Права руху маятника

(на основі теориї функций еліптичних)

написав

КЛИМ ГАЇБОВИЦКИЙ.

1. Возьмім точку материяльну о масї $m = 1$, що є завішена на нитцї о сталій довготї l. Наколи нитку виведемо з положеня прямовісного і надамо сій точцї якусь скорість, так що ту точку вихилимо з площі прямовісної, що переходить через нитку, — тодї ся точка материяльна мусить оставати на поверхнї кулї о лучу l, якої середоточкою є неподвижний конець нитки.

Наколи позему площу, що переходить через неподвижний конець нитки, уважати мемо за пл. (xy), сей неподвижний конець за початок сорядних, а прям звернений на долину за вісь z, то дістанемо на складові сили:

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = 2g,$$

при чім прискорене земне приймаємо за $2g$. А так як точка остає на поверхнї:

$$F(xyz) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = o \qquad 1)$$

то дістанемо слїдуючі рівнаня руху після засади d'Alembert-a:[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\lambda x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\lambda y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 2\lambda z + 2g \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

[1]) Пор. н. пр. Fabian: Zarys mechaniki analitycznej ст. 78.

де:

$$\lambda = \frac{N}{\omega},$$

N опір, який ставляє поверхня, а:

$$\omega = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Два перші рівнаня дадуть по з'інтеґрованю:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k. \qquad 3)$$

Наколи на площі (xy) введемо сорядні бігунові:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

отже:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}$$

одержимо місто 3):

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = k \qquad 4)$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ є скорість кутова в часї t, а:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad r^2 + z^2 = l^2,$$
$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2. \qquad 4').$$

Наколи рівнаня 2) помножимо по черзї через $2\frac{dx}{dt}, 2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$ та додамо, дістанемо реляцию:

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = 2g\,dz + 2\lambda(xdx + ydy + zdz) \qquad 5),$$

а що після 1)

$$xdx + ydy + zdz = o,$$

а:

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} + \frac{1}{2}\,\frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\,d(v^2),$$

проте рівнанє 5) перейде на:

$$d(v^2) = 4g\,dz,$$

отже:

$$v^2 = 4gz + h. \qquad 6)$$

Сталу інтеґрованя h найдемо, коли заложимо, що на початку часу до $t{=}t_0$ належать вартости $v{=}v_0$, $z{=}z_0$; тоді:

$$h = v_0{}^2 - 4g\,z_0.$$

Тоді рівнане 6) з огляду на рівнаня 4') можна написати:

$$\frac{dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2}{dt^2} = 4gz + h, \qquad 7)$$

а так як з рівнаня $r^2 + z^2 = l^2$ через ріжничковане вийде:

$$r\,dr + z\,dz = o, \qquad \text{або:}$$

$$dr^2 = \frac{z^2dz^2}{r^2} = \frac{z^2}{l^2-z^2}\,dz^2$$

та що з 4):

$$r\left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) = k \qquad \text{або:}$$

$$r^2\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{k^2}{r^2} \qquad 8)$$

то рівнане 7) дасть:

$$l^2\,\frac{dz^2}{dt^2} = (4gz + h)\,(l^2 - z^2) - k^2$$

або:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(4gz + h\right)\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right) - \frac{k^2}{l^2} = R(z) \qquad 9)$$

2. Рівнане $R(z) = o$ є третого степеня; розслідім проте єго корені.

Для $z = -\infty$ перейде $R(z)$ в $+\infty$, для $z = -l$ перейде воно в $-k^2$, рівнане $R(z) = o$ має проте один корінь, чисельно більший як l; корень сей най буде $-\gamma$; но таке z не є для нас придатне.

Наколи скорість початкова v_0 заключає кут α з прямом полуденника, в якім остає нитка на початку часу, то $v_0\cos\alpha$ є початкова скорість в площі рівнобіжника т. є. початкова вартість добутка $r\frac{d\varphi}{dt}$; отже після 8)

$$v_0\cos\alpha = \frac{k}{r_0}, \qquad \text{або:}$$

$$k = r_0\,v_0\cos\alpha.$$

Наколи вставимо в 9) вартости за k та h, одержимо:

$$4gz^3 + (v_0{}^2 - 4gz_0)\, z^2 - 4gl^2 z + r_0{}^2 v_0{}^2 \cos^2\alpha - (v_0{}^2 - 4gz_0)\, l^2 = o.$$

Для $z = z_0$ переходить ліва сторона сього рівняня на:

$$v_0{}^2 (z_0{}^2 + r_0{}^2 \cos^2\alpha - l^2) = - v_0{}^2 r_0{}^2 \sin^2\alpha,$$

а для $z = \pm l$ на:

$$r_0{}^2 v_0{}^2 \cos^2\alpha.$$

Рівнане се має проте один корінь між $-l$ а z_0, а другий між z_0 та $+l$. В проміжці $(-l \quad +l)$ маємо проте два корені α і β; найжеж $\alpha > \beta$.

Наколи так, то:

$$R(z) = - \frac{4g}{l^2} (z - \alpha)(z - \beta)(z + \gamma).$$

3. Не будемо ту розбирати случаю, коли оба корені $\alpha = \beta = z_0$, т. є. коли нитка описує поверхню стіжка оборотового, так як сей случай мож розібрати без помочи функций еліптичних, а перейдемо до случаю загального, де всі корені рівняня $R(z)$ є між собою ріжні.

З рівняня:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = R(z) = - \frac{4g}{l^2} (z - \alpha)(z - \beta)(z + \gamma)$$

маємо:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2i\sqrt{g}}{l} \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)(z + \gamma)} \qquad 10)$$

Корені α, β, γ є усі перворядні:

$$\alpha > \beta \gtrless o, \qquad -\gamma < o, \qquad \gamma > l.$$

Наколи найнижше положенє маятника приймемо за початкове, то зі зростом t буде маліло z, отже $\frac{dz}{dt}$ є від'ємне. А що відношенє $\frac{dz}{dt}$ не може бути мниме, проте під коренем в 10) є певно величина від'ємна.

Положім:

$$w = \frac{\alpha - z}{\alpha - \beta} \qquad 11)$$

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{dz}{dt} \frac{1}{\alpha - \beta}, \qquad \text{або:}$$

$$\frac{dw}{dt} = - \frac{1}{\alpha - \beta} \frac{2i\sqrt{g}}{l} \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z+\gamma)} \qquad 12)$$

А що з 11): $z = \alpha - (\alpha - \beta) w$, то:

$$\left.\begin{aligned} z - \alpha &= -(\alpha - \beta) w \\ z - \beta &= (\alpha - \beta)(1 - w) \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

$$z + \gamma = \alpha + \gamma - (\alpha - \beta) w = \alpha + \gamma \left(1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma} w\right).$$

Після заложеня про α, β, γ є $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}$ все додатне, < 1, проте можна положити:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma} = k^2 \text{ (модул функ. еліпт.).}$$

Отже:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{2i\sqrt{g}}{l} \frac{1}{\alpha-\beta} \sqrt{-(\alpha-\beta)\, w\, (\alpha-\beta)(1-w)(\alpha+\gamma)(1-k^2 w)}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2\sqrt{g}}{l} \sqrt{\alpha+\gamma} \sqrt{w\,(1-w)\,(1-k^2 w)}.$$

Положім $w = u^2$, $\frac{dw}{dt} = 2u \frac{du}{dt}$, отже:

$$2u \frac{du}{dt} = \frac{2\sqrt{g}\sqrt{\alpha+\gamma}}{l} \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)\,u^2},$$

а з відси:

$$\frac{du}{d\left(t \frac{\sqrt{g}\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\right)} = \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2}. \qquad 14)$$

Щоб знайти інтеґрал сього рівнаня, возьмім під увагу рівнане ріжничкове:[1])

$$\left(\frac{d\xi_{o\lambda}}{du}\right)^2 = \left[1 - (e_\mu - e_\lambda)\, \xi^2_{o\lambda}\right]\left[1 - (e_\nu - e_\lambda)\, \xi^2_{o\lambda}\right].$$

Коли положимо: $\lambda=3$, $\mu=1$, $\nu=2$, $\sqrt{e_1-e_3}\, \xi_{o\lambda} = x'$, а звідси:

$$\frac{d\xi_{o\lambda}}{du} = \frac{\frac{dx'}{du}}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{dx'}{d(\sqrt{e_1-e_3}\, u)},$$

то одержимо:

$$\frac{dx'}{d(\sqrt{e_1-e_3}\, u)} = \sqrt{1-x'^2}\sqrt{1-k^2x'^2} \qquad 15)$$

---

[1]) Пор. Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebr. der ellipt. Funct. стор. 29.

Є се рівнане тотожне з 14), а так як його інтеґрал є:

$$x' = \sqrt{e_1-e_3}\ \xi_{o\lambda} = \sqrt{e_1-e_3}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(u), \qquad ^1)$$

то інтеґралом рівнаня 14) буде — наколи числимо час від t_0 —

$$u = \frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0),$$

а:

$$w = \left\{\frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)\right\}^2$$

А так, як:

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)\ w, \qquad \text{то:}$$

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)\left[\frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\ \frac{\sigma}{\sigma_3}(t-t_0)\right]^2. \qquad 16)$$

Маємо проте представлене через z піднесенє маятника в фазї $(t-t_0)$.

З огляду, що з форми:[2])

$$\sigma(u) = u\ \Pi'\left(1-\frac{u}{w}\right)\ e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

слїдує свійство:[3])

$$\sigma(u \mid \omega, \omega') = m\,\sigma\left(\frac{u}{m} \;\middle|\; \frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m'}\right),$$

одержимо:

$$z=\alpha-(\alpha-\beta)\left\{\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{\sqrt{g}\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}(t-t_0), \frac{\omega\sqrt{g}\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}, \frac{\omega'\sqrt{g}\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\right)\right\}^2 \quad 16')$$

Для $t=t_0$ $z=\alpha$.

Найблизша хвиля, коли знов $z=\alpha$, буде:

$$(t'-t_0)\ \frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l} = 2\,\omega'\ \frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l},$$

а так, як:[4])

$$\omega' = \frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}},$$

а у нас:

$$\sqrt{e_1-e_3} = \frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l}$$

---

[1]) Schwarz: loc. cit. ст. 29.
[2]) Пор. прим. Schwarz loc. cit. ст. 5.
[3]) Schwarz ibidem ст. 6.
[4]) Schwarz ibidem ст. 32.

то маятник верне до первісного положеня α в часї:

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\, 2K,$$

де T значить час, якого треба, щоби маятник вернув з положеня найнизшого наповорот до тогож найнизшого положеня, отже **час потрібний до одного повного колебаня.**

4. Розслїдім тепер, де найде ся маятник **по половинї того часу.**

$$\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,K\right) = \frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,\sqrt{e_1-e_3}\,\omega'\right) =$$

$$= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,\omega'\right).$$

Вираз в скобках є періодою, що належить до функциї $\frac{\sigma}{\sigma_3}$ в формі 16), а так як:

$$\frac{\sigma}{\sigma_3}(\omega') = \sqrt{e_1-e_3}\ ^{1)}, \qquad \text{то:}$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,K\right) = 1,$$

а з віди:

$$z = \beta.$$

Отжеж для:

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,4K$$

дістанемо знов $z = \alpha$,

а для:

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,3K$$

дістанемо $z = \beta$;

сим робом маятник буде переходити по черзї через найвисше та найнизше положенє.

5. На основі рівнаня 16') знаємо уже вартість z в часї t. Щоби однак знати положенє маятника, треба еще знати вартости x та y в данїй хвилї.

---

[1]) Schwarz ibidem стор. 33.

Наколи ужиємо нового арґументу, означеного через рівнанє:

$$\frac{y_t}{x_t} = \operatorname{tg}\varphi,$$

де x_t та y_t є вартости сорядних x та y в часї t, дістанемо положенє маятника в кождій хвилї при помочи z та φ.

Щоб найти φ, возьмім:

$$\frac{d}{dt}\Big(\log(x+yi)\Big) = \frac{\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}}{x+yi} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)(x-yi)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)+i\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)}{x^2+y^2}.$$

А що після рівн. 1) $x^2 + y^2 = l^2 - z^2$

5) $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k$

3) $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}$,

то:

$$\frac{d\log(x-yi)}{dt} = \frac{-z\frac{dz}{dt}+ik}{l^2-z^2},$$

а так само:

$$\frac{d\log(x-yi)}{dt} = \frac{-z\frac{dz}{dt}-ik}{l^2-z^2},$$

а з відси:

$$\frac{d}{dt}\log\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{2ik}{l^2-z^2}$$

Наколи положимо:

$$x + yi = re^{\varphi i}, \qquad \text{отже:}$$

$$x - yi = re^{-\varphi i},$$

де r є мет (провкция) нитки на площу (xy), одержимо:

$$\log\frac{x+yi}{x-yi} = 2\varphi i,$$

отже:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{l^2-z^2} = -\frac{k}{2l}\left(\frac{1}{z-l} - \frac{1}{z+l}\right),$$

Знаємо, що $\sigma(u)$ має за місця зерові першого ряду $u=o$ та місця, які з ним конґруують; ті самі місця є місцями безконечностними першого ряду для $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$; з тої причини функциї:

$$\psi_1(u) = \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)}$$

$$\psi_2(u) = \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma'(u+u_2)}{\sigma(u+u_2)},$$

що — як се сейчас видно — є двоперіодичні, ріжнити ся муть від ρ_1, евентуально від ρ_2 о сталї величини.

Рівнанє 18) перейде на:

$$d\varphi = -A\left(\frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)} + \frac{d}{du}\log\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)} + C'\right)du;$$

з відси:

$$\varphi = -A\log\frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)} + Bu + C,$$

або:

$$\varphi = A\log\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)} + Bu + C; \qquad 19)$$

A і B є вартости, які легко з попередного можна обчислити.

Сталу C найдемо, наколи положимо $t=t_0$, або $u=o$; тодї з 19) $C=\varphi_0$, а з відси:

$$\varphi = A\log\frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)} \qquad 20)$$

В сей спосіб маємо φ представлене в якійнебудь хвилинї часу.

Рівнанями на φ та z є рух маятника точно схарактеризований.

6. Зміна z — як се було сказано — переходить по черзї через maximum та minimum своєї вартости в проміжках часу $\frac{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}$ K.

Зміні арґументу $\frac{\sqrt{g}\ \sqrt{\alpha+\gamma}}{l}$ t o K відповідає зміна арґументу t o ω', а се з огляду на форму:[1])

$$\omega' \sqrt{e_1-e_3} = K = \int_0^1 \frac{d\,\xi_{12}}{\sqrt{1-\xi^2_{12}}\ \sqrt{1-k^2\xi^2_{12}}}$$

а що[2]):

$$\sigma(u+\omega') = e^{\eta_1 u}\,\sigma(\omega')\,\sigma_1(u),$$

проте наколи положимо в 20) за u=o | u=o+ω', дістанемо кут φ належний до $z=\beta$, а іменно:

$$\varphi_1 = A \log \frac{e^{\eta_1 u}\,\sigma_1(u_1)}{e^{\ \eta_1 u}\,\sigma_1(-u_1)} \cdot \frac{e^{\eta_1 u_2}\,\sigma_1(u_2)}{e^{-\eta_1 u_2}\,\sigma_1(-u_2)} + B\omega' + \varphi_0,$$

а з відси:

$$\varphi_1 = A\,2\eta_1(u_1+u_2) + B\omega' + \varphi_0.$$

Величина кута від найнизшої до найвисшої фази є проте:

$$\varphi_1-\varphi_0 = 2A\eta_1(u_1+u_2) + B\omega'.$$

Наколи за u=o положимо u=o+2ω', т. є. возьмемо хвилю, коли $z=\alpha$, а що:

$$\sigma(u+2\omega') = -\ e^{2\eta_1(u+\omega')}\,\sigma(u),$$

то:

$$\varphi_2 = A \log \frac{-\ e^{2\eta_1(u_1+\omega')}\,\sigma(u_1)\ .\ -\ e^{2\eta_1(u_2+\omega')}\,\sigma(u_2)}{-\ e^{2\eta_1(-u_1+\omega')}\,\sigma(-u_1)\ .\ e^{2\eta_1(-u_2+\omega')}\,\sigma(-u_2)} + B\,.\,2\omega'+\varphi_0,$$

$$\varphi_2 = A\,.\,4\eta_1(u_1+u_2) + 2B\omega' + \varphi_0;$$

а з відси:

$$\varphi_2-\varphi_1 = \varphi_1-\varphi_0 = 2A\eta_1(u_1+u_2) + B\omega'$$

і т. д. дійдем до результату:

$$\varphi_1-\varphi_0 = \varphi_2-\varphi_1 = \varphi_3-\varphi_2 = \qquad = \Phi.$$

Кут Ф лишаєсь проте при переході маятника з положеня найвисшого до найнизшого та на відворот все так само великий.

---

[1]) Schwarz: loc. cit. ст. 31.

[2]) Schwarz ibidem стор. 26.

7. Зберім вартости на z та φ.

$$\begin{array}{llllll} \text{Для} & t = o, & T, & 2T, & 4T \\ & z = \alpha, & \beta, & \alpha, & \alpha \\ & \varphi = o, & \Phi, & 2\Phi, & 4\Phi, \end{array}$$

де:

$$T = \frac{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\,K.$$

Бачимо, що z повтаряє ся наворотно в відступах, що відповідають проміжкам часу:

$$o \quad 2T, \quad 2T \quad 4T, \quad 4T \quad 6T \quad \text{і т. д.}$$

та проміжкам кута:

$$o \quad 2\Phi, \quad 2\Phi \quad 4\Phi, \quad 4\Phi \quad 6\Phi \quad \text{і т. д.}$$

Наколи отже Φ стоїть в рациональнім відношеню до π, то маятник зачеркнувши дорогу, яка складаєсь з певної скількости частий, що ся повторяють та з собою конґруують, вертає назад до точки, з якої вийшов; но наколи Φ та π не стоять до себе в відношеню рациональнім, то маятник не верне до первісного положеня.

Кут Φ є все більший, як $\frac{\pi}{2}$.[1])

9. Возьмім случай, що:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = o,$$

то:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right) = o, \qquad \text{або:}$$

$$\frac{x}{y} = \text{const.}$$

Послїдне рівнане представляє площу, що переходить через вісь z; тодї куля:

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = o,$$

на якій оставав конець маятника, перейде на коло, а маятник перейде на маятник плоский.

---

[1]) Пор. н. пр. Durège: Traité des fonctions élliptiques ст. 310 et sqts.

Рівнане 9) перейде тоді на:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(4gz + h\right)\left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right).$$

Корені є ту: $z = \pm\, l$, $z = -\frac{h}{4g}$; який з них відповідає положеню α, β, $-\gamma$?

Для $z = o$ є $v_0{}^2 = h > o$, а що і $g > o$, то:

$$\frac{h}{4g} > o;$$

наколи приймем $\frac{h}{4g} < l$ та назвем:

$$z = l = \alpha$$

$$z = -\frac{h}{4g} = \beta$$

$$z = -l = -\gamma$$

(бо — як там — $\alpha = l$, $\beta \gtrless o$, $\alpha > \beta$, $|\beta| > l$, $\gamma = l$), то дістанемо:

$$\frac{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}{l}\,(t-t_0) = \frac{\sqrt{g}\,\sqrt{2l}}{l}\,(t-t_0) = \sqrt{2g}\,(t-t_0).$$

$$k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{l-\beta}{2l}, \qquad \text{або:}$$

$$\alpha-\beta = l-\beta = 2k^2 l, \quad \text{а з відси:}$$

$$z = l - 2k^2 l\,\frac{\sigma}{\sigma_3}\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}\,(t-t_0)\right),$$

форма, яка зовсім характеризує рух маятника плоского.

Для $t = t_0$ $z = l$, т. є. маятник займає найнизше положенє, отже є в рівновазї.

Час колебаня є:

$$T = \frac{l}{\sqrt{g}\,\sqrt{\alpha+\gamma}}\,K,$$

або:

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}}\,K.$$

Є ту ріжниця між сею формою, а формою

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

яку одержуємо елементарно; ріжниця ся походить з відти, що послідня форма є важна лиш для відхилів (відклонів) достаточно малих.

Тернопіль в маю 1898 р.