СЛАБКА ГОРИЗОНТАЛЬНА КВАЗІНЕПЕРЕРВНІСТЬ

©*2008 р. Василь НЕСТЕРЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 30 серпня 2008 р.

Запроваджено поняття слабкої горизонтальної квазінеперервності відображень від двох змінних; показано, що слабко горизонтально квазінеперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину, є сукупно квазінеперервним.

1. Поняття горизонтальної квазінеперервності було введене К.Беґелем в [1] під назвою "умова (A)" для функцій, що визначені на добутку паралелепіпедів. В [2] ця властивість була перенесена на загальний випадок відображень $f : X \times Y \to Z$, де і одержала свою назву. Горизонтальна квазінеперервність дозволяє покращити ряд теорем, які стосуються сукупної квазінеперервності чи наявності точок сукупної неперевності відображень $f : X \times Y \to Z$. Добре відома наступна характеризація квазінеперевності відображення $f : X \to Y$, доведення якої подано, наприклад, в [3]: для довільних топологічних просторів X і Y відображення $f : X \to Y$ квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини U в X і множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ маємо $f(U) \subseteq \overline{f(A)}$. Подібна властивість є і у горизонтально квазінеперервних відображень: якщо відображення $f : X \times Y \to Z$ горизонтально квазінеперервне, то для довільних відкритих множин U і V в X і Y відповідно та множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. Однак ця властивість не є характеристичною. Тут ми таку властивість відображень $f : X \times Y \to Z$ будемо називати *слабкою горизонтальною квазінеперервністю.* Нижче за допомогою слабкої

УДК 517.51, MSC 2000: 54C30, 54E35

горизонтальної квазінеперервності буде покращена теорема про сукупну квазінеперервність відображень $f : X \times Y \to Z$.

2. Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільних околів U і V відповідно точок $x_0 \in X$ і $y_0 = f(x_0) \in Y$ існує відкрита непорожня множина U_1 в X така, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Відображення називається *квазінеперервним*, якщо вона є таким в кожній точці.

Нехай X, Y і Z — топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним в точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для довільних околів U, V і W точок x_0, y_0 і $z_0 = f(x_0, y_0)$ в просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита непорожня множина U_1 в X і точка $y_1 \in V$, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Відображення називається *горизонтально квазінеперервним*, якщо вона є таким в кожній точці.

Ми кажемо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *слабко горизонтально квазінеперервним*, якщо для довільних відкритих множин U і V в X і Y відповідно та множини $A \subseteq X$, такої, що $U \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. В [4] показано, що горизонтально квазінеперервне відображення є слабко квазінеперервним. Обернене твердження не вірне. Це показує наступний приклад.

Приклад 1. Визначимо функцію $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{якщо } \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1, \text{якщо } \ x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, \ \text{в інших точках } [0,1]^2. \end{cases}$$

Кожна множина $U \times \{y\} \subseteq [0,1]^2$, де U — відкрита непорожня в [0,1], містить точки, значення функції в яких рівні 1 і точки, в яких функція рівна 0. Тому відображення f не є горизонтально квазінепервним. Однак, для довільних відкритих непорожніх множин U і V в $[0,1]$ і множини A в $[0,1]$, таких, що $U \subseteq \overline{A}$ маємо, що $f(U \times V) = \{0,1\}$ і $f(A \times V) = \{0,1\}$. Це означає, що функція f слабко горизонтально квазінеперервна.

Має місце наступна характеризація слабкої горизонтальної квазінеперервності.

Теорема 1. *Нехай X, Y і Z —топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ слабко горизонтально квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної точки $p = (x,y)$ і довільних околів U, V і W точок x, y і $z = f(p)$ відповідно в просторах X, Y і Z існують відкрита непорожня множина U_1 в X і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq W$.*

Доведення. Нехай відображення f слабко горизонтально квазінеперервне. Будемо міркувати від супротивного. Нехай існують точка

$p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$ і відкриті околи U, V і W точок x_0, y_0 і $z_0 = f(p_0)$ відповідно в просторах X, Y і Z, такі, що для довільної відкритої непорожньої множини $G \subseteq U$ існує точка $x \in G$, така, що для довільної точки $y \in V$ маємо $f(x,y) \notin W$. Розглянемо множину $A = \{x \in U : (\forall y \in \ V)(f(x,y) \notin W)\}$. Згідно з припущенням $U \subseteq \overline{A}$. Оскільки відображення f слабко горизонтально квазінеперервне, то

$$f(p_0) \in f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} \subseteq \overline{Z \setminus W} \subseteq Z \setminus W.$$

Одержали суперечність, бо $f(p_0) \in W$. Отже, наше припущення не вірне.

Тепер доведемо достатність. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y та множину A в X, таку, що $U \subseteq \overline{A}$. Розглянемо довільну точку $z_0 = f(x_0, y_0) \in f(U \times V)$ і довільний окіл W точки z_0 в просторі Z. Згідно з умовою теореми існують відкрита непорожня множина U_1 в X і відображення $g : U_1 \to V$, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(Gr(g)) \subseteq W$. З щільності множини A в U випливає, що існує точка $x_1 \in U_1 \cap A$, така, що $f(x_1, g(x_1)) \in W$. Це означає, що $W \cap f(A \times \ V) \neq \emptyset$, а отже, $z_0 \in \overline{f(A \times V)}$. Таким чином, відображення f слабко горизонтально квазінеперервне.

3. Для доведення основного результату нам потрібна наступна теорема, яка уточнює згадану в п.1 характеризацію квазінеперервності для випадку відображень від двох змінних.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір і $f : X \times Y \to Z$. Відображення f квазінеперервне тоді і тільки тоді, коли для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y, довільної щільної в U множини A і довільних щільних в V множин B_a, заданих для кожного $a \in A$, має місце включення*

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(\bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B_a))}.$$

Доведення. Доведення необхідності є очевидним, враховуючи той факт, що множина $\bigcup\limits_{a \in A} (\{a\} \times B_a)$ щільна в $U \times V$. Достатність будемо доводити методом від супротивного. Нехай f не є квазінеперервним в деякій точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Тоді існують відкриті околи W_0, U_0 і V_0 точок $z_0 = f(p_0)$, x_0 і y_0 відповідно в просторах Z, X і Y, такі, що для довільних відкритих множин U в X та V в Y існує точка $p \in U \times V$, така, що $f(p) \notin W_0$. Візьмемо відкритий окіл W_1 точки z_0, такий, що $\overline{W_1} \subseteq W_0$.

Розглянемо множину

$$A = \{a \in U_0 : (\exists B_a | V_0 \subseteq \overline{B_a})(\forall b \in B_a)(f(a, b) \notin W_1)\}$$

і покажемо, що вона щільна в U_0. Нехай це не так. Припустимо, що в U_0 існує відкрита непорожня множина U, така, що для кожного $x \in U$ існує відкрита непорожня множина G_x в V_0, що $f(x, y) \in W_1$ для всіх $y \in G_x$. Нехай $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза простору Y. Розглянемо множини $M_n = \{x \in U : (\forall y \in V_n)(f(x, y) \in W_1)\}$. Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = U$. Оскільки простір X берівський, то існує номер n_0, такий, що множина M_{n_0} десь щільна в U. Нехай M_{n_0} щільна у відкритій непорожній множині $U_1 \subseteq U$. Тоді згідно з умовою

$$f(U_1 \times V_{n_0}) \subseteq \overline{f(M_{n_0} \times V_{n_0})} \subseteq \overline{W_1} \subseteq W_0.$$

Одержали суперечність. Отже, множина A щільна в U_0.

Тепер, знову скориставшись умовою теореми, маємо

$$f(U_0 \times V_0) \subseteq \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B_a))} \subseteq \overline{Z \setminus W_1} = Z \setminus W_1.$$

Тоді точка $z_0 = f(p_0) \notin W_1$. Але ж W_1 є околом точки z_0. Одержали суперечність. Отже, наше припущення не вірне.

Умова беровості простору X в теремі 2 є істотною. Це показує наступний приклад.

Приклад 2. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через X позначимо множину всіх двійково-раціональних чисел виду $\frac{2k-1}{2^n}$, де $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$. Розглянемо функцію $f : X \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, яка визначається так: $f(x, y) = 1$, якщо $x = \frac{2k-1}{2^n}, y \in (\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n})$, де $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$, $m = 1, 2, ..., 2^n$ і $f(x, y) = 0$, в інших точках. Оскільки у кожній непорожній відкритій множині з $(0, 1)$ міститься нескінченна кількість двійково-раціональних чисел, то в кожному прямокутнику виду $(a, b) \times (c, d) \subseteq X \times (0, 1)$ є точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція набуває значення 1. Щоб переконатися в цьому достатньо розглянути точки з множини $\{\frac{2k-1}{2^n}\} \times (c, d)$, де $\frac{1}{2^n} < d - c$. Тому $f((a, b) \times (c, d)) = \{0, 1\}$. Оскільки будь-яка десь щільна підмножина A множини двійково-раціональних чисел є нескінченна, то існують номери n і k, такі, що $\frac{2k-1}{2^n} \in A$ і $\frac{1}{2^n} < d - c$. Тоді будь-яка щільна в (c, d) множина буде містити точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція рівна 1. Отже, $f(\bigcup\limits_{x \in A}(\{x\} \times B_x)) = \{0, 1\}$, де множина A щільна в (a, b), а множина B_x щільна в (c, d) для кожного $x \in A$. Однак функція f не є квазінеперервною по тій причині, що в кожному прямокутнику є точки, в яких значення функції рівне 0 і точки, де функція приймає значення рівне 1.

Тепер переходимо до доведення основного результату.

Теорема 3. *Нехай X – берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z – регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ – слабко горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної відображення. Тоді f квазінеперервне за сукупністю змінних.*

Доведення. Скористаємося теоремою 2. Візьмемо довільні відкриті непорожні множини U і V відповідно в X і Y та щільну в U множину A. Для кожної точки $a \in A$ розглянемо довільну щільну в V множину B_a. Оскільки відображення f слабко горизонтально квазінеперервне, то $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$. З квазінеперервності відносно другої змінної випливає, що для всіх $a \in A$ має місце включення $f^a(V) \subseteq \overline{f^a(B_a)}$. Тоді

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} = \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times V))} =$$

$$= \overline{\bigcup_{a \in A} f^a(V)} \subseteq \overline{\bigcup_{a \in A} \overline{f^a(B_a)}} \subseteq \overline{\overline{\bigcup_{a \in A} f^a(B_a)}} =$$

$$= \overline{f(\bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B_a))}.$$

Отже, згідно з теоремою 2 відображення f квазінеперервне за сукупністю змінних.

Насправді в теоремі 3 досить вимагати квазінеперервності відображення f^x не для всіх $x \in X$, а лише для значень x з деякої залишкової в X множини.

Теорема 4. *Нехай X — берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке слабко горизонтально квазінеперервне і квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої змінної з деякої залишкової в X множини. Тоді f сукупно квазінеперервне.*

Доведення. Нехай відображення f квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої змінної із залишкової множини M. Розглянемо звуження $h = f_{|M \times Y}$. Оскільки підпростір M берівський, то відображення h задовольняє умови теореми 3. Тоді відображення h сукупно квазінеперервне. Покажемо, що і відображення f квазінеперервне. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Візьмемо замкнений окіл W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z та відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно в X і Y. Оскільки простір X берівський, то множина M

щільна в X. З слабкої горизонтальної квазінеперервності відображення h і теореми 1 випливає існування точки $p_1 \in (M \cap U) \times V$, такої, що $f(p_1) \in intW$. Оскільки відображення h квазінеперервне в точці p_1, то існують відкриті непорожні множини U_1 та V_1 відповідно в X та Y, такі, що $U_1 \subseteq U$, $V_1 \subseteq V$ і $g((U_1 \cap M) \times V_1) \subseteq intW$. Тоді використовуючи слабку горизонтальну квазінеперервність відображення f маємо

$$f(U_1 \times V_1) \subseteq \overline{f((U_1 \cap M) \times V_1)} = \overline{g((U_1 \cap M) \times V_1)} \subseteq \overline{intW} \subseteq W.$$

Отже, відображення f квазінеперервне в точці p_0.

Оскільки кожне сукупно квазінеперервне відображення є горизонтально квазінеперервним, то з теореми 4 одержуємо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай X — берівський простір, простір Y має зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір, відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне відносно другої змінної при значеннях першої змінної, яка пробігає деяку залишкову в X множину. Тоді слабка горизонтальна квазінеперервність еквівалентна горизонтальній квазінеперервності.*

[1] *Bögel K.* Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z. — 1926. —25. — S. 490 - 498.

[2] *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Горизонтальна квазінеперервність та її застосування. — Чернівці, 1996. — 15 с. —Деп. в УкрІНТЕІ 01.11.96, № 98 — Ук. 96.

[3] *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні// Мат. методи і фіз.-мех. поля. —1998. — 41, №4. — С. 39 - 45.

[4] *Маслюченко В.К.* Про нарізні і сукупні модифікації неперервності // Математичні Студії. — 2006. — Т. 25, № 2. — С. 213 - 218.

WEAK HORIZONTALLY QUASICONTINUITY

Vasyl' NESTERENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We introduce the notion of weakly horizontal quasi-continuity of mapping of two variables; we show that every weakly horizontal quasi-continuous mapping $f : X \times Y \to Z$ which is quasi-continuous with respect to the second variable and quasi-continuous on a residual set with respect to the second variable, is jointly quasi-continuous.