Кілька уваг про форму інтерполяцийну Lagrange'а

написав

Володимир Левицкий.

1. Як звісно форма Lagrange'а служить до утвореня рациональної функциї $y = f(x)$ n-го степеня, яка має на $(n + 1)$ місцях $(x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_{n+1})$ принимати певні з гори означені вартости $(y_1\ y_2\ y_3 \ldots\ldots y_{n+1})$.

Наколи функция та має вид:

$$y = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n, \tag{1}$$

то мусить істнувати ряд реляций:

$$y_\nu = a_0 + a_1 x_\nu + a_2 x_\nu^2 + \ldots\ldots + a_n x_\nu^n, \quad (\nu = 1, 2, \ldots n + 1). \tag{2}$$

З $(n + 2)$ реляций (1) і (2) дістанемо слїдуючу условину їх співчасности:[1])

$$\Delta\,(y_\nu y_\nu) = \begin{vmatrix} y & 1\ x & x^2 & \ldots x^n \\ y_1 & 1\ x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^n \\ y_2 & 1\ x_2 & x_2^2 & \ldots x_2^n \\ & & & \\ & & & \ldots. \\ & & & \\ y_{n+1} & 1\ x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Визначник сей — наколи его розвинемо після першої колюмни — прийме вид:

$$y\,(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_{n+1})\,(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_{n+1}) \ldots (x_n - x_{n+1}) -$$
$$- y_1\,(x - x_2)\,(x - x_3) \ldots (x - x_{n+1}) \ldots (x_n - x_{n+1}) + \ldots\ldots = 0$$

[1]) Пор. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych t. I. st. 137.

або — наколи поділимо через сочинник при y:

$$(4) \qquad y = \sum_{\nu > 1}^{n+1} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\nu-1})(x - x_{\nu+1}) \cdots (x - x_{n+1})}{(x_\nu - x_1)(x_\nu - x_2) \cdots (x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu+1}) \cdots (x_\nu - x_{n+1})} y_\nu$$

Є то власне форма інтерполяцийна Lagrange'a. Форма ся — як се з неї відразу видко — сповняє жадані условини, дає отже жадану функцию. А так як функция ся має на $(n+1)$ місцях ті самі вартости, що функция

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

проте обі функциї є тотожні.[1])

Мінор, що належить до y, т. є.

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdot & & & \cdots & \cdot \\ \cdot & & & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

є ріжний від зера, наколи корені є ріжні. Для таких лиш коренів форма повисша має значінє.[2])

Наколи розвинемо праву сторону рівнаня (4), дістанемо через порівнанє з видом (1) вираженя на сочинники $a_0\, a_1 \cdots a_n$. Розвиненя сего можем однак уникнути дуже легко, наколи розвинемо визначник $\varDelta$ після першого верша. Дістанемо тоді:

$$(5)\; A_0 y - \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & \cdots x_1^n \\ y_2 & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & & \\ y_{n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ y_2 & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} \cdots \pm x^n \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \cdots x_1^{n-1} \\ y_2 & 1 & x_2 & \cdots x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Є се вже третий вид шуканої функциї. З розвиненя сего виходить, що:

$$a_\nu = \mp \frac{A_\nu}{A_0},$$

де A_ν є мінором, що належить до елементу x^ν визначника $\varDelta = 0$.

2. Послїдний вид дає нам спроможність подати критерию на се, чи і коли можна утворити функцию n-го степеня,

---

[1]) ibid. ст. 65.

[2]) случай коренів многократних, глянь Puzyna loc. cit. ст. 138.

яка має на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ принимати подані вартости $(y_1\, y_2\, y_{n+1})$.

Возьмім на перед случай, що ті місця $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ є звязані з $(y_1\, y_2 \quad y_{n+1})$ реляциями $y_\nu = x_\nu$. Тоді в рівнаню (5) всї мінори є зерами, кромі мінора при x, який дістає вартість A_0; тодї шукана функция має вид $y - x = 0$.

Но функция та не є функциєю n-го степеня. Не істнує проте функция n-го степеня, якаби на $(n+1)$ місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ прибирала вартости $(y_1 = x_1,\, y_2 = x_2, \cdots y_{n+1} = x_{n+1})$.

Очевидна є річ, що то само остає і в случаю $y_\nu = a\, x_\nu\, (\nu = 1, 2, \cdots n+1$, a стале).

3. Перейдім тепер до случаю загальнїйшого. Виберім іменно вартости $(y_1\, y_2 \quad y_{n+1})$ так, щоби були звязані з вартостями $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ рядом рівнань:

$$y_\nu + a_1\, x_\nu^{\lambda_1} + a_2\, x_\nu^{\lambda_2} + a_3\, x_\nu^{\lambda_3} + \cdots + a_\varrho\, x_\nu^{\lambda_\varrho} = 0 \qquad (6)$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots n+1).$$

Маємо ту $(n+1)$ реляций між y_ν a x_ν, причім закладаємо, що $\lambda_s \geqq \lambda_t$, але кожде $\lambda_s \angle\, n$.

Що до ϱ, то можуть зайти ту три случаї $\varrho < n, \varrho = n, \varrho > n$.

a. Возьмім случай $\varrho < n$; маємо тодї $(n+1)$ рівнань лїнїових що до $(\varrho + 1)$ незвісних $1, a_1, \cdots a_\varrho$. Тодї — як се виходить з теориї рівнань — є $(n - \varrho)$ рівнань злишних, а системів $(1\, a_1 \quad a_\varrho)$, які розвязують рівнаня (6), буде $\infty^{n-\varrho}$.

Відкиньмо з рівнань (6) $(n - \varrho)$ рівнань кінцевих, дістанемо:

$$y_\nu + a_1\, x_\nu^{\lambda_1} + a_2\, x_\nu^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho\, x_\nu^{\lambda_\varrho} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots \varrho + 1).$$

Условиною, щоби ті рівнаня дали ся розвязати, є:

$$D_1 = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0$$

Таких визначників, як $D_1 = 0$, дістанемо певну скількість, відповідно до величини ϱ; бо ми можемо з (6) $(n - \varrho)$ рівнань довільним способом відкидати. Укладів $(1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho)$ є $\infty^{n-\varrho}$, но їх треба вибрати так, щоби заходили условини $D_\nu = 0$.

Розслїдім тепер, яка буде функция n-го степеня, яка на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ має принимати вартости означені рівнанями (6).

Визначник A_0 не улягає зміні, бо до него y не входить. Возьмім тепер під увагу котрийнебудь з дальших визначників:

$$A\lambda_s = \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & \cdots x_1^{\lambda_{s-1}} & x_1^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_1^{n} \\ y_2 & 1 & x_2 & \cdots x_2^{\lambda_{s-1}} & x_2^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_2^{n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ y_{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_{s-1}} & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_{n+1}^{n} \end{vmatrix}$$

Наколи в ним підставимо за $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$ вартости з рівнань (6), то визначник сей замінить ся на суму $(\varrho + 1)$ визначників; всї ті визначники стануть ся зером, бо $\lambda_1\, \lambda_2 \cdots < n$, визначники ті будуть проте мали по дві колюмни ідентичні; остане лиш визначник:

$$a_s \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_s} & 1 & x_1^{\lambda_{s-1}} & x_1^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_1^{n} \\ x_2^{\lambda_s} & 1 & x_2^{\lambda_{s-1}} & x_2^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_2^{n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ x_{n+1}^{\lambda_s} & 1 & x_{n+1}^{\lambda_{s-1}} & x_{n+1}^{\lambda_{s+1}} & \cdots x_{n+1}^{n} \end{vmatrix} = D_s$$

Очевидна є однак річ, що $D_\beta = (-1)^\beta a_\beta A_0$, отже по скороченю жадана функция прийме вид:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0.$$

Функция та не є однак функциєю n-го степеня.

Не істнує проте функция n-го степеня, яка би на місцях $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ принимала вартости $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$, назначені рівнанями (6) для $\varrho \angle n$.

б. Перейдім тепер до случаю $\varrho = n$.

Тодї істнує один лиш систем вартостий $(1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho)$, який сповняє рівнаня (6). Для такого системy мусить заходити реляция:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_n} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_n} \end{vmatrix} = 0.$$

І ту зайде то само, що передше, що жадана функция прийме вид:

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + a_2^{\lambda_2} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0,$$

т. є. що і ту не істнує функция n-го степеня, яка би відповідала жаданим условинам.

в. Остає єще случай $\varrho > n$.

Случай сей можна однак звести до случаїв попередних, як довго $\lambda_s \angle n$.

Бо тоді виложників $(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\varrho)$ є ϱ; числа ті є меньші як n, мусять проте в певнім порядку представляти числа $1, 2, 3, \cdots n-1$, а так як $\varrho > n$, отже декотрі з тих чисел λ мусять ся повтаряти; в кождім отже разї y_ν дає ся звести до форми:

$$y_\nu + a_1' x_\nu^{\lambda_1} + a_2' x_\nu^{\lambda_2} + \cdots + a_u' x_\nu^{\lambda_u}, \qquad u \leqq n.$$

Отже і в тім случаю функция n-го степеня при даних условинах не істнує.

4. Визначім тепер близше условину, що для системуру рівнань (6) не істнує функция n-го степеня о приписаних вартостях.

Щоби рівнаня (6) мали розвязаня скінчені всюди для укладу $(a_1 \cdots a_\varrho)$, мусить рівнати ся зеру визначник:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ & \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} \cdots x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0 \qquad \varrho \angle n.$$

Визначників таких є більше або меньше залежно від ϱ. $W = 0$ каже, що між $(y_1\, y_2 \cdots y_{\varrho+1})$ а $(x_1\, x_2 \cdots x_{\varrho+1})$ істнує певна звязь, всї отже визначнили кажуть, що між величинами $(y_1\, y_2 \cdots y_{n+1})$ а $(x_1\, x_2 \cdots x_{n+1})$ заходять певні реляциї.

Істноване рівнань $W = 0$ є условиною конечною, щоби не істнувала функция n-го степеня о $(n+1)$ приписаних вартостях; бо коли би $W \gtrless 0$, тоби було:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_\varrho = 0; \; y_1 = y_2 = \cdots = y_{n+1} = 0,$$

а звідси $f(x) \equiv 0$, що виключено.

Ся условина є однак і достаточна, бо тілько в случаю, коли $W = 0$,

$$y + a_1 x^{\lambda_1} + \cdots + a_\varrho x^{\lambda_\varrho} = 0,$$

т. є. функция n-го степеня не істнує.

Ми сказали, що условин $W = є$ більше залежно від ϱ. Наколи однак возьмем одну тілько з тих условин, то до неї буде належало ∞ много системів

(7) $$(1\, a_1\, a_2 \cdots a_\varrho),$$

що сповняють $(\varrho + 1)$ рівнань, бо коли (7) є укладом, то і $(C, C a_1, C a_2, \quad C a_\varrho)$ є рівнож системом.

Но сей уклад (7) сповняє так само всї рівнаня (6), а для такого укладу функция n-го степеня з $(n + 1)$ даними вартостями не істнує. Вистане проте одна лиш условина $W = 0$ і то найлїпше ужити условини:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_2} & \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ \vdots & & \\ y_{\varrho+1} & x_{\varrho+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{\varrho+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

Наколи отже між $(\varrho + 1)$ вартостями x_ν і $(\varrho + 1)$ вартостями y_ν $(\nu = 1, 2, 3, \cdots n + 1)$ заходить звязь $W = 0$, то тим самим заходять звязи між всїми $(n + 1)$ вартостями x_ν і $(n + 1)$ вартостями y_ν, а тодї форма інтерполяцийна Lagrange'a зводить ся до функциї степеня низшого як n.

5. Возьмім тепер случай, що в рівнанях (6) декотрі λ_s є рівні n.

Очевидна є тодї річ, що форма інтерполяцийна Lagrange'a зведе ся до форми:

$$A_0\, y + A_0\, x\, a_1 + A_0\, x^2\, a_2 + \cdots + A_0\, x^n\, a_n = 0,$$

або:

$$y + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n = 0,$$

отже тодї істнує вже функция n-го степеня, яка має $(n + 1)$ приписаних вартостий.

Наколи $\lambda_s > n$, то визначники при x^s не зводять ся зовсїм до A_0, але розібють ся на більше визначників, а тодї форма Lagrange'a має вже повне значінє.

6. Возьмім тепер під увагу рівнаня (6), але приймім, що сочинники є ріжні в усїх рівнанях; тодї:

$$(8)\qquad y_\nu + a_{\nu_1} x_1^{\lambda_1} + a_{\nu_2} x_1^{\lambda_2} + a_{\nu_3} x_1^{\lambda_3} + \cdots + a_{\nu\varrho} x_1^{\lambda_\varrho} = 0.$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots n + 1),$$

при чім:

$$\lambda_s < n, \; a_{st} \gtrless a_{ts}.$$

Тодї визначник:

$$\begin{vmatrix} y_1 & x_1^{\lambda_1} & \cdots x_1^{\lambda_\varrho} \\ y_2 & x_2^{\lambda_1} & \cdots x_2^{\lambda_\varrho} \\ & & \\ y_{n+1} & x_{n+1}^{\lambda_1} & \cdots x_{n+1}^{\lambda_\varrho} \end{vmatrix}$$

є ріжний від зера, отже між ($x_1\, x_2 \cdots x_{n+1}$) а ($y_1\, y_2 \cdots y_{n+1}$) не істнує нїяка звязь без вільного виразу. ($y_1\, y_2 \cdots y_{n+1}$), а так само і ($x_1\, x_2 \cdots x_{n+1}$) є від себе независимі. Для такого укладу x_ν і y_ν істнує всегда функция n-го степеня з $(n + 1)$ приписаними вартостями.

Наколи місто ($y_1\, y_2 \quad y_{n+1}$) возьмем вартости ($C\, y_1$, $C\, y_2$, $C\, y_{n+1}$), то функция $f(x)$ степеня n перейде на $C f(x)$; можемо сказати, що до всїх вартостий ($\bar y_1\, \bar y_2 \cdots \bar y_{n+1}$) утворених з **основного системy** ($y_1\, y_2 - y_{n+1}$) в сей спосіб, що $\bar y_\nu = C\, y_\nu$ ($\nu = 1, 2, \cdots n + 1$), **остає одна і та сама форма** Lagrange'a.

Очевидно, що коли $\bar y_\nu = C_\nu\, y_\nu$ ($\nu = 1, 2, \cdots n + 1$), або наколи $\bar y_\nu = F_\nu(y_s)$, то тодї дістанемо иньші форми Lagrange'a.

7. Розслїдім еще, що ся стане, наколи:

$$\bar y_\nu = c_{\nu_1} y_1 + c_{\nu_2} y_2 + \cdots + c_{\nu, n+1}\, y_{n+1} \quad (\nu = 1, 2, \cdots n + 1).$$

Форма Lagrange'a має тодї вид:

$$\bar y = \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} \bar y_1 & x_1 & \cdots x_1 \\ \bar y_2 & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar y_{n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} - \frac{1}{A_0} x \begin{vmatrix} \bar y_1 & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ \bar y_2 & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar y_{n+1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \cdots = 0,$$

або наколи вставимо рівнання (6) за ($\bar y_1\, \bar y_2 \cdots \bar y_{n+1}$) і розібємо кождий визначник на суму, дістанемо:

$$= \frac{1}{A_0} \begin{vmatrix} c_{11} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{21} & x_2 & \cdots x_2^n \\ & \vdots & \\ c_{n+1,1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \frac{y_2}{A_0} \begin{vmatrix} c_{12} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{22} & x_2 & \cdots x_2^n \\ & & \\ c_{n+1,2} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} + \cdots + \frac{y_{n+1}}{A_0} \begin{vmatrix} c_{1,n+1} & x_1 & \cdots x_1^n \\ c_{2,n+1} & x_2 & \cdots x_2^n \\ \vdots & & \\ c_{n+1,n+1} & x_{n+1} & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{y_1}{A_0}x\begin{vmatrix} c_{11} & 1 & x_1^2 & \cdots x_1^n \\ c_{21} & 1 & x_2^2 & \cdots x_2^n \\ & \vdots & & \\ c_{n+1,1} & 1 & x_{n+1}^2 & \cdots x_{n+1}^n \end{vmatrix} - - = 0,$$

або:

$$\bar{y} = y_1 f(c_{11}\, c_{21} \cdots c_{n+1,1}) + y_2 f(c_{12}\, c_{22} \cdots c_{n+1,2}) + \cdots + y_{n+1} f(c_{1,n+1}\, c_{2,n+1}, \cdots c_{n+1,n+1}).$$

Щоби отже з форми Lagrange'а для укладу основного перейти до форми, для укладу, утворено лїнїйно з укладу основного, вистане в даній формі за систем основний класти по черзї уклади:

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & \cdots c_{n+1,1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots c_{n+1,2} \\ & & \\ c_{1,n+1} & c_{2,n+1} & \cdots c_{n+1,n+1} \end{matrix}$$

так змінені форми помножити по черзї через $y_1\, y_2 \cdots y_{n+1}$ і зсумовати.

Тодї форма Lagrange'а має вид:

$$y = \sum_{\mu=1}^{n+1} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{\nu+1})(x - x_{\nu+1}) \cdots (x - x_{\nu+1})}{(x_\nu - x_1)(x_\nu - x_2) \cdots (x_\nu - x_{\nu+1})(x_\nu - x_{\nu+1}) \cdots (x_\nu - x_{n+1})} c_{\nu,\nu}\, y_\mu.$$

Тернопіль в марти 1899. р.