ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ ТИПУ РАДЕМАХЕРА В ПРОСТОРІ L_1

©2008 р. *Володимир МИХАЙЛЮК, Віолетта ХОЛОМЕНЮК*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 1 липня 2008 р.

Ми доводимо наступний результат. Нехай X – підпростір L_1, породжений послідовністю незалежних двозначних випадкових величин з нульовим середнім. Тоді або X ізоморфний до l_1, або містить підпростір, ізоморфний до l_2.

1 Вступ

Лінійний неперервний оператор T, який діє з нормованого простору X в нормований простір Y називається *ізоморфізмом*, якщо існує неперервний обернений оператор $T^{-1} : Y \to X$. Нормовані простори X і Y називаються *ізоморфними*, якщо існує ізоморфізм $T : X \to Y$. Базиси $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ в нормованих просторах X та Y відповідно називаються *еквівалентними*, якщо існує ізоморфізм $T : X \to Y$, такий, що $Tx_n = y_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *квазінормованою*, якщо $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| < \infty$. Замкнений підпростір X_1 банахового простору X називається *доповнювальним*, якщо існує замкнений підпростір Y_1 простору X такий, що $X = X_1 \oplus Y_1$, тобто для кожного $x \in X$ існують єдині $x_1 \in X_1$ і $y_1 \in Y_1$, такі, що $x = x_1 + y_1$.

П.Енфло в [1] довів, що якщо простір L_1 класів еквівалентності інтегровних за Лебеґом на $[0, 1]$ функцій розкладається в пряму суму своїх замкнених підпросторів X і Y, тобто $L_1 = X \oplus Y$, то хоча б один з цих підпросторів ізоморфний до L_1.

УДК 517.982, MSC 2000: 46B20, 46E30

Оскільки легко побудувати доповнювальний підпростір X простору L_1, який ізоморфний до простору l_1 абсолютно сумовних послідовностей, то природно виникає наступне питання, яке, незважаючи на простоту формулювання, досі залишається відкритим.

Проблема 1.1. (П. Енфло [1]). *Нехай X – доповнювальний підпростір L_1. Чи обов'язково X ізоморфний до L_1 або до l_1?*

У зв'язку з цим природно виникає задача про вивчення властивостей підпросторів L_1, зокрема, підпросторів, які є замиканням лінійної оболонки послідовності незалежних випадкових величин.

Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних функцій $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ називається *послідовністю незалежних випадкових величин*, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}$ і відрізків $[a_1, b_1], ..., [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ має місце наступна рівність $\mu(\{\bigcap\limits_{k=1}^{n} x_k^{-1}([a_k, b_k])\}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mu(x_k^{-1}[a_k, b_k])$, де μ – лінійна міра Лебеґа.

Еквівалентність квазінормованих послідовностей незалежних випадкових величин в L_1 стандартному базису простору l_1 вивчали Л. Дор і Т. Старбьорд у [2] і одержали наступний результат.

Теорема 1.2. (L. Dor, T. Starbird [2]). *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – квазінормована послідовність незалежних випадкових величин $x_n \in L_1$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1;

(ii) існують $\delta > 0$ і послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних множин $E_n \subseteq [0,1]$, такі, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ збіжний і $\int\limits_{E_n} |x_n| d\mu \geq \delta$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що імплікація (i) $\Rightarrow$ (ii) має місце для довільної квазінормованої послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ в L_1. Вона випливає з одного попереднього результату Л. Дора [3].

Вивчення питань еквівалентності послідовностей незалежних випадкових величин в просторах L_p вимірних функцій на $[0,1]$ з інтегровним p-им степенем, де $p \geq 1$, стандартним базисам в класичних просторах бере свій початок з відомої нерівності Хінчина [4].

Нехай $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функцій Радемахера

$$r_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t), \quad t \in [0,1].$$

Для довільних $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)$ і послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ скалярів $a_n \in$

$\mathbb{R}$ виконується наступна нерівність

$$A_p^{(0)}(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}} \le (\int\limits_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)|^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}} \le B_p^{(0)}(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\ )^{\frac{1}{2}},$$

де

$$A_p^{(0)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & p \in [1,2), \\ 1, & p \in [2,+\infty), \end{cases} \qquad B_p^{(0)} = \begin{cases} 1, & p \in [1,2], \\ O(\sqrt{p}), & p \in (2,+\infty). \end{cases}$$

В [5] ця нерівність була узагальнена на випадок k-кратних добутків незалежних випадкових величин $x_n \in L_p$ з нульовим середнім, тобто $\int\limits_{[0,1]} x_n\, d\mu = 0$. Звідси при $p = 1$ випливає наступний результат.

Теорема 1.3. (І.К. Мацак, А.М. Плічко [5]). *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – нормована послідовність незалежних випадкових величин $x_n \in L_1$ з $\int\limits_{[0,1]} x_n d\mu = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, причому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[0,1]} |x_n|^4 d\mu < +\infty$. Тоді існують $A, B > 0$ такі, що для довільних $n \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$*

$$A\frac{\alpha_2^3}{\beta_4^2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \le ||\sum_{k=1}^{n} a_k x_k|| \le \beta_2 B\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2},$$

де $\alpha_2 = \inf ||x_n||_2, \beta_2 = \sup ||x_n||_2$ і $\beta_4 = \sup ||x_n||_4$

Наслідок 1.4. *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – квазінормована послідовність незалежних випадкових величин $x_n \in L_1$ з нульовим середнім така, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[0,1]} |x_n|^4 d\mu < +\infty$. Тоді $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_2.*

Дана стаття присвячена вивченню властивостей просторів, які є замиканням лінійної оболонки нормованих послідовностей незалежних випадкових величин в L_1 з нульовим математичним сподіванням, кожна з яких набуває рівно двох значень. Питання про дослідження таких просторів було поставлено М. Поповим, а послідовність таких функцій дістала назву *послідовності функцій типу Радемахера.*

2 Еквівалентність послідовностей функцій типу Радемахера стандартним базисам в просторах $l_1,\ l_2$.

Нехай $d \in (0; \frac{1}{2}]$. *Функцією типу Радемахера* назвемо функцію $r_d : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$r_d(t) = \begin{cases} \frac{1}{2d},\ t \in [0; d]; \\ -\frac{1}{2(1-d)},\ t \in (d; 1]. \end{cases}$$

Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин $(x_n)_{n=1}^{\infty} : [0,1] \to \mathbb{R}$ назвемо *послідовністю функцій типу Радемахера, породженою послідовністю* $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ *чисел* $d_n \in (0, \frac{1}{2}]$, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ функції x_n і r_{d_n} однаково розподілені, тобто $\mu(t \in [0,1] : x_n(t) = \frac{1}{2d_n}) = d_n$ і $\mu(t \in [0,1] : x_n(t) = -\frac{1}{2(1-d_n)}) = 1 - d_n$.

Зауважимо, що класична послідовність функцій Радемахера породжена послідовністю $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, коли $d_n = \frac{1}{2}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

З теореми 1.2 легко випливає наступний факт.

Наслідок 2.1. *Нехай* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *– послідовність функцій типу Радемахера у просторі* L_1*, породжена послідовністю* $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ *чисел* $d_n \in (0, \frac{1}{2}]$. *Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *еквівалентна стандартному базису в* l_1*;*

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *– збіжний.*

Доведення. (ii)⇒(i). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $E_n = \{t \in [0,1] : x_n(t) = \frac{1}{2d_n}\}$. Зауважимо, що $\mu(E_n) = d_n$, тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ збіжний. Крім того, $\int\limits_{E_n} |x_n(t)| d\mu = \mu(E_n)\frac{1}{2d_n} = \frac{1}{2}$. Отже, згідно з теоремою 1.2 послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1.

(i)⇒(ii). Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1. Тоді згідно з теоремою 1.2 існують $\delta > 0$ і послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ вимірних множин $E_n \subseteq [0,1]$, такі, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ збіжний і $\int\limits_{E_n} |x_n| d\mu \geq \delta$. Оскільки $d_n \in (0; \frac{1}{2}]$, то $\frac{1}{2d_n} \geq \frac{1}{2(1-d_n)}$, тому $\delta \leq \int\limits_{E_n} |x_n| d\mu \leq \mu(E_n)\frac{1}{2d_n}$. Отже, $d_n \leq \frac{\mu(E_n)}{2\delta}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, звідки випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ збіжний. ◊

З іншого боку, з допомогою наслідку 1.4 одержується наступний результат.

Наслідок 2.2. *Нехай* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *– послідовність функцій типу Радемахера в* L_1*, породжена послідовністю* $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ *чисел* $d_n \in (0, \frac{1}{2}]$*. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *еквівалентна стандартному базису в* l_2*;*

(ii) існує $\varepsilon > 0$*, таке, що* $d_n > \varepsilon$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$*.*

Доведення. (i)⇒(ii). Припустимо, що $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} d_n = 0$. Тоді існує послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел $n_k \in \mathbb{N}$, така, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d'_k$ збіжний, де $d'_k = d_{n_k}$. Оскільки послідовність $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин $y_k = x_{n_k}$ є послідовністю функцій типу Радемахера, породженою послідовністю $(d'_k)_{k=1}^{\infty}$, то згідно з наслідком 2.1 послідовність $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1, що заперечує (i).

(ii)⇒(i). Нехай $\varepsilon > 0$ і $d_n > \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді $\int\limits_{[0,1]} |x_n(t)|^4 d\mu = \frac{1}{16d_n^4} d_n + \frac{1}{16(1-d_n)^4}(1-d_n) = \frac{1}{16}(\frac{1}{d_n^3} + \frac{1}{(1-d_n)^3}) \leq \frac{1}{16}(\frac{1}{\varepsilon^3} + 8)$.

Отже, згідно з наслідком 1.4 послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_2. ♢

З наслідків 2.1 і 2.2 випливає, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій типу Радемахера, $x_n \in L_1$, не еквівалентна стандартному базису в l_2 тоді і тільки тоді, коли існує підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка еквівалентна стандартному базису в l_1. З іншого боку, послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій типу Радемахера в L_1, породжена послідовністю $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел $d_n = \frac{1}{n}$, не є еквівалентною стандартному базису в l_1, і жодна її підпослідовність не є еквівалентною стандартному базису в l_2. Тому природно виникає наступне питання.

Питання 2.3. *Нехай* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *– послідовність функцій типу Радемахера,* $x_n \in L_1$*, яка не еквівалентна стандартному базису в* l_1*. Чи існує блок-базис даної послідовності, який еквівалентний стандартному базису в* l_2*?*

Нагадаємо, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ банахового простору X називається *базисною послідовністю*, якщо вона є базисом деякого підпростору $X_0 \subseteq X$ (іншими словами, базисом у замиканні своєї лінійної оболонки).

Легко бачити, що довільна послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ незалежних випадкових величин є монотонною в L_1, тобто для довільної послідовності скалярів $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ числова послідовність $\left(||\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k||\right)_{n=1}^{\infty}$ є неспадною, а отже є базисною послідовністю.

Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – базисна послідовність банахового простору X, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність чисел $a_n \in \mathbb{R}$ і $0 \le i_1 < i_2 < \ldots$ – натуральні числа. Послідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ненульових векторів в банаховому просторі X,

$$y_n = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} a_i x_i$$

називається *блок-базисом* базисної послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Далі ми покажемо, що питання 2.3 має позитивну відповідь.

3 Допоміжні твердження

Спочатку доведемо твердження, що дають оцінки значень деяких функцій багатьох змінних, які ми будемо використовувати при доведенні основного результату.

Твердження 3.1. *Нехай $n \ge 2$, $x_1, \ldots, x_n \in [0; \frac{1}{2}]$ такі, що $x_1 + \ldots + x_n \le 1$ і $k \le n$. Тоді*

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k} \ \prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} \le \frac{2}{k} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \left(\prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} \right)$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k} \ \prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \left(\prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} \frac{x_j}{1-x_j} \right) \le$$

$$\le \frac{1}{k} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \left(\prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1-x_j} \right) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1-x_j}}{k} \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \ \prod_{i \in I} \frac{x_i}{1-x_i} \le$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1-\frac{1}{2}}}{k} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \prod_{i\in I} \frac{x_i}{1-x_i} \leq$$

$$\leq \frac{2}{k} \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \left(\prod_{i\in I} \frac{x_j}{1-x_j} \right)$$

$\diamondsuit$

Твердження 3.2. *Нехай* $n, k \in \mathbb{N},\ 9 \leq k \leq n,\ a_1, \ldots, a_n \in [0; \frac{1}{4}]$ *такі, що* $a_1 + \ldots + a_n \leq 1$. *Тоді*

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=k} \prod_{i\in I} \frac{a_i}{1-a_i} \leq C_n^k \frac{1}{(n-1)^k}.$$

Доведення. Зауважимо, що неперервна функція $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\ |I|=k} \prod\limits_{i\in I} \frac{x_i}{1-x_i}$ на компактній множині $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0; \frac{1}{4}]^n : x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}$ має найбільше значення. Нехай $y_0 = (y_1, \ldots, y_n)$ – точка максимуму функції f на K. Покажемо, що $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{n}$. Оскільки функція f строго зростає на $[0; \frac{1}{4}]$ відносно кожної змінної зокрема, то $y_1 + \ldots + y_n = 1$.

Припустимо, що $y_1 < y_2$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = f(x, y_1 + y_2 - x, y_3, \ldots, y_n)$ на $[y_1, y_2]$ і дослідимо її на екстремум.

Позначимо $y_1 + y_2 = 2a$, $\alpha = \sum\limits_{I\subseteq\{3,\ldots,n\},\ |I|=k} \prod\limits_{i\in I} \frac{y_i}{1-y_i}$, $\beta = \sum\limits_{I\subseteq\{3,\ldots,n\},\ |I|=k-1} \prod\limits_{i\in I} \frac{y_i}{1-y_i}$ і $\gamma = \sum\limits_{I\subseteq\{3,\ldots,n\},\ |I|=k-2} \prod\limits_{i\in I} \frac{y_i}{1-y_i}$.

Тоді

$$\varphi(x) = \alpha + \beta\left(\frac{x}{1-x} + \frac{2a-x}{1+x-2a}\right) + \gamma \frac{x}{1-x} \cdot \frac{2a-x}{1+x-2a}$$

і

$$\varphi'(x) = \beta\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x-2a)^2}\right) + \gamma \frac{2(a-x)(1-2a)}{(1-x)^2(1+x-2a)^2} =$$

$$= \frac{4\beta(1-a)(x-a) + 2\gamma(a-x)(1-2a)}{(1-x)^2(1+x-2a)^2} =$$

$$= \frac{2(2\beta(1-a) - \gamma(1-2a))(x-a)}{(1-x)^2(1+x-2a)^2}.$$

З твердження 3.1 випливає, що $\beta \leq \frac{2}{k-1}\gamma$. Тепер, врахувавши, що $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ і $k \geq 9$, маємо $2\beta(1-a) < 2\beta \leq \frac{4}{k-1}\gamma = \gamma(1-2a)\frac{4}{(k-1)(1-2a)} \leq \gamma(1-2a)\frac{8}{k-1} \leq \gamma(1-2a)$. Отже, $2\beta(1-a) - \gamma(1-2a) < 0$ і тому точка $x = a$ є точкою максимуму функції φ на $[y_1, y_2]$. З іншого боку, згідно з вибором точки y_0 точка $x = y_1$ є точкою максимуму функції φ на $[y_1, y_2]$. Таким чином, ми отримали суперечність.

Отже, $y_1 = y_2$. Аналогічно доводиться, що $y_1 = y_3 = ... = y_n$. Таким чином, $y_0 = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ і $f(a_1, ..., a_n) \leq f(\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) = C_n^k \left(\frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^k = C_n^k \frac{1}{(n-1)^k}$. ♢

Твердження 3.3. *Нехай* $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$, $a_1, ..., a_n \in [0, \frac{1}{k}]$ *такі, що* $a_1 + ... + a_n \leq 1$. *Тоді*

$$(1-a_1) \cdot ... \cdot (1-a_n) \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k.$$

Доведення. Розглянемо функцію $f(x_1, ..., x_n) = (1-x_1) \cdot ... \cdot (1-x_n)$ на компактній множині $A = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq \frac{1}{k},\ x_1 + ... + x_n \leq 1\}$.

Нехай $y_0 = (y_1, ..., y_n)$ – точка мінімуму функції f. Покажемо, що $y_i = 0$ або $y_i = \frac{1}{k}$ для кожного $i = 1, ..., n$.

Припустимо, що $y_i \in (0, \frac{1}{k})$ для деякого $i \in \{1, ...n\}$. Без обмежень загальності ми можемо вважати, що $i = 1$. Зауважимо, що тоді існує $j \in \{2, ..., n\}$, таке, що $y_j \in (0, \frac{1}{k})$. Справді, якщо $y_j \in \{0, \frac{1}{k}\}$ для кожного $j \in \{2, ..., n\}$, то $y_1 + ... + y_n = \frac{m}{k} \leq 1 - y_1 < 1$. Тому $y_1 + ... + y_n \leq \frac{k-1}{k}$, тобто $\frac{1}{k} + y_2 + ... + y_n \leq 1$, причому $f(\frac{1}{k}, y_2, ..., y_n) < f(y_1, ..., y_n)$, що суперечить вибору точки y_0.

Отже, нехай $y_1, y_2 \in (0, \frac{1}{k})$. Якщо $y_1 + y_2 \leq \frac{1}{k}$, то $(1-y_1)(1-y_2) > (1-(y_1+y_2))$. Тоді $(0, y_1+y_2, y_3, ..., y_n) \in A$ і $f(0, y_1+y_2, y_3, ..., y_n) < f(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, що неможливо.

Якщо ж $y_1 + y_2 > \frac{1}{k}$, то $(1-y_1)(1-y_2) > (1-\frac{1}{k})(1-(y_1+y_2-\frac{1}{k}))$, причому $(\frac{1}{k}, y_1+y_2-\frac{1}{k}, y_3, ..., y_n) \in A$, що знову суперечить вибору точки y_0.

Отже, $y_i \in \{0, \frac{1}{k}\}$ для кожного $i \in \{1, ..., n\}$. Оскільки $y_1 + ... + y_n \leq 1$, то множина $i \leq n : y_i = \frac{1}{k}$ містить не більше, ніж k елементів. Тому

$$(1-y_1) \cdot ... \cdot (1-y_n) \geq (1-\frac{1}{k})^k.$$

♢

Нам буде корисна також наступна оцінка інтеграла Лебеґа, яка одержується стандартними міркуваннями.

Твердження 3.4. *Нехай* $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– вимірна функція,* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *– строго зростаюча послідовність чисел* $\alpha_n \in \mathbb{R}$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$*,* $\alpha_0 = 0$ *і* $A_n = \{t \in [0,1] : |x(t)| \geq \alpha_{n-1}\}$*. Тоді*

$$\int\limits_{[0,1]} |x(t)| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}).$$

Доведення. Зауважимо, що $A_n \setminus A_{n+1} = \{t \in [0,1] : \alpha_{n-1} \leq |x(t)| < \alpha_n\}$. Визначимо вимірну функцію y наступним чином: $y(t) = \alpha_n$, якщо $t \in A_n \setminus A_{n+1}$. Зрозуміло, що $|x(t)| \leq y(t)$ для кожного $t \in [0,1]$.

Тоді

$$\int\limits_{[0,1]} |x(t)|\, d\mu \leq \int\limits_{[0,1]} |y(t)|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) =$$

$$= \alpha_1(\mu(A_1) - \mu(A_2)) + \alpha_2(\mu(A_2) - \mu(A_3)) + ... =$$

$$= \mu(A_1)(\alpha_1 - \alpha_0) + \mu(A_2)(\alpha_2 - \alpha_1) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}).$$

$\diamondsuit$

4 Основний результат

В даному пункті ми дамо позитивну відповідь на питання 2.3.

Спочатку доведемо допоміжне твердження, яке разом з твердженням 3.4 дасть можливість оцінити значення інтеграла Лебеґа від відповідних блоків функцій типу Радемахера.

Лема 4.1. *Нехай* $k, n \in \mathbb{N}$*,* $k, n \geq 2$*,* $d_1, ..., d_n \in (0, \frac{1}{k}]$ *такі, що* $1 - \frac{1}{k} \leq d_1 + ... + d_n \leq 1$*, і* $x_1, ..., x_n$ *– незалежні функції типу Радемахера, породжені набором* $d_1, ..., d_n$*,* $z = \sum\limits_{i=1}^{n} 2d_i(1-d_i)x_i$*,* $m \geq 8$ *і* $A = \{t \in [0,1] : |z(t)| \geq m\}$*. Тоді*

$$\mu(A) \leq \left(\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + ...\right).$$

Доведення. Для кожної множини $I \subseteq \{1, ..., n\} = I_0$ покладемо

$A_I = \big\{t \in [0,1] : x_i(t) = \frac{1}{2d_i}$ при $i \in I,\ x_j(t) = -\frac{1}{2(1-d_i)}$ при $j \in I_0 \setminus I\big\}$.

Оскільки $(x_i)_{i=1}^n$ – незалежні випадкові величини, то, врахувавши твердження 3.3, маємо

$$\mu(A_I) = \prod_{i\in I} d_i \cdot \prod_{j\in I_0\setminus I} (1-d_i) = \prod_{i=1}^{n}(1-d_i) \cdot \prod_{i\in I} \frac{d_i}{(1-d_i)} \leq \prod_{i\in I} \frac{d_i}{(1-d_i)}.$$

Крім того, $z(t) = \sum\limits_{i\in I}(1-d_i) + \sum\limits_{i\in I_0\setminus I}(-d_i) = |I| - \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ для кожного $t \in A_I$.

Врахувавши, що $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i \in [1-\frac{1}{k}, 1]$, одержимо, що $z(t) \in [|I|-1, |I|)$. Тому

$$A = \bigsqcup_{|I|\geq m+1} A_I = \bigsqcup_{l=m+1}^{n} \bigsqcup_{|I|=l} A_I.$$

Тепер, використовуючи твердження 3.2 і те, що $l \geq 3$, одержимо

$$\mu(\bigsqcup_{|I|=l} A_I) = \sum_{|I|=l} \mu(A_I) \leq \sum_{|I|=l} \prod_{i\in I} \frac{d_i}{(1-d_i)} \leq C_n^l \cdot \frac{1}{(n-1)^l} =$$

$$= \frac{1}{l!} \frac{n!}{(n-1)^l \cdot (n-l)!} = \frac{1}{l!} \cdot \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \ldots \frac{n-l+1}{n-1} \leq \frac{1}{l!}.$$

Тоді $\mu(A) = \sum\limits_{l=m+1}^{n} \mu(\bigsqcup\limits_{|I|=l} A_I) \leq \sum\limits_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{l!}$. $\diamondsuit$

Наступна теорема є основним результатом даної статті.

Теорема 4.2. *Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність незалежних функцій типу Радемахера, $x_n \in L_1$, така, що $(x_n)_{n=1}^\infty$ не еквівалентна стандартному базису в l_1. Тоді існує блок-базис даної послідовності, який еквівалентний стандартному базису в l_2.*

Доведення. Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ породжена послідовністю $(d_n)_{n=1}^\infty$ чисел $d_n \in (0, \frac{1}{2}]$. З наслідку 2.1 випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ розбіжний.

Нехай існує $\varepsilon > 0$ таке, що множина $N_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : d_n > \varepsilon\}$ – нескінченна. Занумеруємо елементи множини N_ε у послідовність, тобто $N_\varepsilon = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. Тоді послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ – послідовність функцій типу Радемахера, породжена числовою послідовністю $(d_{n_k})_{k=1}^\infty$, причому згідно з наслідком 2.2 послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ еквівалентна стандартному базису в l_2.

Залишилось розглянути випадок, коли множина N_ε скінченна для кожного $\varepsilon > 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. Оскільки, крім того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ розбіжний, то, використовуючи критерій Коші, можна вибрати підпослідовність $(d_{n_i})_{i=1}^\infty$ і строго зростаючу послідовність $(i_k)_{k=1}^\infty$ номерів $i_k \in \mathbb{N}$ так, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ виконуються наступні умови:

(a) $a_i \in [0, \frac{1}{k}]$ для кожного $i \in \{i_k, i_k + 1, ..., i_{k+1} - 1\}$;

(b) $1 - \frac{1}{k} \le a_{i_k} + a_{i_k+1} + ... + a_{i_{k+1}-1} \le 1$,

де $a_i = d_{n_i}$ для кожного $i \ge i_1$.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$z_k = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} 2(1 - a_i)a_i x_{n_i}.$$

Покажемо, що послідовність $(z_k)_{k=2}^\infty$ – квазінормована і еквівалентна стандартному базису в l_2. Зафіксуємо $k \ge 2$. Позначимо $A = \{t \in [0, 1] : x_{n_i}(t) = -\frac{1}{2(1-a_i)}, i_k \le i < i_{k+1}\}$. Оскільки $(x_{n_i})_{i=i_k}^{i_{k+1}-1}$ незалежні випадкові величини, то $\mu(A) = (1 - a_{i_k})(1 - a_{i_k+1}) \cdot ... \cdot (1 - a_{i_{k+1}-1})$. Тепер, врахувавши (b) і твердження 3.3, одержимо

$$\mu(A) \ge \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k.$$

Зауважимо тепер, що $\int\limits_{[0,1]} z_k \, d\mu = 0$, $z_k(t) = -(a_{i_k} + ... + a_{i_{k+1}-1})$ для кожного $t \in A$ і $A \subseteq B = \{t \in [0, 1] : z_k(t) < 0\}$. Тому

$$||z_k|| = -2 \int\limits_B z_k(t) \, d\mu \ge -2 \int\limits_A z_k(t) \, d\mu \ge 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k (a_{i_k} + ... + a_{i_{k+1}-1}) \ge$$

$$\ge 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k+1} \ge 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Отже, послідовність $(z_k)_{k=2}^{\infty}$ – квазінормована. З наслідку 1.4 випливає, що достатньо показати, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[0,1]} |z_n|^4 \, d\mu < \infty.$$

Покладемо $\alpha_0 = 0$ і $\alpha_m = m^4$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 4.1 випливає, що при $m \geq 9$ і $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mu(A_{mn}) \leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!},$$

де $A_{mn} = \{t \in [0,1] : |z_n(t)| \geq m-1\} = \{t \in [0,1] : |z_n(t)|^4 \geq \alpha_{m-1}\}$.

Тоді згідно з твердженням 3.4 для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\int\limits_{[0,1]} |z_n|^4 \, d\mu \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{mn})(\alpha_m - \alpha_{m-1}) \leq ((\alpha_1 - \alpha_0) + ... + (\alpha_8 - \alpha_7)) +$$

$$+ \sum_{m\geq 9} \mu(A_{mn}) \cdot (m^4 - (m-1)^4) \leq \alpha_8 + \sum_{m\geq 9} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{m^4 - (m-1)^4}{i!} =$$

$$= \alpha_8 + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(\alpha_9 - \alpha_8) + ... + (\alpha_i - \alpha_{i-1})}{i!} \leq \alpha_8 + \sum_{i=9}^{\infty} \frac{i^4}{i!} = 8^4 + \sum_{i=9}^{\infty} \frac{i^4}{i!} = C.$$

Отже, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{[0,1]} |z_n|^4 \, d\mu \leq C < \infty$. ♢

Тепер легко одержується наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність двозначних незалежних випадкових величин з нульовим середнім, $X = \overline{sp\,[x_n : n \in \mathbb{N}]}$. Тоді X або ізоморфний до l_1, або містить підпростір, ізоморфний до l_2.*

Доведення. Оскільки властивість Шура успадковується підпросторами банахового простору, то довільний банахів простір з властивістю Шура (наприклад, простір, ізоморфний до l_1) не містить підпросторів, ізоморфних до l_2. Тому достатньо показати, що якщо X не ізоморфний до l_1, то він містить підпростір, ізоморфний до l_2.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$. Зауважимо, що $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – нормована послідовність двозначних незалежних випадкових величин з нульовим середнім, тобто, існує послідовність δ_n чисел $\delta_n \in \{1, -1\}$ така, що послідовність z_n, де $z_n = \delta_n y_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ – це послідовність функцій типу Радемахера і $X = \overline{sp\,[z_n : n \in \mathbb{N}]}$.

Оскільки X не ізоморфний до l_1, то послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ не еквівалентна стандартному базису в l_1. Тому згідно з теоремою 4.2 існує блок-базис послідовності $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, який еквівалентний стандартному базису в l_2, зокрема, в X існує підпростір, ізоморфний до l_2. ♢

Тепер природно виникає наступне питання.

Питання 4.4. *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – нормована послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім, $X = \overline{sp\,[x_n : n \in \mathbb{N}]}$ і X не містить підпросторів, ізоморфних до l_2 (має властивість Шура, асимптотичний l_1). Чи обов'язково X ізоморфний до l_1 (послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ еквівалентна стандартному базису в l_1)?*

[1] Enflo, P. and Starbird, T. Subspaces of L^1 containing L^1. Stud.Math. – 1979. – **65**, N.2. – P. 203-225.

[2] L.E. Dor, T. Starbird. Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables // Compositio Mathematica. – 1979. – **39**, N.2. – P. 141-175.

[3] L.E. Dor. On projections in an L_1 // Ann.Math. – 1965. – **102**, N.3. – P. 463-474.

[4] J. Lindenstrauss, L.Tzafriri. Classical Banach Spaces I. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. – 188p.

[5] И.К. Мацак, А.Н. Пличко. Неравенство Хинчина для k-кратных произведений независимых случайных величин // Математические заметки. – 1988. – **44**, N.3. – С. 378-384.

SEQUENCES OF RADEMACHER TYPE FUNCTIONS IN L_1

Volodymyr MYKHAYLYUK, Violetta KHOLOMENYUK

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We prove the following result. Let X be a subspace of L_1 spanned by a sequence of independent double-valued random variables of mean zero. Then either X is isomorphic to l_1 or contains a subspace isomorphic to l_2.