ПРО ІЗОМОРФІЗМ КОМПЛЕКСНИХ ГРУПОВИХ АЛГЕБР СКІНЧЕННИХ РОЗВ'ЯЗНИХ ГРУП

Петро ГУДИВОК

Ужгородський національний університет
вул. Підгірна 46, Ужгород 88000

Редакція отримала статтю 17 листопада 2003 р.

Встановлено необхідну й достатню умову ізоморфізму комплексних групових алгебр скінченних груп, які є циклічними розширеннями надрозв'язних груп.

Актуальною є наступна задача А: „Знайти необхідну і достатню умову ізоморфізму комплексних групових алгебр $\mathbb{C}G_1$ і $\mathbb{C}G_2$, де $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел і G_i — скінченна група ($i = 1, 2$)".

С.Д. Берман [3] розв'язав задачу А у випадку, коли G_i — надрозв'язна група ($i = 1, 2$). У [4] доведено наступну теорему: „Нехай G_i — скінченна група, яка містить таку максимальну абелеву нормальну підгрупу H_i, що факторгрупа G_i/H_i циклічна ($i = 1, 2$). Якщо порядки груп G_1 і G_2 співпадають, то алгебри $\mathbb{C}G_1$ і $\mathbb{C}G_2$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли співпадають порядки класів спряжених елементів груп G_1 і G_2, які містяться відповідно в підгрупах H_1 і H_2."

І. М. Айзекс [6] і Т. Гевкес [5] вивчали властивості скінченних груп G_1 і G_2, якщо $\mathbb{C}G_1 \cong \mathbb{C}G_2$. У [6] показано, що якщо $\mathbb{C}G_1 \cong \mathbb{C}G_2$ і G_1 — скінченна нільпотентна група, то G_2 також нільпотентна група.

У даній роботі розв'язано задачу А для скінченних груп, які є циклічними розширеннями надрозв'язних груп.

Наведемо спочатку необхідні для подальшого результати із [3] про комплексні групові алгебри скінченних надрозв'язних груп.

Нехай G — скінченна надрозв'язна група і ряд

$$B_0 = \{1\} \subset B_1 \subset \ldots \subset B_m = G \tag{1}$$

є головним рядом групи G. Пара (N, H) називається M-парою групи B_i, якщо N — підгрупа групи B_i, H — нормальна підгрупа групи N і факторгрупа N/H — циклічна ($1 \le i \le m$). Побудуємо систему M-пар $\mathfrak{N}$

групи G, яка відповідає ряду (1), за таким алгоритмом. Для групи B_1 система M-пар $\mathfrak{N}_1$ складається із пар (B_1, B_0) і (B_1, B_1). Нехай для підгрупи B_i вже побудована система M-пар $\mathfrak{N}_i = \{(N_j, H_j)/j = 1, \ldots, t_i\}$. Тоді систему M-пар $\mathfrak{N}_{i+1}$ для групи B_{i+1} будуємо так. Для кожної пари (N_j, H_j) визначимо в групі B_{i+1} підгрупу $\tilde{N}_j = \{g \in B_{i+1}/[g, N_j] \subset H_j\}$, де $[a, b]$ — комутатор елементів a і b. Далі в підгрупі $\tilde{N}_j$ виберемо всі такі підгрупи $\tilde{H}_j^{(1)}, \ldots, \tilde{H}_j^{(r_j)}$, що $\tilde{H}_j^{(n)} \bigcap N_j = H_j$ і $\tilde{N}_j/\tilde{H}_j^{(k)}$ — циклічна група $(k = 1, \ldots, r_j; j = 1, \ldots, t_i)$. Тоді

$$\mathfrak{N}_{i+1} = \{(\tilde{N}_j, \tilde{H}_j^{(k)})|k = 1, \ldots, r_j; j = 1, \ldots, t_i\}.$$

Нехай $\mathfrak{N} = \{(N_i, H_i)|i = 1, \ldots, q\}$ — множина всіх M-пар групи $B_m = G$, які відповідають головному ряду (1). Індекс $(G : N_i)$ підгрупи N_i в групі G називається індексом M-пари (N_i, H_i). Розширеною множиною M-пар групи G, яка відповідає головному ряду (1), будемо називати множину $\tilde{\mathfrak{N}}$, яка одержується із множини $\mathfrak{N}$, якщо кожну M-пару $(N_i, H_i) \in \mathfrak{N}$ повторити $\varphi((N_i : H_i))$ разів (φ — функція Ейлера).

Лема 1 (С. Д. Берман, [3]). *Нехай (N_i, H_i) є M-пара із множини $\mathfrak{N}$. Пара (N_i, H_i) визначає точно $k_i = \varphi((N_i : H_i))$ комплексних лінійних характерів $\chi_1^{(i)}, \ldots, \chi_{k_i}^{(i)}$ групи N_i з ядром H_i, кожний із яких індукує характер незвідного комплексного зображення групи G. Елементи*

$$e_j^{(i)} = |N_i|^{-1} \sum_{a \in N_i} \chi_j^{(i)}(a)a \quad (i = 1, \ldots, q; j = 1, \ldots, k_i)$$

утворюють повну систему лінійних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $\mathbb{C}G$ (тут $|N_i|$ — порядок групи N_i). Множина $\{e_j^{(i)}|j = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, k_i\}$ є інваріантною відносно групи внутрішніх автоморфізмів групи G.

Лема 2 (С. Д. Берман, [3]). *Нехай G — скінченна надрозв'язна група і W — повна система мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів групової алгебри $\mathbb{C}G$, інваріантна відносно групи Φ внутрішніх автоморфізмів групи G. Нехай $\{e_1^{(1)}, \ldots, e_{r_1}^{(1)}\}, \ldots, \{e_1^{(t)}, \ldots, e_{r_t}^{(t)}\}$ — різні області транзитивності, на які розбивається множина W під дією перетворень із Φ. Тоді елементи $\bar{e}_j = e_1^{(j)} + \ldots + e_{r_j}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, t)$ утворюють повну систему мінімальних ортогональних ідемпотентів центра алгебри $\mathbb{C}G$.*

Степінь незвідного комплексного матричного зображення скінченної групи G, яке визначається мінімальним ідемпотентом e групової алгебри $\mathbb{C}G$, називається індексом ідемпотента e.

Лема 3 (С. Д. Берман, [2]). *Нехай χ_i — комплексний лінійний характер підгрупи $N_i (i = 1, 2)$ скінченної групи $G, N = N_1 \bigcap N_2$ і*

$$e_i = |N_i|^{-1} \sum_{a \in N_i} \chi_i(a)a \quad (i = 1, 2).$$

Нерівність $e_1 e_2 \neq 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли на підгрупі N характери χ_1 і χ_2 співпадають.

Лема 4. *Нехай N — підгрупа скінченної групи G, H — така нормальна підгрупа групи N, що факторгрупа N/H циклічна. Нехай*

$$e = |N|^{-1} \sum_{a \in N} \chi(a)a,$$

де χ — комплексний лінійний характер групи N з ядром H. Нерівність $ege \neq 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $Q_g = N \bigcap gNg^{-1} = F_g$ $(g \in G, g \notin N)$, де F_g — підгрупа групи N, яка складається з усіх таких елементів $a \in N$, що $g^{-1}ag = ah\,(h \in H)$.

Доведення. Очевидно, для $g \in G$

$$g^{-1}eg = |N|^{-1} \sum_{b \in gNg^{-1}} \chi(g^{-1}bg)b = |N|^{-1} \sum_{b \in gNg^{-1}} \chi'(b)b.$$

Звідси випливає, що комплексні лінійні характери χ і $\chi\prime$ груп N і gNg^{-1} відповідно індукують на підгрупі Q_g один і той же лінійний характер тоді і тільки тоді, коли для всіх елементів $b \in Q_g$ виконується рівність $\chi(g^{-1}bg) = \chi(b)$, тобто $g^{-1}bg = bh\,(h \in H)$. З останньої рівності та леми 3 одержуємо, що $ege \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $F_g = Q_g\,(g \in G, g \notin N)$. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай $\bar{G}$ — скінченна група, яка є циклічним розширенням надрозв'язної групи G, і $\bar{e} = e_1 + \ldots + e_r$ — мінімальний ідемпотент центра алгебри $\mathbb{C}G$, де $e_1, \ldots, e_r$ — попарно ортогональні мінімальні ідемпотенти алгебри $\mathbb{C}G$. Нехай T — підгрупа групи $\bar{G}$, яка складається із таких елементів $g \in \bar{G}$, що $g^{-1}\bar{e}g = \bar{e}$. Тоді для кожного елемента $g \in T$ у суміжному класі gG знайдеться такий елемент b, що $e_i b e_i \neq$ $\neq 0\,(1 \leq i \leq r)$.*

Доведення. Будемо доводити лему від супротивного. Нехай $e_i b e_i = 0$ для довільного $b \in gG$ $(g \in T)$. Очевидно, $b = ga$ $(a \in G)$. Тоді

$$e_i g a e_i (ga)^{-1} = e_i g a e_i a^{-1} g^{-1} = 0 \tag{2}$$

для кожного елемента $a \in G$. За лемою 2 для кожного j $(1 \leq j \leq r)$ існує такий елемент $a_j \in G$, що $e_i = a_j e_i a_j^{-1}$. Звідси та з (2) одержуємо, що

$$e_i g e_j g^{-1} = 0 \tag{3}$$

для довільного j $(1 \leq j \leq r)$. З іншого боку, $g\bar{e}g^{-1} = \bar{e}$, тобто

$$g e_1 g^{-1} + \ldots + g e_r g^{-1} = e_1 + \ldots + e_r. \tag{4}$$

Із (4) випливає, що

$$e_i g e_1 g^{-1} + \ldots + e_i g e_r g^{-1} = e_i.$$

З огляду на це, існує таке j, що $e_i g e_j g^{-1} \neq 0$. Звідси та з (3) одержуємо суперечність. Лема доведена.

Нехай далі $\bar{G}$ — скінченна група, яка є циклічним розширенням надрозв'язної групи G, причому G — максимальна надрозв'язна нормальна підгрупа групи $\bar{G}$. Нехай (N_i, H_i) — деяка M-пара із множини $\mathfrak{N}$, $g \in \bar{G}$, $Q_g^{(i)} = N_i \bigcap g N_i g^{-1}$ і $F_g^{(i)}$ — підгрупа групи N_i, яка складається з усіх таких елементів $a \in N_i$, що $g^{-1} a g = ah$ $(h \in H_i)$. Позначимо через T_i множину всіх елементів $g \in \bar{G}$, які задовольняють умові: суміжний клас gG містить такий елемент b, що $Q_b^{(i)} = F_b^{(i)}$. Очевидно, T_i — підгрупа групи $\bar{G}$. За лемою 1 повна система $W = \{e_1, \ldots, e_n\}$ мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $\mathbb{C}G$ складається з такої ж кількості елементів, що й розширена множина M-пар $\mathfrak{N}$ групи G. Між елементами множин W і $\tilde{\mathfrak{N}}$ існує така взаємно однозначна відповідність f, що якщо $f(e_i) = (N_i, H_i) \in \tilde{\mathfrak{N}}$, то індекс ідемпотента e_i дорівнює індексу пари (N_i, H_i).

Лема 6. *Нехай $\bar{e}_i$ — мінімальний ідемпотент центра алгебри $\mathbb{C}G$, який відповідає мінімальному ідемпотенту $e_i \in W$, і $f(e_i) = (N_i, H_i) \in \in \tilde{\mathfrak{N}}$. Тоді підгрупа T_i групи $\bar{G}$ співпадає з підгрупою $\bar{T}_i$ групи $\bar{G}$, яка складається з усіх таких елементів $g \in \bar{G}$, що $g^{-1}\bar{e}_i g = \bar{e}_i$.*

Доведення. Із леми 5 випливає, що для кожного елемента $g \in \bar{T}_i$ в суміжному класі gG знайдеться такий елемент $b \in gG$, що $e_i b e_i \neq 0$, де e_i — мінімальний ідемпотент алгебри $\mathbb{C}G$, що відповідає ідемпотентові $\bar{e}_i$. За лемою 1

$$e_i = |N_i|^{-1} \sum_{a \in N_i} \chi_i(a) a,$$

і якщо $H_i = ker \chi_i$, то (N_i, H_i) є M-парою групи G із множини $\mathfrak{N}$. Далі із леми 4 одержуємо, що $e_i b e_i \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $F_b^{(i)} = Q_b^{(i)}$. Звідси випливає, що підгрупа $\bar{T}_i$ співпадає з T_i. Лема доведена.

Систему трьох підгруп (T_i, N_i, H_i) будемо називати S-трійкою групи $\bar{G}$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину всіх S-трійок групи $\bar{G}$, які відповідають множині M-пар $\tilde{\mathfrak{N}}$. Розширеною множиною S-трійок групи $\bar{G}$ називається множина $\tilde{\mathfrak{M}}$, яка одержується із множини $\mathfrak{M}$, якщо кожну S-трійку (T_i, N_i, H_i) із $\mathfrak{M}$ повторити $(T_i : G)$ разів. Індексом S-трійки (T_i, N_i, H_i) називається число $(\bar{G} : T_i)(G : N_i)$.

Теорема 1. *Нехай $\bar{G}$ — скінченна група, яка є циклічним розширенням надрозв'язної групи G, причому G — максимальна надрозв'язна нормальна підгрупа групи $\bar{G}$. Позначимо через $m_1, \ldots, m_r$ різні індекси S-трійок множини $\tilde{\mathfrak{M}}$. Нехай в $\tilde{\mathfrak{M}}$ міститься точно s_i S-трійок з індексом m_i $(i = 1, \ldots, r)$. Тоді різні степені незвідних комплексних матричних зображень групи $\bar{G}$ є $m_1, \ldots, m_r$, а кількість нееквівалентних незвідних комплексних матричних зображень степеня m_i групи $\bar{G}$ дорівнює $\frac{s_i}{m_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$.*

Доведення. Нехай W — повна система мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $\mathbb{C}G$, описана в лемі 1. Під дією внутрішніх автоморфізмів групи G множина W розбивається на області транзитивності $\{e_1, \ldots, e_{1r_1}\}, \ldots, \{e_{s1}, \ldots, e_{sr_s}\}$, які попарно не перетинаються $(e_{ij} \in W)$. За лемою 2 елементи

$$\bar{e}_i = e_{i1} + \ldots + e_{ir_i} \quad (i = 1, \ldots, s)$$

утворюють повну систему мінімальних ідемпотентів центра алгебри $\mathbb{C}G$. Із леми 1 випливає, що

$$e_{ij} = |N_{ij}|^{-1} \sum_{a \in N_{ij}} \chi_{ij}(a)a \quad (j = 1, \ldots, r_i;\ i = 1, \ldots, s),$$

де χ_{ij} — лінійний характер групи N_{ij} з ядром H_{ij}, $r_i = (G : N_{i1})$ $(i = = 1, \ldots, s)$, причому (N_{ij}, H_{ij}) є M-парою групи G із множини $\mathfrak{N}$. Кожний елемент $g \in \bar{G}$ визначає автоморфізм ψ_g алгебри $\mathbb{C}G$: $\psi_g(a) = g^{-1}ag$ $(a \in \mathbb{C}G)$. Нехай $B = \{\psi_g | g \in \bar{G}\}$. Очевидно, що B є групою. Множина $V = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_s\}$ під дією елементів групи B розбивається на підмножини $V_1, \ldots, V_m$, які попарно не перетинаються. Нехай $V_i = \{\bar{e}_{1i}, \ldots, \bar{e}_{q_i i}\}$, де

$$\bar{e}_{ki} = \sum_{j=1}^{r_i} e_{ki}^{(j)} \quad (k = 1, \ldots, q_i;\ i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

і $e_{ki}^{(j)} \in W$. Покладемо

$$u_i = \sum_{k=1}^{q_i} \bar{e}_{ki} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Очевидно, $q_i = (\bar{G} : T_i')$, де T_i' — підгрупа групи $\bar{G}$, яка складається із всіх елементів $g \in \bar{G}$ таких, що $g\bar{e}_{1i} = \bar{e}_{1i}g$. За лемою 6 підгрупа T_i' співпадає з підгрупою T_{ij}, яка входить в S-трійку (T_{ij}, N_{ij}, H_{ij}) із множини $\mathfrak{M}$. Нехай F_d $(1 \leq d \leq m)$ є підгрупою факторгрупи $\bar{G}/G = \langle aG \rangle$ $(a \in \bar{G})$, яка складається з таких елементів a^iG $(1 \leq i \leq r,\ r = (\bar{G} : G))$, що в a^iG знайдеться такий клас спряжених елементів C_i групи $\bar{G}$, що $w_iu_d \neq 0$, де w_i — сума елементів класу C_i. Нехай n_d — порядок групи $F_d = \langle bG \rangle$ $(b \in \bar{G})$. Позначимо через w_d' суму елементів такого класу спряжених елементів C_d' групи $\bar{G}$, що $C_d' \subset bG$ і $w_d'u_d \neq 0$. Тоді

$$(w_d'u_d)^{n_d} = \lambda_d u_d \quad (0 \neq \lambda_d \in \mathbb{C}).$$

Нехай

$$v_d = \frac{w_d'u_d}{\sqrt[n_d]{\lambda_d}} \quad (d = 1, \ldots, m)$$

і ε_d — первісний корінь степеня d із одиниці. У [1] показано, що ідемпотенти

$$\bar{u}_i^{(d)} = n_d^{-1}(u_d + \varepsilon_d^i v_d + \cdots + \varepsilon_d^{i(n_d-1)} v_d^{n_d-1}) \tag{7}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n_d - 1;\ d = 1, \ldots, m)$$

утворюють повну систему мінімальних ортогональних ідемпотентів центра алгебри $\mathbb{C}G$. Із [1] також випливає, що ідемпотенти

$$\tilde{u}_{i,t,j}^{(d)} = \bar{u}_i^{(d)} e_{td}^{(j)} \tag{8}$$

$$(d = 1, \ldots, m;\ t = 1, \ldots, q_d;\ j = 1, \ldots, r_d;\ i = 0, \ldots, n_d - 1)$$

утворюють повну систему мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $\mathbb{C}G$. Очевидно,

$$\bar{u}_i^{(d)} = \sum_{t=1}^{q_d} \sum_{j=1}^{r_d} \tilde{u}_{i,t,j}^{(d)}.$$

Із леми 2 та леми 6 одержуємо, що існує така взаємно однозначна відповідність між ідемпотентами $e_i \in W$ і S-трійками (T_i, N_i, H_i) із $\mathfrak{M}$, що індекс ідемпотента e_i дорівнює $(G : N_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, де n — кількість елементів множини W.

Із (8) випливає, що кожному мінімальному ідемпотенту $e_{td}^{(i)}$ алгебри $\mathbb{C}G$ відповідає $n_d = |F_d|$ мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $\mathbb{C}\bar{G}$ з одним і тим же індексом, який дорівнює $(\bar{G} : H_d)(G : N)$, де $F_d = \langle bG \rangle = H_d/G$, H_d — підгрупа групи $\bar{G}$ і $(G : N)$ — індекс ідемпотента $e_{td}^{(j)}$.

Отже, якщо ми кожну S-трійку (T, N, H) із $\mathfrak{M}$ повторимо $(T : G)$ разів, то одержимо розширену множину S-трійок $\tilde{\mathfrak{M}}$, в якій кількість S-трійок дорівнює кількості мінімальних попарно ортогональних ідемпотентів алгебри $C\bar{G}$. Отже, між S-трійками із множини $\tilde{\mathfrak{M}}$ і мінімальними ортогональними ідемпотентами $\tilde{u}_{i,t,j}^{(d)}$ алгебри $\mathbb{C}\tilde{G}$ існує така взаємно однозначна відповідність, при якій індекси S-трійок співпадають з індексами відповідних їм ідемпотентів. Як відомо, індекси ідемпотентів $\tilde{u}_{i,t,j}^{(d)}$ є степенями незвідних комплексних зображень групи $\bar{G}$. Звідси випливає, що якщо $m_1, \ldots, m_r$ — різні індекси S-трійок із множини $\tilde{\mathfrak{M}}$, то різні степені незвідних комплексних зображень групи $\bar{G}$ дорівнюватимуть $m_1, \ldots, m_r$. Із формул (5)–(8) одержуємо, що всі мінімальні ідемпотенти $\tilde{u}_{i,t,j}^{(d)}$, які входять у розвинення $\bar{u}_i^{(d)}$, мають індекс m_{i_d}. Значить, кількість ідемпотентів $\tilde{u}_{i,t,j}^{(d)}$, які входять у розвинення $\bar{u}_i^{(d)}$, дорівнює m_i. Звідси дістаємо, що кількість нееквівалентних незвідних комплексних матричних зображень степеня m_i групи $\bar{G}$ дорівнює $\frac{s_i}{m_i}$, де s_i — кількість S-трійок із $\tilde{\mathfrak{M}}$ з одним і тим же індексом m_i $(i = 1, \ldots, r)$. Теорема доведена.

Наслідок. *Нехай G_i — максимальна нормальна надрозв'язна підгрупа скінченної групи $\bar{G}_i$ і факторгрупа $\bar{G}_i/G_i$ циклічна $(i = 1, 2)$. Комплексні групові алгебри $\mathbb{C}\bar{G}_1$ і $\mathbb{C}\bar{G}_2$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли між розширеними множинами S-трійок груп $\bar{G}_1$ і $\bar{G}_2$ існує така взаємно однозначна відповідність, при якій співпадають індекси відповідних S-трійок.*

Доведення наслідка випливає із теореми 1.

[1] *Берман С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 102. № 3. – С. 431–434.

[2] *Берман С.Д.* // Доп. АН УРСР. – 1957. – № 6. – С. 539–542.

[3] *Берман С.Д.* // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1966. – Т. 30. № 1. – С. 69–132.

[4] *Гудивок П.М.* // Известия вузов. „Математика“. – 1963. – № 2. – С. 44–52.

[5] *Hawkes T.O.* // J. Algebra. – 1994. – Vol. 167. – P. 557–577.

[6] *Isaacs I.M.* // Arch. Math. – 1986. – Vol. 47. – P. 293–295.

ON THE ISOMORPHISM OF COMPLEX GROUP ALGEBRAS OF FINITE SOLVABLE GROUPS

Petro GUDIVOK

Uzhgorod National University
46 Pidhirna Str., Uzhgorod 88000, Ukraine

We give a necessary and sufficient condition for the isomorphism of complex group algebras of finite groups which are cyclic extensions of supersolvable groups.