперервна і напівнеперервна знизу, слід покласти $A_t = \mathrm{int}\overline{f^{-1}([t, +\infty])} = X \setminus \overline{\mathrm{int}f^{-1}([-\infty, t))}$.

(i′)⇒(i). Нехай α – карта f, яка складається із замкнених /відкритих/ множин. Тоді $\alpha^* = \alpha$ $/\alpha_* = \alpha/$. Значить, за твердженням 3.3, $f^* = f$ $/f_* = f/$. Тобто, f – напівнеперервна зверху /знизу/.

(ii′)⇒(ii). Знову розглянемо тільки перший випадок. Нехай $\alpha = (A_t)$ карта f, яка складається із канонічно замкнених множин. Оскільки *(i′)⇒(i)*, то f напівнеперервна зверху. Перевіримо квазінеперервність f. Візьмемо точку $x \in X$ і окіл V її образу $f(x)$. Далі розглянемо такі раціональні числа $s < t$, що $f(x) \in (s, t) \subseteq [s, t] \subseteq V$. Оскільки $s < f(x) < t$, то $x \in A_s \setminus A_t$. Але $A_s = \overline{\mathrm{int}A_s}$. Зауважимо, що включення $\overline{\mathrm{int}E} \setminus F \subseteq \overline{\mathrm{int}(E \setminus F)}$ виконується, якщо тільки множина F замкнена. Тому $x \in \overline{\mathrm{int}A_s} \setminus A_t \subseteq \overline{\mathrm{int}(A_s \setminus A_t)}$. Крім того, $f(A_s \setminus A_t) \subseteq [s, t] \subseteq V$. Множина $G = \mathrm{int}(A_s \setminus A_t)$ відкрита, причому $x \in \overline{G}$ і $f(G) \subseteq V$. Таким чином, f квазінеперервна в точці x. □

Твердження 4.3. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тоді функції $(f^*)_*$ і $(f_*)^*$ квазінеперервні. Зокрема, якщо функція f напівнеперервна зверху /знизу/, то функція f_* /відповідно f^*/ квазінеперервна.*

Доведення. Нехай $\alpha = (A_t)$ – деяка карта f. Тоді множини $\mathrm{int}\overline{A}_t$ канонічно відкриті, а множини $\overline{\mathrm{int}A_t}$ канонічно замкнені. Але, за твердженням 3.3, сім'ї $(\alpha^*)_* = \left(\mathrm{int}\overline{A}_t\right)$ і $(\alpha_*)^* = \left(\overline{\mathrm{int}A_t}\right)$ є картами відображень $(f^*)_*$ і $(f_*)^*$ відповідно. Тому, за твердженням 4.2 функції $(f^*)_*$ і $(f_*)^*$ квазінеперервні. $\square$

Твердження 4.4. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – квазінеперервна функція. Тоді*

(i) існує така карта $\alpha = (A_t)$ функції f, що $\mathrm{int}\overline{A}_t \subseteq A_t \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{A}_t}$ для кожного $\tau \in \mathbb{Q}$;

(ii) функції f^* і f_* квазінеперервні.

Доведення. (i) Нехай $B_t = f^{-1}((t, +\infty])$ і $A_t = B_t \cup \mathrm{int}\overline{B}_t$. Покажемо, що $\alpha = (A_t)$ – шукана карта. По-перше, оскільки f – квазінеперервна, то $B_t \subseteq \overline{\mathrm{int}B_t}$. Отже, $A_t \subseteq \overline{\mathrm{int}B_t} \cup \mathrm{int}\overline{B}_t \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{B}_t} \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{A}_t}$. Крім того, $\overline{A}_t = \overline{B}_t \cup \overline{\mathrm{int}\overline{B}_t} = \mathrm{int}\overline{B}_t$. Отже, $\mathrm{int}\overline{A}_t = \mathrm{int}\overline{B}_t \subseteq A_t$.

З'ясуємо тепер, що α – карта f. Як добре відомо [11, Твердження 3.1.1], квазінеперервність функції f рівносильна виконанню включення $f(\mathrm{int}\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для довільної множини $A \subseteq X$. Тому $f(\mathrm{int}\overline{B}_t) \subseteq \overline{f(B_t)} \subseteq [t, +\infty]$. Отже, $f(A_t) \subseteq [t, +\infty]$. Крім того, $f^{-1}((t, +\infty]) = B_t \subseteq A_t$. Тому $f(x) \le t$ на $X \setminus A_t$.

(ii). Виберемо таку карту $\alpha = (A_t)$, як в *(i)*. З включення $\mathrm{int}\overline{A}_t \subseteq A_t \subseteq \overline{\mathrm{int}\overline{A}_t}$ випливає, що $\mathrm{int}A_t = \mathrm{int}\overline{A}_t$ і $\overline{A}_t = \overline{\mathrm{int}\overline{A}_t}$. Але множини $\mathrm{int}A_t = \mathrm{int}\overline{A}_t$ канонічно відкриті, а множини $\overline{A}_t = \overline{\mathrm{int}\overline{A}_t}$ канонічно замкнені. Отже, за твердженнями 3.3 і 4.2, функції f^* і f_* квазінеперервні. $\square$

Зауважимо, існування такої карти α як в попередньому твердженні не достатньо для квазінеперервності функції f, адже для неквазінеперервної функції $f(x) = \mathrm{sgn}\, x$ звичайна карта $A_t = f^{-1}((t, +\infty])$ має потрібну властивість.

І нарешті, ми з'ясуємо, що довільна напівнеперервна функція відрізняється від деякої квазінеперервної функції лише на функцію, ε-носії якої ніде не щільні для $\varepsilon > 0$.

Означення 4.5. *Для функції $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ і $\varepsilon \in (0, +\infty]$ позначатимемо* $\mathrm{supp}\, f = \left\{x \in X : f(x) \ne 0\right\}$ *і* $\mathrm{supp}_\varepsilon f = \left\{x \in X : |f(x)| \ge \varepsilon\right\}$

Твердження 4.6. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна зверху функція. Тоді існує функція $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, така,* *що* $f = (f_*)^* + g$, $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g$ *ніде не щільна і* $\overline{\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g} \subseteq \mathrm{supp}\, f$ *для кожного* $\varepsilon > 0$.

Доведення. Нехай $f_0 = f_*$. Розглянемо спочатку випадок $f_0^* < +\infty$. Покладемо $h = f - f_0$. Зрозуміло, що $h \geq 0$ – напівнеперервна зверху. Покажемо, що $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h$ ніде не щільні для $\varepsilon > 0$. Припустимо, що це не так і для деякого $\varepsilon > 0$ замкнена множина $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h$ щільна в деякій відкритій непорожній множині U. Тоді $U \subseteq \mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h$, тобто $f(x) - f_0(x) \geq \varepsilon$ на U. Оскільки f_0 напівнеперервна знизу, то $f_*(x) \geq f_0(x) + \varepsilon$ на U, що неможливо, адже $f_0 = f_* \leq f_0^* < +\infty$. Покладемо $g = f - f_0^*$. Оскільки $g \leq h$, то $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g \subseteq \mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h$, $\varepsilon > 0$. Значить, $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g$ ніде не щільні для $\varepsilon > 0$. Крім того, оскільки множина $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h$ замкнена і $\mathrm{supp}\, h \subseteq \mathrm{supp}\, f$, то $\overline{\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g} \subseteq \mathrm{supp}_{\,\varepsilon} h \subseteq \mathrm{supp}\, f$ для $\varepsilon > 0$.

Розглянемо тепер загальний випадок. Нехай $F = \mathrm{supp}_{\,+\infty} f_0^*$. Оскільки f_0^* напівнеперервна зверху, то F – замкнена. Нехай f' – звуження функції f на відкритий підпростір $X' = X \setminus F$. Тоді $(f'_*)^* = f_0^*|_{X'} < \infty$. Тому, за доведеним вище, існує функція $g' : X' \to \overline{\mathbb{R}}_+$, така, що $f' = (f'_*)^* + g'$, $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g'$ – ніде не щільна і $X' \cap \overline{\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g'} \subseteq \mathrm{supp}\, f'$. Покладемо $g(x) = g'(x)$ на X' і $g(x) = 0$ на F. Зрозуміло, що тоді $f = f_0^* + g$ і $\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g = \mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g'$ ніде не щільні для $\varepsilon > 0$. Крім того, окільки $F \subseteq \mathrm{supp}\, f$, то $\overline{\mathrm{supp}_{\,\varepsilon} g} \subseteq F \cup \mathrm{supp}\, f' \subseteq \mathrm{supp}\, f$. □

5 Коливання суми двох функцій

Наступні твердження випливають безпосередньо з означення.

Твердження 5.1. *Нехай* X *топологічний простір,* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$ *і* $\Lambda_f(x) = \Big\{ y \in \overline{\mathbb{R}} : f(x_m) \to y$ *для деякої напрямленості* $x_m \to x \Big\}$. *Тоді* $f^*(x) = \max \Lambda_f(x)$ *і* $f_*(x) = \min \Lambda_f(x)$.

Твердження 5.2. *Нехай* X *топологічний простір,* $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *такі, що* $f_n \rightrightarrows f$ *на* X *відносно рівномірності на* $\overline{\mathbb{R}}$. *Тоді* $f_n^* \rightrightarrows f^*$ *на* X *в* $\overline{\mathbb{R}}$ *і* $(f_n)_* \rightrightarrows f_*$ *на* X *в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Якщо ж, крім того,* $f_n \rightrightarrows f$ *на* X *в* $\mathbb{R}$, *то і* $\omega_{f_n} \rightrightarrows \omega_f$ *на* X *в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Твердження 5.3. *Нехай* X *– топологічний простір і функції* $f_1, \ldots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Тоді* $(\sup\limits_i f_n)^* = \sup\limits_i f_i^*$ *і* $(\inf\limits_i f_i)_* = \inf\limits_i (f_i)_*$.

Для функції f символом $C(f)$ позначатимемо множині її точок неперервності.

Лема 5.4. *Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$, $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ – деякі функції, причому f напівнеперервна знизу, $g_* = 0$ а також f квазінеперервна в точці x_0 або $g(x_0) = 0$. Тоді*

(i) $(f + g)_*(x_0) = f(x_0)$.

Якщо, крім того, $\operatorname{supp} f \subseteq C(f)$, *то:*

(ii) $(f + g)^*(x_0) = (f + g^*)^*(x_0)$;

(iii) $\omega_{f+g}(x_0) = (f + g^*)^*(x_0) - f(x_0)$.

Доведення. (i) Оскільки $f + g \geq f$ і f напівнеперервна знизу, то $(f + g)_* \geq f_* = f$. Отже, досить з'ясувати, що $(f+g)_*(x_0) \leq f(x_0)$. Якщо $g(x_0) = 0$, то $(f+g)_*(x_0) \leq f(x_0)+g(x_0) = f(x_0)$. Нехай тепер $g(x_0) > 0$. Тоді f – квазінеперервна в точці x_0. Візьмемо окіл U точки x_0 і $\varepsilon > 0$. Виберемо таку відкриту непорожню множину $U_1 \subseteq U$, що $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ на U_1. Далі, оскільки $g_* = 0$, то існує $x_1 \in U_1$ таке, що $g(x_1) < \varepsilon$. Тоді

$$\inf_{x \in U}(f(x) + g(x)) \leq f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_0) + 2\varepsilon.$$

Перейшовши тут до супремума по всіх околах U точки x_0, одержимо, що $(f + g)_*(x_0) \leq f(x_0) + 2\varepsilon$. Залишилось спрямувати ε до нуля.

(ii) Оскільки $g \leq g^*$, то $(f+g)^* \leq (f+g^*)^*$. Таким чином, залишилось довести, що $(f + g)^*(x_0) \geq (f + g^*)^*(x_0)$. Якщо $(f + g^*)^*(x_0) = g^*(x_0)$, то $(f + g)^*(x_0) \geq g^*(x_0) = (f + g^*)^*(x_0)$. Нехай тепер $(f + g^*)^*(x_0) > g^*(x_0)$. Згідно з твердженням 5.1 існує напрямленість $x_m \to x_0$, така, що $f(x_m) + g^*(x_m) \to (f + g^*)^*(x_0)$. Доведемо, що $f(x_m) > 0$ для $m > m_0$. Нехай це не так. Тоді $f(y_k) = 0$ для деякої піднапрямленості (y_k) напрямленості (x_m). Отже,

$$g^*(y_k) = g^*(y_k) + f(y_k) \to (f + g^*)^*(x_0) > g^*(x_0),$$

що суперечить напівнеперервності зверху функції g^*. Таким чином, існує m_0, таке, що $x_m \in \operatorname{supp} f \subseteq C(f)$ для $m > m_0$. Тоді $(f + g)^*(x_m) = f(x_m)+g^*(x_m)$ при $m > m_0$. Перейшовши тут до границі по m, матимемо, що

$$(f + g)^*(x_m) \to (f + g^*)^*(x_0).$$

Але функція $(f + g)^*$ напівнеперервна зверху. Тому

$$(f + g)^*(x_0) \geq \lim_m (f + g)^*(x_m) = (f + g^*)^*(x_0).$$

Залишилось зауважити, що оскільки $\omega_f = f^* - f_*$, то *(iii)* випливає з *(i)* та *(ii)*. □

Для підмножини E простору X символом χ_E позначатимемо характеристичну функцію множини E.

Лема 5.5. *Нехай E – підмножина топологічного простору X, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ і $\lambda > 0$. Тоді $[(\lambda + f)\chi_E]^* = \lambda\chi_{\overline{E}} + (f\chi_E)^*$.*

Доведення. Оскільки $\chi_E \leq \chi_{\overline{E}} = (\chi_E)^*$, $f\chi_E \leq (f\chi_E)^*$, то

$$[(\lambda + f)\chi_E]^* \leq \lambda\chi_{\overline{E}} + (f\chi_E)^*.$$

Доведемо обернену нерівність. Візьмемо $x_0 \in X$. Якщо $(f\chi_E)^*(x_0) = 0$, то

$$\lambda\chi_{\overline{E}}(x_0) + (f\chi_E)^*(x_0) = \lambda\chi_{\overline{E}}(x_0) = (\lambda\chi_E)^*(x_0) \leq [(\lambda + f)\chi_E]^*(x_0).$$

Нехай тепер $(f\chi_E)^*(x_0) > 0$. За твердженням 5.1, існує така напрямленість $x_m \to x_0$, що $f(x_m)\chi_E(x_m) \to (f\chi_E)^*(x_0) > 0$. Тоді $f(x_m)\chi_E(x_m) > 0$ для деякого m_0 і $m > m_0$. Отже, $x_m \in E$ при $m > m_0$. Таким чином, $f(x_m) = f(x_m)\chi_E(x_m) \to (f\chi_E)^*(x_0)$ при $m > m_0$. Отже, використавши знову твердження 5.1, одержимо

$$[(\lambda + f)\chi_E]^*(x_0) \geq \lim_m [(\lambda + f)\chi_E](x_m) = \lim_m (\lambda + f(x_m)) = \lambda + (f\chi_E)^*(x_0).$$

Але $x_0 = \lim_m x_m \in \overline{E}$, тому $[(\lambda + f)\chi_E]^*(x_0) \geq \lambda\chi_{\overline{E}}(x_0) + (f\chi_E)^*(x_0)$. □

Лема 5.6. *Нехай X – топологічний простір, $f, g, h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\varphi = (F_t)$ – карта g, яка складається із замкнених множин, $\operatorname{supp} f \subseteq C(f)$ і $\omega_f = h^*$. Тоді, якщо для довільних $F \in \mathcal{E}_\varphi$ і $x \in D(f) \cap F$ виконується рівність $(f|_F)^*(x) = (h|_F)^*(x)$, то $(f + g)^* = (h + g)^* + f$.*

Доведення. Зведемо спочатку загальний випадок до випадку простої карти φ. За твердженням 2.6 виберемо такі φ-прості функції g_n, що $g_n \rightrightarrows g$ в $\overline{\mathbb{R}}$. Якщо припустити, що наша лема вірна для простих карт, то ми одержимо, що $(f + g_n)^* = (h + g_n)^* + f$. Далі, оскільки $f + g_n \rightrightarrows f + g$ і $h + g_n \rightrightarrows h + g$, то згідно з твердженням 5.2, матимемо, що $(f + g_n)^* \rightrightarrows (h + g)^*$ і $(h + g_n)^* \rightrightarrows (h + g)^*$. Тому $(f + g)^* = (h + g)^* + f$.

Таким чином, можна вважати, що $g = \sup\limits_{k=1,\ldots,n} \mu_k\chi_{F_k}$ де $0 = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n$, $X = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n$ причому $(f|_{F_k})^*(x) = (h|_{F_k})^*(x)$ при $x \in F_k \cap D(f)$. Покладемо $E_n = F_n$ і $E_k = F_k \setminus F_{k+1}$ для $k < n$.

Тоді $(E_k)_{k=0}^n$ – диз'юнктне розбиття X, причому $g(x) = \mu_k$ на E_k. Далі, оскільки $f + g \geq (\mu_k + f)\chi_{F_k} \geq (\mu_k + f)\chi_{E_k}$ для кожного k, то

$$f + g \geq \sup_k (\mu_k + f)\chi_{F_k} \geq \sup_k (\mu_k + f)\chi_{E_k} = \sum_k (\mu_k + f)\chi_{E_k} = f + g.$$

Таким чином, $f+g = \sup\limits_k (\mu_k+f)\chi_{F_k}$. Аналогічно, $h+g = \sup\limits_k (\mu_k+h)\chi_{F_k}$. Використавши тепер твердження 5.3 і лему 5.5, одержимо

$$(f+g)^* = \sup_k (\mu_k \chi_{F_k} + (f\chi_{F_k})^*); \quad (h+g)^* = \sup_k (\mu_k \chi_{F_k} + (h\chi_{F_k})^*).$$

Але для $x \in D(f)$ матимемо, що $(f|_{F_k})^*(x) = (h|_{F_k})^*(x)$, якщо $x \in F_k$. Значить, $(f\chi_{F_k})^*(x) = (h\chi_{F_k})^*(x)$ на $D(f)$. Крім того, $f(x) = 0$ на $D(f)$. Отже, $(f+g)^*(x) = (h+g)^*(x) = (h+g)^* + f(x)$ на $D(f)$. Візьмемо тепер $x \in C(f)$. Тоді $0 \leq h_*(x) \leq h^*(x) = \omega_f = 0$. Отже, $x \in C(h)$ і $h(x) = 0$. Тому $(f+g)^*(x_0) = g^*(x) + f(x) = (h+g)^*(x) + f(x)$. □

Теорема 5.7. *Нехай X – топологічний простір, $f, g : X \to \mathbb{R}_+$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\varphi = (F_t)$ карта g^*, яка складається із замкнених множин, $g_* = 0$, $\operatorname{supp} f \subseteq C(f)$, $\omega_f = h^*$ і f – квазінеперервна в точках $x \in \operatorname{supp} g$. Тоді, якщо $(f|_F)^*(x) = (h|_F)^*(x)$ на $D(f) \cap F$ для довільного $F \in \mathcal{E}_\varphi$, то $\omega_{f+g} = (h+g^*)^*$.*

Доведення. Згідно з лемою 5.4 (iii), $\omega_{f+g} = (f+g^*)^* - f$. Далі, скориставшись лемою 5.6 для функцій f, g^* і h, одержимо, що $(f+g^*)^* = (h+g^*)^* + f$. Отже $\omega_{f+g} = (h+g^*)^*$. □

6 Коливання суми послідовності функцій

Теорема 6.1. *Нехай X – топологічний простір, $g : X \to \mathbb{R}_+$, $g_* = 0$ і $(f_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}_+$, причому,* $\operatorname{supp} f_n \subseteq C(f_n)$ *і $\overline{\operatorname{supp} f_m \cap \operatorname{supp} f_n} \subseteq C(f_n)$ для $m > n$, а ряд $f = \sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ рівномірно збіжний і для кожного номера N функція $s_N = \sum\limits_{n=1}^N f_n$ квазінеперервна в точках $x \in \operatorname{supp} g$. Тоді $\omega_{f+g} = \sup\limits_n \omega_{f_n+g}$.*

Доведення. Зведемо спочатку загальний випадок до випадку скінченної послідовності $(f_n)_{n=1}^N$. Якщо наша теорема справджується для скінченних послідовностей $(f_n)_{n=1}^N$, то $\omega_{s_N+g} = \sup\limits_{n \leq N} \omega_{f_n+g}$. Крім того,

$\sup\limits_{n\le N}\omega_{f_n+g} \to \sup\limits_n \omega_{f_n+g}$ при $N\to\infty$. Але, $s_N \rightrightarrows f$ відносно звичайної метрики на $\mathbb{R}$. Значить, за твердженням 5.2, $\omega_{s_N+g} \rightrightarrows \omega_{f+g}$. Таким чином, $\omega_{f+g} = \sup\limits_n \omega_{f_n+g}$.

Надалі будемо вважати, що $f = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$, для деякого $N\in\mathbb{N}$. Візьмемо точку $x_0\in X$. Нехай $I = \{n\le N : x_0\in D(f_n)\}$. Якщо $I=\varnothing$, то $\omega_g(x_0) = \omega_{g+f_n}(x_0) = \omega_{g+f}(x_0)$ і все зрозуміло. Нехай тепер $I\ne\varnothing$. Розглянемо функції $f' = \sum\limits_{n\in I} f_n$ і $f'' = \sum\limits_{n\le N, n\notin I} f_n$. Оскільки f'' неперервна в точці x_0, і $f = f' + f''$, то або $g(x_0)=0$, або f' квазінеперервна в точці x_0. Крім того, $\omega_{f+g}(x_0) = \omega_{f'+g}(x_0)$. Нехай

$$U = X \setminus \bigcup_{n<m;m,n\in I} \overline{\operatorname{supp} f_m \cap \operatorname{supp} f_n}.$$

Оскільки $\overline{\operatorname{supp} f_m \cap \operatorname{supp} f_n} \subseteq C(f_n) \not\ni x_0$ для довільних $m,n\in I$ з $m>n$, то U – окіл x_0. Крім того, $\operatorname{supp} f_m \cap \operatorname{supp} f_n \cap U = \varnothing$ для $m,n\in I$ з $m\ne n$. За лемою 5.4 (i) матимемо, що $(f'+g)_*(x_0) = f'(x_0) = 0$. Але $0 \le (f_n+g)_*(x_0) \le (f'+g)_*(x_0) = 0$ для $n\in I$. Тому $(f_n+g)_*(x_0)=0$. Значить, $\omega_{f+g}(x_0) = \omega_{f'+g}(x_0) = (f'+g)^*(x_0)$ і $\omega_{f_n+g}(x_0) = (f_n+g)^*(x_0)$. Але $f'(x)+g(x) = \sup\limits_{n\in I}(f_n(x)+g(x))$ на U. Отже, використавши тепер твердження 5.3, одержимо, що

$$\omega_{f+g}(x_0) = \sup_{n\in I}(f_n+g)^*(x_0) = \sup_{n\in I}\omega_{f_n+g}(x_0) = \sup_{n\le N}\omega_{f_n+g}(x_0),$$

адже, якщо $m\notin I$, то

$$\omega_{f_m+g}(x_0) = \omega_g(x_0) = g^*(x_0) \le (f_n+g)^*(x_0) = \omega_{f_n+g}(x_0)$$

для довільного $n\in I$. □

[1] Маслюченко В. К. Михайлюк В. В. Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. - 2000. - **52**, N6. - C.740-747.

[2] Maslyuchenko O. V. Discontinuity point set of quasi-continuous function. // Bull. Austral. Math. Soc. - 2007. - **75**. - P. 373-379.

[3] Kostyrko P. Some properties of oscilation. // Math. Slovaca. - 1980. - **30.** - P.157-162.

[4] Duszynski Z., Grande Z. Ponomarev S. P. O the ω-primitives. // Math. Slovaca. - 2001. - **51**. - P. 469-476.

[5] Ewert J., Ponomarev S.P. ω-primitives on σ-discrete metric space. // Tatra Mt. Math. Publ. - 2002. - **24**. - P.13-27.

[6] Ewert J., Ponomarev S.P. On the existance of ω-primitives on arbitrary metric spaces. // Math. Slovaca. - 2003. - **53**. - P.51-57.

[7] Ewert J., Ponomarev S.P. Oscillation and ω-primitives. // Real Anal. Exchange. - 2002. - **26**. - P. 687-702.

[8] Pnomarev S. P. A note on σ-disctete and massive space. // Tatra Mt. Math. Publ. - 2004. - **28**. - P.43-56.

[9] Маслюченко О. В. Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 2002. - 149с.

[10] Маслюченко О. В. Побудова ω-первісних: сильно досяжні простори. // Принято до друку у Математичний вісник НТШ.

[11] Маслюченко В. К. Нарізно неперервні функції і простори Кете: Дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 1999. - 445с.

THE CONSTRUCTION OF ω-PRIMITIVES: THE OSCILLATION OF SUM OF FUNCTIONS

Oleksandr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is well known that in general the oscillation of sum of functions is not equal to the sum of the oscillations, but the inequality $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$ holds. We obtain some formulas for the calculation of sum of functions under additional conditions of summands.