Про переступ чисел e і π.

Написав

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

(Посьвячено О. Петрикови).

Числа e і π мають у всїх теориях математичної аналїзи первостепенне значінє; тому то змаганя найбільших математиків стреміли до сього, щоби розслїдити натуру тих чисел, бо близше спізнанє їх властностий могло кинути ярке сьвітло на много інтересних проблемів аналїтичних, от хоч би н. пр. на звісний проблем квадратури кола, що побіч квестиї „perpetuum mobile" занимав уми многих учених аж по часи нинїшні.

Вже Lambert доказав, що число π не є рациональне, а подібно і число e^x не може бути рациональним на случай, коли x є числом рациональним. Дальше єще пішов Legendre, бо показав, що не лиш π, але і π^2 не є числом рациональним, отже що π не є другим коренем, а Liouville доказав,[1] що так e, як і e^2 не є коренями рівнаня квадратового з цїлковитими сочинниками.

Овид математичний розширив ся завдяки розслїдам згаданого вже Liouville'а, котрий виказав,[2] що є числа, які не можуть бути коренями рівнань альґебраічних, отже, що побіч чисел альґебраічних істнує велике множество чисел т. зв. переступних. Ріжнять ся они тим, що наколи числа альґебраічні — як їх назвав Kronecker — є коренями рівнаня:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m = 0,$$

---

[1]) Journal de Mathématiques т. 5.

[2]) loc. cit. т. 16.

де a_s є числа рацнональні, то числа переступні не є коренями такого рівнаня, отже не мож їх одержати з сочинників рівнаня через рациональні діланя, до яких що найбільше можна єще зачислити витяганє коренів.

Довгі часи стояла непорішена квестия, чи згадані числа e і π, а бодай їх степені є числами альґебраічними, чи ні, але аж в найновійших часах виказав Hermite, що число e є переступне, а в кілька літ пізнїйше доказав сього твердженя також і що до числа π Lindemann. Докази тих математиків є доволї скомплїковані, опирають ся на певних інтеґралах і свойствах рівнань альґебраічних, тому-то для ширшого загалу математичного були досить недоступні; длятого пізнїйші математики старали ся звести ті докази до форми можливо простої. І так Weierstrass подав простїйший доказ переступу числа π, хоть і сей доказ потребує помічних тверджень і знакомости розслїдів Hermite'a. Допервa послїдними роками подав Hilbert доказ переступу чисел e і π, де вистане просте знанє рахунку інтеґрального; єще дальше пішов Hurwitz, що подав доказ переступу числа e лиш при помочи рахунку ріжничкового, а найдальше в тім згляді пішов Gordan, бо його доказ переступу чисел e і π зовсїм обходить ся без знакомости рахунку інфінітезімального, а що найбільше до єго зрозуміня треба знати деякі понятя з теориї рядів.

Розвідка нинїшня має за завданє представити всї ті розслїди способом ґенетичним, так як они слїдували по собі від глубоких, в женїяльний спосіб при помочи висших средств аналїзи математичної переведених розслїдів Hermite'a і Lindemanna до простих розслїдів Gordana. Перша часть містити-ме розслїди про число e, друга розслїди про число π; окінченєм сеї розвідки є згадана уже квестия квадратури кола.

ЧАСТЬ ПЕРША.

Розслїди Hermite'a.[1])

1. Основною точкою розслїдів Hermite'a є твердженє, що для якої небудь степени μ всегда дасть ся найти якась

[1]) Поміщені они в Hermite'a: Sur la fonction exponentielle, Paris 1874, як також в Journal f. r. u. a. Mathematik, том 76, ст. 303 і 342.

Функция $\frac{M(x)}{N(x)}$, що в приближеню (яко дроб приближений) представляти-ме функцию виложну e^x. Твердженя сього докажемо тепер.

Возьмім функцию цїлковиту $f(z)$ степени μ і положім:

$$\frac{f(z)}{x} + \frac{f'(z)}{x^2} + \cdots + \frac{f^{(\mu)}(z)}{x^{\mu+1}} = F(z),$$

то через частне інтеґрованє інтеґралу:

$$\int e^{-zx} f(z)\, dz.$$

дістанемо:

$$\int e^{-zx} f(z)\, dz = - e^{zx} F(z),$$

або в границях ζ і Z:

$$\int_{\zeta}^{Z} e^{-zx} f(z) dz = e^{-\zeta x} F(\zeta) - e^{-Zx} F(Z). \qquad 1)$$

Наколи приймемо, що є h-кратним, Z k-кратним коренєм рівнаня $f(z)=o$, отже що:

$$\text{для} \qquad f(\zeta) = f'(\zeta) = \cdots = f^{(h-1)}(\zeta) = o.$$

$$\text{для } Z \qquad f(Z) = f'(Z) = \cdots = f^{(k-1)}(Z) = o,$$

то дістанемо:

$$F(\zeta) = \frac{f^{(h)}(\zeta)}{x^{h+1}} + \cdots + \frac{f^{(\mu)}(\zeta)}{x^{\mu+1}}$$

$$F(Z) = \frac{f^{(k)}(Z)}{x^{k+1}} + \cdots + \frac{f^{(\mu)}(Z)}{x^{\mu+1}}$$

або:

$$F(Z) = \frac{M(x)}{x^{\mu+1}}, \qquad F(\zeta) = \frac{N(z)}{x^{\mu+1}},$$

де $M(x)$ є цїлковита функция степеня $m=\mu-k$, $N(x)$ степеня $n=\mu-h$.

Рівнанє 1) дасть тепер:

$$e^{-\zeta x} N(x) - e^{-Zx} M(x) = x^{\mu+1} \int_{\zeta}^{Z} e^{-zx} f(z) dz, \qquad 2)$$

а наколи єще заложу $\zeta=o$, то:

$$e^{Zx}N(x) - M(x) = x^{\mu+1}e^{Zx}\int_{o}^{Z} e^{-zx}f(z)dz.$$

Наколи по правій стороні за e^{Zx} і e^{-zx} положимо їх розвинення, то побачимо, що розвинене починає ся від $x^{\mu+1}$; за тім e^{Zx} дасть ся представити через дроб $\frac{M(x)}{N(x)}$ з приближенєм до μ-тої степени; q. e. d.

2. Возьмім:

$$f(z) = (z-z_0)^{m_0}(z-z_1)^{m_1} \quad (z-z_n)^{m_n},$$

а кромі сього возьмім єще функцию:

$$f_1(z) = (z-z_0)(z-z_1) \quad (z-z_n),$$

$$\mu = m_0 + m_1 + \quad + m_n,$$

то з загальної форми на $F(z)$ слїдно, що:

$$F(z_0) = \frac{N(x)}{x^{\mu+1}},\ F(z_1) = \frac{M_1(x)}{x^{\mu+1}}, \qquad F(z_n) = \frac{M_n(x)}{x^{\mu+1}},$$

де $N(x)$ є цїлковита функция арґументу x степеня $(\mu-m_0)$, $M_1(x)$ степеня $(\mu-m_1)$, $M_n(x)$ степеня $(\mu-m_n)$. З рівнаня 2) дістанемо для $i = 1, 2, 3, \quad n$:

$$e^{-z_0x}N(x) - e^{-z_ix}M_i(x) = x^{\mu+1}\int_{z_0}^{z_i} e^{-zx}f(z)dz,$$

а наколи єще заложимо $z_0=o$, то дістанемо:

$$e^{z_1x}N(x) - M_1(x) = x^{\mu+1}\int_{0}^{z_1} e^{(z_1-z)x}f(z)dz.$$

$$e^{z_2x}N(x) - M_2(x) = x^{\mu+1}\int_{0}^{z_2} e^{(z_2-z)x}f(z)dz.$$

$$e^{z_nx}N(x) - M_n(x) = x^{\mu+1}\int_{0}^{z_n} e^{(z_n-z)x}f(z)dz.$$

Позаяк розвинення правих сторін починають ся від $x^{\mu+1}$, то ті рівнаня дадуть приближеня для величин e^{z_1x}, e^{z_2x}, e^{z_nx} в видї приближених дробів: $\frac{M_1(x)}{N(x)}$, $\frac{M_2(x)}{N(x)}$, $\frac{M_n(x)}{N(x)}$ о рівних знаменниках.

3. Заложім тепер:

$$m_0 = m_1 = \cdots = m_n,$$

то: $f(z) = f_1(z)^m$.

Тодї дістанемо точно означений систем дробів приближених; систем сей змінить ся однак, наколи ми постенно за m будемо класти $m+1$, $m+2$, Однак кождий слїдуючий систем дасть ся обчислити на основі попередних системів, а то на основі обчисленя інтеґралів:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f_1(z)^m dz, \quad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f_1(z)^{m+1} dz, \quad \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f_1(z)^{m+2} dz,$$

і то слїдуючих з попередних.

Hermite обчислене се веде слїдуючим способом:

Через частне інтеґроване і увагу, що:

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{x-z_1} + \cdots + \frac{1}{z-z_n}$$

маємо:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} f_1(z)^m dz = m \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^m}{z-z_0} dz + \cdots + m \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^m}{z-z_n} dz.$$

Hermite доказує далї, що кождий інтеґрал:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^{m+1}}{z-\zeta} dz,$$

де ζ є одною з вартостий: $z_0, z_1, z_2,$ z_m, дасть ся представити в видї:

$$\int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^{m+1}}{z-\zeta} dz = m\varphi(z_0, \zeta) \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^m}{z-z_0} dz + \cdots + \quad (i = 1, 2, \quad n) \tag{3}$$

$$+ m\varphi(z_n, \zeta) \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^m}{z-z_0} dz$$

де $\varphi(z)$ є функцією цїлковитого виду:

$$\varphi(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n;$$

α_i обчисляють ся з рівнань:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= \zeta_1 + s_0 + n \\
\alpha_2 &= \zeta_2 + (s_0+n-1)\,\zeta_1 + (s_0+n)\,(s_0+n-1) + s_1 \\
\alpha_3 &= \zeta_3 + (s_0+n-2) \quad + \left[(s_0+n-1)\,(s_0+n-2) + s_1\right] \zeta_1 + \\
&\quad + (s_0+n)\,(s_0+n-1)\,(s_0+n-2) + (2s_0+2n \;\; 2)\,s_1 + s_2
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

де:

$$s_i = m\,(z_0{}^i + z_1{}^i + z_2{}^i + \cdots + z_n{}^i);$$

$\varphi(z s \zeta)$ показує залежність функції $\varphi(z)$ від параметру

Скоро возьмем сталу вартість z_i, а переходить всї вартости, дістанемо з 3) $(n+1)$ рівнань. Коли для скорочення положимо:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_m &= \frac{1}{m!}\int_{z_0}^{z_i} e^{-z}\, f_1(z)^m\, dz \\
\varepsilon_m{}^h &= \frac{1}{(m-1)!}\int_{z_0}^{z_i} e^{-z}\, \frac{f_1(z)^m}{z - z_h}\, dz
\end{aligned}\right. \quad 5)$$

отже:

$$\varepsilon_m = \varepsilon^0{}_m + \varepsilon^1{}_m + \varepsilon\,{}_m + \cdots + \varepsilon^n{}_m\,,$$

і наколи за m возьмемо в наших рівнанях $(m-1)$, то — $\varphi(z)$ змінить вартість, але не вид — дістанемо слїдуючі рівнаня:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon\,{}_m &= \varphi(z_0 z_0)\varepsilon^0{}_{m-1} + \varphi(z_1 z_0)\varepsilon^1{}_{m-1} + \cdots + \varphi(z_n z_0)\varepsilon^n{}_{m-1} \\
\varepsilon^1{}_m &= \varphi(z_0 z_1)\varepsilon^0{}_{m-1} + \varphi(z_1 z_1)\varepsilon^1{}_{m-1} + \cdots + \varphi(z_n z_1)\varepsilon^n{}_{m-1} \\
\\
\varepsilon^n{}_m &= \varphi(z_0 z_n)\varepsilon^0{}_{m-1} + \varphi(z_1 z_n)\varepsilon^1{}_{m-1} + \cdots + \varphi(z_n z_n)\varepsilon^n{}_{m-1}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Коли будемо класти $m = 2, 3,$ дістанемо цїлий систем рівнань лїнеарних, з котрих заможемо $\varepsilon^0{}_m$, $\varepsilon^1{}_m$, $\varepsilon^n{}_m$ лїнеарно представити через $\varepsilon_1{}^0$, $\varepsilon_1{}^1$, $\varepsilon_1{}^m$, отже:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_m &= a_0\varepsilon_1{}^0 + a_1\varepsilon_1{}^1 + \cdots + a_n\varepsilon_1{}^n \\ \varepsilon^1{}_m &= b_0\varepsilon_1{}^0 + b_1\varepsilon_1{}^1 + \cdots + b_n\varepsilon_1{}^n \\ \\ \varepsilon^n{}_m &= l_0\varepsilon_1{}^0 + l_1\varepsilon_1{}^1 + \cdots + l_n\varepsilon_1{}^n \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

В визначнику рівнань 6):

$$D = \begin{vmatrix} \varphi(z_0 z_0) & \varphi(z_1 z_0) & \varphi(z_n z_0) \\ \varphi(z_0 z_1) & \varphi(z_1 z_1) & \varphi(z_n z_1) \\ \\ \varphi(z_0 z_n) & \varphi(z_1 z_n) & \varphi(z_n z_n) \end{vmatrix}$$

загальний його член має на основі 4) вид:

$$\varphi(z_i z_k) = z_i^n + z_i^{n-1}\varphi_1(z_k) + \cdots + \varphi_n(z_k),$$

отже:

$$D = D_1 D_2, \qquad \text{де:}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} z_0^n & z_1^n & z_n^n \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & z_n^{n-1} \\ \\ z_0 & z_1 & z_n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Pi(z_i - z_k),\ D_2 = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ \varphi_1(z_0) & \varphi_1(z_1) & \varphi_1(z_n) \\ \\ \varphi_i(z_0) & \varphi_i(z_1) & \varphi_i(z_n) \\ \\ \varphi_n(z_0) & \varphi_n(z_1) & \varphi_n(z_n) \end{vmatrix}$$

А що:

$$(z_s) = x_i = z_s{}^i + c_1 z_s{}^{i-1} + c_2 z_s{}^{i-2} + \cdots + c_i,$$

то не тяжко доказати, що $D_2 = D_1$, отже що $D = D_1{}^2$.

Визначник рівнань 7), що походять зі зложеня лїнеарних систем рівнань, є очевидно рівний добуткови з визначників тих $(m-1)$ системів, отже рівнає ся $D_2{}^{2(m-1)} \gtrless 0$, бо функция $f_1(z)$ має всї корені $z_0\ z_1\ z_2\ \ z_n$ між собою ріжні.

4. Щоби найти вартости $\varepsilon_1{}^h$ для рівнань 7), виходить Hermite з інтеґралу:

$$\int e^{-z} \frac{f_1(z)}{z - \zeta}\, dz,$$

де ζ представляє один з коренів $z_0\ z_1\ z_2\ \ z_n$ рівнаня $f_1(z) = 0$, і доказує, що:

$$\int e^{-z} \frac{f_1(z)}{z-\zeta}\, dz = -e^{-z} f_2(z_1\zeta), \qquad 8)$$

де:

$$f_2(z\zeta) = z^n + \varphi^1(\zeta)z^{n-1} + \varphi^2(\zeta)z^{n-2} + \cdots + \varphi^n(\zeta),$$

а $\varphi^i(\zeta)$ є — як передше $\varphi_i(\zeta)$ — цїлковита функция арґументу степеня i; найвисший єї сочинник є 1, а прочі є цїлковиті симетричні функциї коренів $z_0\ z_1\ z_2 \quad z_n$, отже цїлї числа, коли ті коріні є цїлї. Тодї і всї вартости $f_2\ (z_i\ z_k)$ є цїлї числа, а позаяк они є анальоґічно зложені, як і $\varphi\ (z_i\ z_k)$, то визначник величин $f_2\ (z_i\ z_k)$ є також ріжний від зера.

З огляду на рівнаня 5) і 8) маємо:

$$\varepsilon_i^h = e^{-z_0} f_2(z_0 z_h) - e^{-z_i} f_2(z_i\ z_h),$$

а наколи місто $\varepsilon_m{}^h$ напишемо $\varepsilon_{i,\ m}{}^h$, щоби зазначити зависимість величин $\varepsilon_m{}^h$ від z_i, то дістанемо рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} {}_m{}^0 &= e^{-z_0}\alpha_0 - e^{-z_i}\alpha_i \\ {}_m{}^1 &= e^{-z_0}\beta_0 \quad\ e^{-z_i} \\ & \\ {}_m{}^n &= e^{-z_0}\lambda_0 - e^{-z_i}\lambda_i \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

де:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= a_0 f_2(z_i z_0) + a_1 f_2(z_i z_1) + \cdots + a_n f_2(z_i z_n) \\ & \\ \lambda_i &= l_0 f_2(z_i z_0) + l_2 f_2(z_i z_1) + \quad + l_n f_2(z_i z_n) \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Кількоразкорені $z_0\ z_1\ z_2 \quad z_n$ є цїлї числа, мусять і числа α_i, β_i, λ_i бути цїлї; бо тодї будуть не лиш всї числа $f_2(z_i z_k)$, але і всї величини $\varphi(z_i z_k)$, а також і всї сочинники a, b, l, утворені з таких виражень через додаване, відниманє і множенє числами цїлими.

5. На основі дотеперішних розслїдів легко вже перейти до доказу про переступ числа e. Бо наколиби e було числем альґебраічним, отже корінем якогось альґебраічного рівнаня о рацїональних сочинниках, то мусїлоб істнувати рівнанє:

$$e^{z_0} n_0 + e^{z_1} n_1 + \cdots + e^{z_n} n_n = 0 \qquad 11)$$

де n_i є цїлї числа, ріжні від зера, а $z_0\ z_1 \ldots z_n$ числа цїлї-додатні. Но наколи ті $z_0\ z_1 \ldots z_n$ виберемо так, що будуть корінями рівнаня $f_1(z) = 0$, то дістанемо з першого із рівнань 9), коли i переходить вартости $1, 2, \ldots n$:

$$\varepsilon^0_{1m} = e^{-z_0}\alpha_0 - e^{-z_1}\alpha_1$$
$$\varepsilon^0_{2m} = e^{-z_0}\alpha_0 - e^{-z_2}\alpha_2$$
$$\cdots$$
$$\varepsilon^0_{nm} = e^{-z_0}\alpha_0 - e^{-z_n}\alpha_n$$

а наколи ті рівнаня по черзі помножимо через $e^{z_1}n_1,\ e^{z_2}n_2, \ldots e^{z_n}n_n$ і додамо, дістанемо під заложенєм 11) рівнанє:

$$\alpha_0 n_0 + \alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_n n_n = -(e^{z_1}\varepsilon^0_{1m}n_1 + e^{z_2}\varepsilon^0_{2m}n_2 + \cdots + e^{z_n}\varepsilon^0_{nm}n_n). \qquad 12)$$

По лївій стороні є число цїле. Ходить о праву сторону. На основі теореми про середню вартість маємо:

$$\varepsilon_{im} = \frac{1}{1.2.3 \cdots (m-1)} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f_1(z)^m}{z - z_0} dz = \frac{1}{1.2.3 \ldots (m-1)} \frac{f_1(\zeta)^m}{\zeta - z_0} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} dz =$$
$$= \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{f_1(\zeta)^{m-1}}{1.2.3 \cdots (m-1)} (e^{-z_0} - e^{-z_i}),$$

де ζ представляє певну вартість в інтервалї $(z_0 \ldots z_i)$. Позаяк при m ростучім in inf. ε^0_{im}, як се з послїдного видко, без кінця меншає для якоїнебудь вартости i, то права сторона в 12) малїє при m ростучім без кінця, отже стає менша від 1; наколи проте рівнанє 12) має оставатись для якогобудь m, мусить права сторона бути зером. Анальоґічно до рівнаня 12) дістанемо систему рівнань:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 n_0 + \alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_n n_n = 0. \\ \beta_0 n_0 + \beta_1 n_1 + \cdots + \beta_n n_n = 0. \\ \cdots \\ \lambda_0 n_0 + \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_n n_n = 0. \end{array}\right\} \qquad 13)$$

Се можливе лиш тодї, коли визначник тих рівнань, утворений з величин $\alpha_i\ \beta_i \ldots \lambda_i$, є зером; однак то послїдне **не може бути**, бо визначник той, як слїдує з рівнань 10), є добутком двох визначників, одного $D_2^{2(m-1)}$, другого D_2^2, а сей добуток, так як D_2, є ріжний від зера.

З відси слїдує, що рівнанє 11) не може істнувати, отже що **число e є переступне.**

Розсліди Hilbert'a, Hurwitz'a Gordan'a.[1])

1. Hilbert виходить з рівнаня:

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = o,$$

де a_r є числа цїлковиті раціональні; рівнанє се мусїло би істнувати, наколи би e було числом альґебраїчним.

Наколи се рівнанє помножимо через інтеґрал:

$$I = \int^{\infty} z^{\varrho} \Big[(z-1)\ (z-2) \qquad (z-n)\Big]^{\varrho+1} e^{-z}\, dz,$$

де ϱ є число цїле додатне, дістанемо вираженє:

$$a I + a_1 e I + a_2 e^2 I + \cdots + a_n e^n I = P_1 + P_2,$$

де:

$$P_1 = a \int_0^{\infty} + a_1 e \int^{\infty} + a_2 e^2 \int_2^{\infty} + \cdots + a_n e^n \int^{\infty}$$

$$P_2 = \qquad a_1 e \int_0^{1} + a_2 e^2 \int_0^{2} + \cdots + a_n e^n \int_0^{n}$$

Але:

$$\int_0^{\infty} z^{\varrho} e^{-z}\, dz = \Gamma(\varrho+1) = \varrho!\ ^{1})$$

де $\Gamma(\varrho+1)$ є звісним інтеґралом Euler'a, проте I є число раціональне цїле, подїльне через $\varrho!$, а коли за z будемо брати підставленя:

$$z = z' + 1,\ \ z' + 2, \qquad z' + n,$$

то дістанемо, що і інтеґрали:

$$e \int_1^{\infty} \qquad e^2 \int_2^{\infty}, \qquad e^n \int_n^{\infty}$$

---

[1]) Розсліди Hilbert'a поміщені в Göttinger Nachrichten 1893 N. 2, розсліди Hurwitz'a ibidem N. 4, розсліди Gordana в Mathematische Annalen т. 43 ст. 222.

[2]) Гл. н. пр. Schlömilch. Handbuch der Mathematik II. 609.

є числа цїлї раціональні, подїльні через $(\rho+1)!$. Отже P_1 є число цїле, подїльне через $\rho!$, і в виду сього істнувати мусить конґруенция:

$$\frac{P_1}{\rho!} \equiv \pm\, a \left[n! \right]^{\rho+1} \left(\text{mod. } \rho+1 \right) \quad 1)$$

Коли в інтервалї $z = (o \quad n)$ є:

$$\text{Max. } z(z-1)(z-2) \quad (z-n) = k_1$$
$$\text{Max. } (z-1)(z-2) \quad (z-n)\, e^{-z} = k_2$$

то очевидно, що:

$$\left| \int_0^1 \right| < k_2\, k_1{}^{\rho}\,, \quad \left| \int_0^2 \right| < 2\, k_2\, k_1{}^{\rho}\,, \qquad \left| \int_0^n \right| < n\, k_2\, k_1{}^{\rho}\,,$$

а коли положимо:

$$k = \left\{ \left| a_1 e \right| + 2 \left| a_2 e^2 \right| + \cdots + n \left| a_n e^n \right| \right\} k_2,$$

то тодї дістанемо:

$$\left| P_2 \right| < k\, k_1{}^{\rho}. \qquad 2)$$

Виберім ρ (цїлковите) так, щоби оно було подїльне через цїле число $an!$ і щоби $n\frac{k_1{}^{\rho}}{\rho!} < 1$. Тодї на основі конґруенциї 1) $\frac{P_1}{\rho!}$ є число цїле неподїльне через $(\rho+1)$, отже $\frac{P_1}{\rho!} \lesseqgtr o$, а позаяк на основі 2) $\frac{P_2}{\rho!} < 1$, то рівнанє:

$$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = o$$

не істнує. Не істнує тодї і рівнанє, з якого ми вийшли, отже e є числом переступним.

2. Hurwitz бере функцию $f(x)$ цїлковиту рацйональну степеня ρ арґументу x і кладе:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(\rho)}(x) \qquad 1)$$

то тодї

$$\frac{d}{dx} \Big(e^{-x}\, F(x) \Big) = -e^{-x} f(x).$$

А позаяк в загалї:

$$\varphi(x) - \varphi(o) = x\varphi'(\vartheta x) \qquad o < \vartheta < 1,$$

то:

$$e^{-x}F(x) - F(o) = -xe^{-\vartheta x}f(\vartheta x), \qquad \text{або:}$$

$$F(x) - e^{-x}F(o) = -xe^{(1-\vartheta)x}f(\vartheta x) \qquad o < \vartheta < 1. \qquad 2)$$

Приймім, що e є числом альґебраїчним, отже що істнує рівнанє:

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = o \qquad 3)$$

a_ν числа цїлї, а $a_0 < o$ (се можна все так вибрати).

Заложім, що:

$$f(x) = \frac{1}{(p-n)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \cdots (n-x)^p,$$

p число перве, більше від n; положім:

$x = 1, 2, 3, \ldots n,$ то дістанемо рівнаня:

$$\left.\begin{aligned} F(1) - eF(o) &= \varepsilon_1 \\ F(2) - e^2F(1) &= \varepsilon_2 \\ &\cdots \\ F(n) - e^nF(o) &= \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

де:

$$\varepsilon_k = -ke^{(1-\vartheta)k} \frac{(\vartheta k)^{p-1} (1-\vartheta k)^p \cdots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!}$$

$$\lim_{k=\infty} \varepsilon_k = o. \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Але після 1) дістанемо вартість функциї $F(k)$, наколи розвинемо $f(k+h)$ після степенів арґументу k, а опісля степенї $h, h^2, h^3, \cdots$ заступимо через $1!\ 2!\ 3!$

Проте **числа** $F(1), F(2), \ldots F(n)$ **є подїльні через** p, $F(o)$ **не є через** p **подїльне.**

З рівнань 4) і 3) слїдує:

$$a_1F(1) + a_2F(2) + \cdots + a_n F(n) + a_0F(o) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n.$$

А що для $\lim p=\infty$ права сторона стає безконечно мала, то мусить бути:

$$a_1F(1) + a_2F(2) + \cdots + a_n F(n) + a_0F(o) = o. \qquad 5)$$

Однак рівнане 5) не може істнувати, бо по лївій стороні є число через p неподільне. Не істнує отже і рівнане 3), або інакше число e є переступне.

3. Gordan бере під увагу ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots$$

і кладе символїчно:

$$r! = h^r;$$

наколи обі сторони помножимо через сю величину $r!$ і якусь сталу c_r, то дістанемо:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u^r,$$

де:

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} +$$

Наколи:

$$= | x \qquad \text{то} \qquad | u_r | < e^{\xi},$$

а наколи положимо:

$$u_r = q_r e^{\xi}, \qquad \text{то} \qquad q_r | < 1.$$

З 1) маємо:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r q_r e^{\xi},$$

$$e^x \sum_{r=0}^{s} c_r h^r = \sum_{r=0}^{s} c_r (x+h)^r + e^{\xi} \sum_{r=0} c_r q_r x^r;$$

положім:

$$\sum_{r=0}^{s} c_r x^r = \varphi(x), \quad \sum_{r=0} c_r q_r x^r = \psi(x),$$

то тодї:

$$e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^{\xi} \psi(x). \qquad 2)$$

Наколи би істнувало рівнане:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k e^k = 0,$$

то після 2) мусїло би бути:

$$o = \sum_{k=o}^{n} c_k \varphi(x+h) + \sum_{k=o}^{n} c_k \psi(k) e^k. \qquad 3)$$

Наколи возьмемо:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1!} \left[(1-x)(2 \quad x) \qquad (n-x) \right]^p,$$

де p є число перве, більше від n і від c_0, то $\varphi(h+k)$ будуть числа цїлї. Числа $\varphi(h+1)$, $\varphi(h+2)$, $\varphi(h+n)$ мають чинник p, число $c_0\varphi(h)$ не має його; коли p росте, і ψ стають безконечно малї, рівнане 3) не може протє істнувати, т. є. число e мусить бути переступне.

ЧАСТЬ ДРУГА.

Розслїди Lindemann'a.[1])

1. Розслїди Lindemanna мають слїдуючу основу: Наколи далоб ся доказати, що число e^ζ не є рациональне, коли ζ є числом альґебраїчним, то з рівнаня $e^{\pi i} = -1$ слїдує просто, що πi, отже і само π не є числом альґебраїчним, лиш переступним.

При тім вистане уважати яко цїле число альґебраїчне.[2])

Бо наколиби не було цїлим числом альґебраїчним і було коренем рівнаня:

$$\zeta^r + p_1\zeta^{r-1} + p_2\zeta^{r-2} + \cdots + p_r + o \qquad 1)$$

з рациональними сочинниками, так що можна покласти: $p_i = \frac{q_i}{q}$ де q і q_i є числа цїлї (q найбільший спільний знаменник), то $\zeta' = q\zeta$ сповняє рівнане:

$$\zeta'^r + Q_1\zeta'^{r-1} + \cdots + Q_r = o,$$

---

[1]) Поміщені они в Math. Annalen т. 20 ст. 213

[2]) Число альґебраїчне цїле є таке, що є коренем рівнаня альґебраїчного о цїлковитих сочинниках (гл. н. пр. Bachmann: Vorlesungen u. Natur der Irrationalzahlen ст. 3).

де Q_i є числа цїлї, отже ζ' є числом цїлим альґебраїчним, а наколи e^ζ є рационально, то і $e^{\zeta'} = (e^\zeta)^q$ є рационально. Наколи отже докажемо, що $e^{\zeta'}$ не є рационально, де ζ' є цїле число альґебраїчне, то сей доказ має значінє і для e^ζ, де є яке-небудь число альґебраїчне. Вистане протє розслїдити рівнанє 1) з рациональними сочинниками.

Приймем дальше, що рівнанє 1) є **неприводне** (irreductibel); бо наколиби оно було приводне, то булоби добутком неприводних чинників, з яких бодай один для ζ стає ся зером; отже ζ булоби коренем якогось рівнаня неприводного, яке тодї взялибисьмо за 1).

Наколи отже к ренї рівнаня 1) є $\zeta_1, \zeta_2, \quad \zeta_r$, то они є між собою ріжні, бо інакше рівнанє 1) булоби приводним:

Величини:

$$e^{\zeta_1},\ e^{\zeta_2} \qquad e^{\zeta_r} \qquad\qquad 2)$$

є отже коренями рівнаня:

$$(Z - e^{\zeta_1})\ (Z - e^{\zeta_2}) \qquad (Z - e^{\zeta_r}) = o, \qquad \text{або:}$$

$$Z^r + M_1 Z^{r-1} + M_2 Z^{r-2} + \cdots + M^r = o \qquad 3)$$

де сочинники (без огляду на знак) мають вид:

$$\Sigma\, e^{\zeta_1},\ \Sigma\, e^{\zeta_1+\zeta_2},\ \Sigma\, e^{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3}, \qquad e^{\zeta_1+\zeta_2+\cdots\zeta_r}.$$

Наколи би одна з величин 2) була рациональна н. пр. $e^{\zeta_1} = \frac{\mu}{\nu}$ то рівнанє 3) мусїло би сповнити ся для $Z = \frac{\mu}{\nu}$, отже мусїло би бути:

$$n_0 + n_1\ \Sigma\, e^{\zeta_1} + n_2\ \Sigma\, e^{\zeta_1+\zeta_2} + \cdots + n_r\ \Sigma \zeta_t = o, \qquad 4)$$

де $n_0, n_1, \quad n_r$ є числа цїлї. Наколи докажемо, що се рівнанє не є можливе, то тим самим докажемо переступу числа π.

Розслїдім ту случай, що для кождої функциї в виложнику:

$$\zeta_i,\ \ \zeta_i + \zeta_k,\ \ \zeta_i + \zeta_k + \zeta_l$$

альґебраїчно ріжні вартости, які ті функциї при пермутациях коренів дістають, є і **нумерично** між собою ріжні, н. пр. всї вартости $\zeta_i + \zeta_k$ є між собою ріжні.

Наколи $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \quad \zeta_r)$ буде яка-небудь функция коренів ζ_i з цїлими сочинниками, то — як звісно з теориї рівнань — мусять ті нумерично ріжні вартости сочинників сповнити якесь рівнанє, що як 1) має цїлї сочинники і є неприводне. Позаяк тодї і вартости виложників в кождій сумі, які виступають в рівнаню 4), мусять бути коренями анальоґічного рівнаня, то нїякий з тих виложників не може бути зером. Дальше ми можемо приняти, що не лиш в однїй і тій самій сумі ті всї виложники є між собою ріжні, як оно вже дійсно є, але що і виложники ріжних сум є між собою ріжні; бо наколи би два такі виложники були собі рівні, то рівнаня неприводні, які они сповняють, мусїлиб бути ідентичні, отже мусїлиб мати усї коренї рівні; тодї булиб і ті суми виложників рівні, можнаб їх проте стягнути в один член, а тодї дісталибисьмо рівнанє такого самого виду, як і рівнанє 4), а з тим можна би поступати так дальше, як з 4), наколибисьмо приняли в тім рівнаню всї виложники ріжні від зера і ріжні між собою.

В кінци якенебудь представленє коренїв $\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_r$ має лиш то значінє, що в кождій сумі виложники тільки між собою рівночасно в якийсь спосіб поміняють ся.

2. Коли так є, то положім:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \zeta_1,\ z_2 = \zeta_2, \ldots z_r = \zeta_r, \\ z_{r+1},\ z_{r+2}, \ldots z_{r+\varrho} \text{ вартости, які мають} \\ \text{виложники другої суми, і т. д.} \\ z_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_r. \end{array}\right\} \quad 5)$$

то — як видко — $z_1, z_2 \ldots z_n$ є коренї рівнаня n. степеня[1]) о цїлих сочинниках, ріжні від зера і між собою.

Рівнанє 4) є проте лиш специяльним типом рівнаня 11) в розслїдах Hermite'a і тут дістанемо — анальоґічно як там з рівнаня 12) — рівнаня:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa_0\, n_0 + \sum\limits_{s=1}^{r} \varkappa_s \,.\, n_1 + \sum\limits_{r+1}^{r+\varrho} \varkappa_s \,.\, n_2 + \cdots + \varkappa_n\, n_n = \\ \beta_0\, n_0 + \sum\limits_{s=1}^{r} \beta_s \,.\, n_1 + \sum\limits_{r+1}^{r+\varrho} \beta_s \,.\, n_2 + \cdots + \beta_n\, n_n = \xi_1 \\ \ldots \\ \lambda_0\, n_0 + \sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s \,.\, n_1 + \sum\limits_{r+1}^{r+\varrho} \lambda_s \,.\, n_2 + \cdots + \lambda_n\, n_n = \xi_n \end{array}\right\} \quad 6)$$

[1]) Робити треба ріжницю між виразами: степень masc.=Grad, а степень fem=Potenz

де:

$$\xi_0 = -\Big[(e^{z_1}\varepsilon^0_{1,m} + \cdots + e^{z_r}\varepsilon^0_{r,m})n_1 + (e^{z_{r+1}}\varepsilon^0_{r+1,m} + \cdots + e^{z_{r+\varrho}}\varepsilon_{r+\varrho,m})\,n_2 + \\ + \cdots + e^{z_n}\varepsilon^0_{n,m}\, n_r\Big]$$

і т. д.

Наколи поміняєм z_i z_k, які належать до одної і тої самої ґрупи 5) коренів, н. пр. z_1 і z_2, то, позаяк:

$$\varepsilon^h_{i,m} = \frac{1}{1.\,2.\,3. \quad (m-1)} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z}\, \frac{f_1(z)^m}{z \quad z_h}\, dz,$$

то $\varepsilon_{1m}{}^h$ перейде в $\varepsilon_{2m}{}^h$ і навідворіть, наколи $h \lessgtr 1, 2$, а $\varepsilon_{g,m}{}^h$ не зміняє ся, наколи і $g \lessgtr 1, 2$. Отже н. пр. переходить:

$$\varepsilon^0_{1,m} = e^{-z_0}\,\alpha_0 - e^{-z_1}\,\alpha_1 \quad \text{в} \quad \varepsilon^0_{2,m} = e^{-z_0}\,\alpha_0 - e^{-z_2}\,\alpha_2$$

і навідворіть, а:

$$\varepsilon^0_{g,m} = e^{-z_0}\,\alpha_0 - e^{-z_g}\,\alpha_g$$

лишає ся без зміни, наколи перемінимо z_1 і z_2. Бачимо проте, що коли дві величини z_i і z_k одної з ґруп 5) з собою поміняємо, то в рівнанях 6) не зміняють ся ліві сторони кромі двох, які між собою поміняють ся; а іменно ліва сторона першого з тих рівнань всегда остає без зміни, бо вартість індексу h, який до неї належить, т. є. $h=o$, все є ріжна від i, k.

Позаяк кожда пермутация величин ε_1 ε_2 ε_k, при котрій тілько такі з тих величин між собою переміняємо, які належать до одної і тої самої з ґруп 5), повстає через ряд перемін двох величин z_i z_k одної і тої самої ґрупи, то можемо висказати еще загальнїйший результат, що при кождій пермутациї остає ліва сторона першого з рівнань 6) без зміни, а иньші з тих рівнань зміняють ся лиш між собою.

Но ми знаєм, що при яких-небудь переставленях коренів ζ_1 ζ_2 ζ_r такі лиш переміни можуть між тими величинами z_1 z_2 z_n виступати, про які ми що іно згадали. Можемо проте загально сказати:

П р и п е р е м і н а х к о р е н і в ζ_1 ζ_2 ζ_r о с т а є л ї в а с т о р о н а п е р ш о г о з р і в н а н ь 6) б е з з м і н и, а n в и р а ж е н ь, щ о є л ї в и м и с т о р о н а м и д а л ь ш и х р і в н а н ь 6), п е р е м і н я ю т ь с я м і ж с о б о ю, о т ж е в и р а ж е н я, у т в о р е н і с и м етрично з тих лївих сторін, остають без зміни. А тодї на основі звісного правила про симетричні функциї коренів слїдує, що лїва сторона першого з рівнань 6) є якимсь числом цїлим н. пр. u, а лїві сторони прочих n рівнань є коренями рівнаня n-того степеня:

$$v^n + u_1 v^{n-1} + u_2 v^{n-2} + \cdots + u^n = o, \qquad 7)$$

де усї сочинники u_i є числа цїлї.

3. Рівнаня 6) остають для всїлякої вартости m, отже і для $\lim m = \infty$. Погляньмо, що буде тодї з правими сторонами рівнань 6) т. є. з $\xi_0\ \xi_1 \ldots \xi_n$.

Щоби се розслїдити, возьмім інтеґрал:

$$I = \int_{z_0}^{z_1} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_h} dz,$$

де дорога інтеґрована є яка небудь, і виберім дорогу інтеґрованя так, що она не переходить через точки $z_1\ z_2 \ldots z_n$, а єї довгість є скінчена, рівна l_i^h. По тій дорозї задержить не лиш $f(z)$, але і $\frac{e^{-z}}{z - z_h}$ скінчені вартости, так що по тій дорозї:

$$|f(z)| \leqq M_i^h, \quad \left|\frac{e^{-z}}{z - z_h}\right| < M'^h_i,$$

де M_i^h і M_i^h мають скінчені вартости. А що інтеґрал I, як з рахунку інтеґрального звісно, можна уважати за суму безконечно много додатників:

$$\frac{e^{-z}}{z - z_h} f(z)^m \left[z_{k+1} - z_k\right],$$

то на основі правила о беззглядній вартости суми є:

$$|I| \leqq \sum \left|\frac{e^{-z}}{z - z_h}\right| |f(z)|^m |z_{k+1} - z_k|,$$

а тим більше:

$$|I| \leqq \sum M'^h_i (M_i^h)^m |z_{k+1} - z_k|.$$

Але:

$$\sum |z_{k+1} - z_k| = l_i^h \text{ (дорога)},$$

отже:

$$| I | \leqq (M_i^h)^m M'^h_i l_i^h,$$

або:

$$| \ _{i,m}^h | \leqq \frac{(M_i^h)^m M'^h_i l_i^h}{1. 2. 3. \quad (m-1)}.$$

Наколи з поміж всїх вартостий $M_i h$, $M'_i h$, $l_i h$ найбільші є M, M', l, то для якого-небудь $\varepsilon_{i,m}^h$ мусить бути:

$$| \ _m^h | \leqq \frac{M^{m-1}}{1. 2 \ 3. \quad (m-1)} M M' l.$$

Але M, M', l не є від *m* залежні, тому-то та послїдна границя стає ся для lim m=∞ безконечно мала. То само буде і з $|\varepsilon_{i,m}^h|$, отже і з $|\xi_0|$, $|\xi_n|$, а позаяк лїва сторона першого з рівнань 6) є числом цїлим, то для всїх m>μ мусить ξ_0=o.

Однак лїві сторони прочих рівнань 6) були коренями рівнаня 7); але позаяк ті корені можна для всїх m>μ зробити безконечно малими, то то само дїє ся і з u_1 u_2 u_n, а що то є числа цїлї, то мусить бути $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = o$.

Отже і коренї рівнаня 7), т. є лїві сторони в 6) мусять бути зером т. є.

$$n_0 \alpha_0 + n_1 \sum_{s=1}^{r} \alpha_s + n_2 \sum_{r+1}^{r+\varrho} \alpha_s + \cdots + n_n \alpha_n = o.$$

$$n_0 \beta_0 + n_1 \sum_{s=1}^{r} \beta_s + n_2 \sum_{r+1}^{r+\varrho} \beta_s + \cdots + n_n \beta_n = o.$$

$$n_0 \lambda_0 + n_1 \sum_{s=1}^{r} \lambda_s + n_2 \sum_{r+1}^{r+\varrho} \lambda_s + \cdots + n_n \lambda_n = o.$$

А що n_i не можуть всї бути зером, то мусить їх визначник бути зером. Се моглоб лиш тодї бути, наколиб як в розслїдах Hermite'а — визначник рівнаня о коренях z_1 z_2 z_n був зером, а се не може бути, бо ті величині, як ми приняли, є між собою ріжні. Заложенє, з якого ми вийшли, є проте неможливе, або π є числом переступним.

4. Щоби наш доказ був повний, треба би еще доказати, що він еще й тодї стійний, наколи ті альґебраічно ріжні вартости функций $\zeta_1+\zeta_2$, $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$, ..., що приходять в рівнаню 4), не всї є між собою нумерично ріжні. Того переходити не будемо, бо із сказаного уже достаточно слїдний спосіб, в який Lindemann перевів доказ переступу числа π.

Розслїди Weierstrass'a.[1]

1. Weierstrass перевів доказ переступу числа π на основі певного твердженя з теориї функций, яке ми ту лиш без доказу наводим.[2]) Звучить оно:

Наколи істнує функция цїлковита $f(z)$ степеня $(n+1)$ з коренями $z_0\ z_1\ z_2 \quad z_n$, між собою ріжними, то істнує систем

$$g_0(z),\ g_1(z), \qquad g_n(z)$$

$(n+1)$ цїлковитих функций арґументу z, степеня що найбільше n, таких, що визначник величин $g_i(z_k)$ є ріжний від зера, а кожда ріжниця:

$$g_i(z_0)\,e^{z_k} - g_i(z_k)\,e^{z_0} \qquad (i, k = o, 1, 2, \quad n)$$

є така, що:

$$|\, g_i(z_0)\,e^{z_k} - g_i(z_k)\,e^{z_0}\,| < \delta,$$

де δ є число додатне, дуже мале.

2. На основі сього твердженя перейдім до дальших розслїдів над числом π.

Звісно, що рівнанє: $e^x+1=o$ має лиш коренї $x=(2n+1)\pi i$. Наколи отже покажемо, що вираженє e^x+1 є ріжне від зера, наколи x є числом альґебраічним, то слїдує з того, що кожда вартість $x=(n+1)\pi i$, отже і π, не може бути числом альґебраічним.

Щоби сей доказ перевести, возьмім якесь рівнанє:

$$x^r + C_1 x^{r-1} + C_2 x^{r-2} + \cdots + C_r = o \qquad 1)$$

---

[1]) Гл. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1885 p. 1067.

[2]) Доказ сього твердженя є н. пр. у Bachmanna loc. cit. ст. 115.

де сочинники є рациональні, а степень $r \gtrless 2$; корені, які без жадного значіня для загального доказу можна взяти між собою ріжні, є $x_1\, x_2 \dots x_r$.

Возьмім добуток:

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1) \quad \text{і анальоґічний} \quad \prod_{h=1}^{r} (e^{\xi_h} + 1),$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_r$ є якісь неозначені величини, то загальний член того добутка є: $e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r}$, де $\varepsilon = 0, 1$, отже:

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{\xi_h} + 1) = \Sigma\, e^{\varepsilon_1 \xi_1 + \varepsilon_2 \xi_2 + \cdots + \varepsilon_r \xi_r},$$

де за ε_i взято всї можливі комбінациї з 1 і 0; та сума має проте $p = 2^r$ додатників. Наколи в тій сумі уложимо єї виложники в якийсь спосіб і назначимо їх $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_{p-1}$, то:

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{\xi_h} + 1) = \sum_{k=o}^{p-1} e^{\zeta_k}. \qquad 2)$$

А наколи вартости тих $\zeta_0\, \zeta_1 \dots \zeta_{p-1}$ є $z_0\, z_1 \dots z_{p-1}$ в тім случаю, коли неозначеним $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_r$ дамо вартість означену $x_1\, x_2 \dots x_r$, то дістанемо:

$$\prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1) = \sum_{k=o}^{p-1} e^{z_k}. \qquad 3)$$

Приймім, що між вартостями $z_0\, z_1 \dots z_{p-1}$ є $(n+1)$ ріжних між собою; позаяк між тими вартостями, наколи всї ε положимо рівні 0, кромі одного, яке приймемо рівне 1, находять ся і корені $x_1\, x_2 \dots x_r$, то $(n+1)$ є очевидно більше як 1, вираженя $\zeta_0 \zeta_1 \cdots \zeta_{p-1}$ може при тім так уложити, що величини $z_0, z_1, z_2, \dots z_n$ будуть як раз тими в е л и ч и н а м и z_i, які є між собою ріжні, і що $z_0 = o$. Коли оно так є, то м о ж н а все утворити цїлковиту функцию $f(z)$ $(n+1)$-ого с т е п е н я, я к а має за корені ті вартости $z_0\, z_1\, z_2 \dots z_n$.

Бо возьмім добуток:

$$\prod_{k=o}^{p-1} (z - \zeta_k) = \Pi\, (z - \varepsilon_1\, \xi_1 - \varepsilon_2\, \xi_2 - \cdots - \varepsilon_r\, \xi_r),$$

де послїдний добуток відносить ся до всїх p комбінаций вартостий $\varepsilon_i = 1, 0$, то сей добуток є очевидно цїлковита функция величин $z, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_r$ і то функция що до ξ_i симетрична. Наколи ті ξ_i приймуть вартість x_i коренів рівнаня 1), то добуток $\prod_{k=o}^{p-1} (z-z_k)$ буде цїлковита функция арґументу z, а єї сочинники будуть цїлковитими симетричними функциями тих коренів, отже цїлковитими функциями сочинників рівнаня альґебраічного; а що ті сочинники — як ми приняли — є рациональні, то сей добуток буде цїлковитою функцією арґументу z з рациональними сочинниками. Наколи сю цїлковиту функцию назвемо $\psi(z)$ і подїлимо через найбільший спільний подїльник, який мають $\psi(z)$ і єї походна $\psi'(z)$, то сей квот буде мав також рациональні сочинники, але коренями його будуть лиш ті z_k, що є між собою ріжні, т. є. $z_0, z_1, \ldots z_n$; наколи сей квот помножимо через найбільший спільний знаменник тих сочинників, то дістанемо функцию $f(z)$ $(n+1)$-ого степеня з цїлковитими сочинниками, а єї коренями є $z_0\, z_1 \ldots z_n$. Q. E. D.

3. Наколи пристосуємо помічне твердженє Weierstrass'а до сеї функциї $f(z)$, то мусить істнувати $(n+1)$ цїлковитих функций $g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$ таких, що для $z_0 = o$:

$$| g_i(o)\, e^{z_k} - g_i(z_k) | < \varepsilon$$

або:

$$g_i(o)\, e^{z_k} - g_i(z_k) = \varepsilon_{i,k}\, \varepsilon, \qquad | \varepsilon_k | < 1,$$

а визначник з $g_i(z_k)$ є ріжний від зера.

Наколи зсумуємо послїдне вираженє, дістанемо:

$$a_0^n\, g_i(o) \sum_{k=o}^{p-1} e^{z_k} = \sum_{k=o}^{p-1} a_0^n\, g_i(z_k) + \varepsilon a_0^n \sum_{k=o}^{p-1} \varepsilon_{i,k},$$

а що:

$$\left| \sum_{k=o}^{p-1} \varepsilon_k \right| \leq p, \qquad \text{то:}$$

$$a_0^n\, g_i(o) \sum_{k=o}^{p-1} e^{z_k} = \sum_{k=o}^{p-1} a_0^n\, g_i(z_k) + \eta_i, \qquad \eta_i < 1. \quad 4)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Щоби ліпше пізнати суму по правій стороні, возьмім анальоґічну суму:

$$\sum_{k=o}^{n} a_0^n g_i(\zeta_k) = \sum a_0^n g_i(\varepsilon_1 \xi_1 + \ldots + \varepsilon_r \xi_r),$$

де послідна сума відносить ся до всїх комбінаций вартостий $\varepsilon_i = 0, 1$. Позаяк g_i є цїлковита функция, то і та сума є цїлковита функция величин $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r$ і то симетрична; отже й сума:

$$\sum a_0^n g_i(z_k) \qquad 5)$$

є цїлковита симетрична функция величин $x_1 x_2 \ldots x_r$ т. є. коренів рівнаня 1), отже цїлковита функция сочинників того рівнаня, отже число рациональне. З другої сторони g_i є цілковита функция що найвисше степеня n, а проте:

$$a_0^n g_i(z_k) = A_0(a_0 z_k)^n + A_1(a_0 z_k)^{n-1} + \ldots + A_n,$$

де A_s є числа цїлї. А що z_k яко корень рівнаня $f(z) = o$ є цїле альґебраічне число, то і $a z_k$, а що за тім йде, і $a_0^n g_i(z_k)$ є цїле альґебраічне число.[1] Але цїле альґебраічне число, коли є рациональне, є і цїлковите,[2] проте сума 5) є звичайне цїле число.

Однак се цїле число не може для всїх вартостий $i = o, 1, 2, \ldots n$ бути зером. Бо наколи в сумі 5) зберемо разом ті вирази, де z_k має ту саму вартість, то суму ту можна написати також:

$$\sum_{k=o}^{n} n_k g_i(z_k) \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n),$$

де n_k представляє самі додатні цїлї числа; тих $(n+1)$ виражень не можуть рівночасно бути зером, бо тодї їх визначник був би зером, що противить ся твердженю Weierstrass'a.

Істнує отже напевно бодай одна вартість i, для якої в рівнаню 4) перший вираз правої сторони є цїлим числом, ріжним від зера, а проте цїла права сторона не є зером. Для сеї вартости i буде тодї і ліва сторона т. є. на основі рівнаня 3) добуток:

$$a_0^n g_i(o) \prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1)$$

---

[1]) Глянь н. пр. Bachmann, loc. cit. ст. 18.

[2]) ibidem ст. 3.

ріжний від зера; отже ніякий з чинників ($e^{x_h}+1$) не може бути зером, наколи x є числом альґебраїчним, бо x_h яко корень рівнаня 1) представляє якенебудь число альґебраїчне. Навіть для $r=1$, який-то случай ми при рівнаню 1) виключили, було би x числом рациональним, яко корень рівнаня першого степеня, а що e^x для x рационального є більше від зера, то і в тім случаю $e^x + 1 > 0$.

Маємо проте повний доказ, що число π є переступне. Q. e. d.

Розслїди Hilbert'a і Gordan'a.

1. Приймім, як каже Hilbert, що π є числом альґебраїчним, і що $\alpha_1 = i\pi$ сповняє рівнанє n-того степеня з сочинниками цїлковитими. Коли прочі коренї сього рівнаня є $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n$, то позаяк $1 + e^{i\pi} = o$, то і вираженє:

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2}) \quad (1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = o; \quad 1)$$

виложники $\beta_1 \beta_2 \quad \beta_N$, як се видко, є коренями рівнаня степеня N з цїлковитими сочинниками. Наколи M виложників $\beta_1 \beta_2 \quad \beta_M$ є ріжні від зера, а прочі є зером, то ті виложники $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_M$ є коренями рівнаня виду:

$$f(z) = bz^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_M = o,$$

де сочинники є також числами цїлими, а послїдний сочинник b_M є від зера ріжний. Тодї рівнанє 1) прибере вид:

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + \beta_M,$$

де a є цїлковите і додатне. Помножім се вираженє через інтеґрал:

$$I = \int^{\infty} z^{\varrho} \left[g(z) \right]^{\varrho+1} e^{-z}\, dz,$$

де ϱ є число цїле додатне і де:

$$g(z) = b^M f(z).$$

Тодї вираженє:

$$a\, I + e^{\beta_1} I + \quad + e^{\beta_M} I$$

розпаде ся на два виражения:

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + \cdots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty$$

$$P_2 = \qquad e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M}$$

де в загалї інтеґрал $\int_{\beta_i}^\infty$ розтягає ся в площи арґументу $z=x+iy$ від $z=\beta_i$ до $z=\infty$ подовж простої рівнобіжної до оси чисел дїйсних, а інтеґрал $\int_0^{\beta_i}$ від точки $z=o$ до $z=\beta_i$ подовж простої, що лучить ті дві точки.

Інтеґрал $\int_0^\infty$ є знова числом рациональним цїлковитим, подїльним через $\rho!$ і істнує, як се очевидно, конґруенция:

$$\frac{1}{\rho!}\int_0^\infty \equiv b^{\rho M+M}\, b_M{}^{\rho+1} \;\left(\bmod.\ \rho+1\right).$$

Положім $z=z'+\beta_i$, то з огляду на $g(\beta_i)=o$ маємо:

$$e^{\beta_i}\int_0^\infty = \int_0^\infty (z'+\beta_i)^\rho \left[\, g(z'+\beta_i)\,\right]^{\rho+1} e^{-z'}dz' = (\rho+1)!\; G(\beta_i),$$

де $G(\beta_i)$ є функция цїлковита арґументу β_i степеня низшого від числа $(\rho M+M)$, о сочинниках цїлих, подїльних через $b^{\rho M+M}$.

Позаяк $\beta_1 \ldots \beta_M$ є коренї рівнаня $f(z)=o$ о сочинниках цїлковитих, то наколи їх помножимо через перший сочинник b, то они стають числами цїлими альґебраїчними, отже:

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \cdots + G(\beta_M)$$

є доконче числом цїлим рациональним. Звідси слїдує, що P_1 є число цїле рациональне, подїльне через $\rho!$ і що істнує конґруенция:

$$\frac{P_1}{\rho!} \equiv a b^{\rho M+M}\, b_M{}^{\rho+1} \;\left(\bmod.\ \rho+1\right) \qquad 2)$$

З другої сторони, коли:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Max}\ zg(z) = k_1 \\ \mathrm{Max}\ g(z)\, e^{-z} = k_2 \end{array}\right\}$$ по дорогах просточертних від $z=o$ до $z=\beta_i$,

то:

$$\left| \int_0^{\beta_i} \right| < |\beta_i \quad k_2 \, k\varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \quad M),$$

отже наколи положимо:

$$k = \left\{ |\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \cdots + |\beta_M e^{\beta_M}| \right\} k_2,$$

то:

$$|P_2 \quad < k \, k\varrho_1. \qquad 3)$$

Виберім ρ так, щоби оно було подїльне через abb_M і щоби $k\frac{k\varrho_2}{\rho!} < 1$. Тодї на основі 2) є $\frac{P_1}{\rho!}$ — числом неподїльним через $(\rho+1)$, отже $\frac{P_1}{\rho!} \lesseqgtr o$, а позаяк після 3) $\left|\frac{P_2}{\rho!}\right| < 1$, то рівнанє:

$$\frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = o$$

є неможливе, отже **число π є переступне.**

2. Наколи би, як каже Gordan, $i\pi$ було коренем рівнаня з цїлими сочинниками:

$$c(x-w_1)\,(x-w_2) \qquad (x-w_\varrho) = o \qquad 1)$$

то було би:

$$(1+e^{w_1})\,(1+e^{w_2}) \cdots (1+e^{w_\varrho}) = o. \qquad 2)$$

Найже між сумами:

$$w_k\,, \;\; w_i + w_k\,, \;\; w_i + w_k + w_\lambda\,,$$

находить ся $(C-1)$ величин рівних зеру, то наколи прочі є:

$$\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \alpha_3 \qquad \alpha_n\,,$$

а їх беззглядні вартости є:

$$a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \qquad a_n\,,$$

то після 2).

$$0 = C + \sum_{k}^{k=n} e^{\alpha_k}.$$

Функциї симетричні так величин cw_k, як і $c\alpha_k$ є числами цїлими.

Однак на основі рівнаня (пор. Gordan'a розслїди над числом e):

$$e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^\xi \psi(x)$$

буде:

$$0 = C\varphi(h) + \sum_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k + h) + \sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k} \psi(\alpha_k) \qquad 3)$$

Возьмім:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\, c^{np+p-1} \left[(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2) \quad (x-\alpha_n)\right]^p,$$

де p є число перве, більше від кождого з чисел:

$$C,\ n,\ c,\ c^n\ \alpha_1\ \alpha_2 \quad \alpha_n .$$

Величини $\varphi(h)$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k + h)$ є числа цїлї; $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\alpha_k + h)$ має чинник p, а $C\varphi(h)$ не має сього чинника. Коли p росте, $|\varphi|$ і $|\psi|$ малїють без кінця. Рівнанє 3) не може проте істнувати, отже число π є переступне.

Квадратура кола.

Доказ переступу числа π є заразом доказом на се, що розвязанє т. зв. проблєму квадратури кола є неможливе. Перевести квадратуру кола значилоб визначити квадрат, котрого поверхня рівнає ся поверхнї даного кола. Коло є визначене, коли в ньому є луч звісний, отже розвязанє квадратури кола зводить ся до способу, щоб винайти таку конструкцию, на основі якої з луча можнаб винайти бік квадрату. Ґеометри, що поставили сю задачу, знали лиш лїнїю і циркель, отже розвязанє квадратури кола сходить на задачу, з луча, який можна приняти за одиницю довгости, винайти через конструкцию при помочи лїнїї і циркля бік квадрату рівного що до поверхнї даному колу.

Однак така конструкция є просто неможлива. Бо всїлякі конструкциї ґеометричні, які розвязують ся при помочи лїнїї і циркля, зводять ся до двох задач: 1) до трох довгостий винайти четверту пропорциональну, отже розвязати пропорцию:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c},$$

2) до двох довгостий найти середню пропорціональну, отже розвязати пропорцию:

$$x^2 = ab.$$

При розвязаню таких задач дістаєм x через самі рациональні операциї, до яких що найбільше зачисляєм корень; але у нас:

$$x = r^2\pi,$$

або коли $r=1$, то $x=\pi$; щоби квадратура була можлива, мусїлоб π бути числом альґебраічним, а що π є переступне, то й **квадратура кола є неможлива.**

Так отже порішено вже раз сей проблєм, що довгі лїта занимав многих учених, подібно як і другий проблєм „perpetuum mobile"; оба ті проблєми пішли там, де від давна було властиве їх місце, і почивають супокійно побіч множества иньших того рода неумістних задач в забутю. Над змаганями деяких профанів, от хоть би в найновійших часах д. Клїмашевского,[1]) щоби сей проблєм з забутя знова витягнути на сьвітло денне, наука може лиш з милосердієм здвигнути раменами, що найбільше якийсь час може він забавляти в щоденній пресї ширшу публїку, що не все знає відділити правду від неправди.

Тернопіль в надолистї 1896 р.

[1]) Klimaszewski: La solution de quadrature du cercle. Paris 1896.