# МИКОЛА ГЕНРИХ АБЕЛЬ І ЄГО ЗНАЧІНЄ В МАТЕМАТИЦЇ.

**(З нагоди столїтних роковин єго уродин).**

НАПИСАВ

**Клим Глїбовицкий.**

Сьвіт науковий обходив 1902. р. столїтню річницю уродин великого ґенїя, математика норвеґского Абеля. В виданях товариств наукових усїх народів вийшли або ще вийдуть статї посьвячені памяти сего незвичайного чоловіка — велита, яких не числить на сотки істория культури людскости[1]). Може раз на сто років спроможесь природа на єство такої сили духа, яка була у Абеля; творчість єго така величезна, а дїла такої ваги в історії розвою математики, що прямо непонятним здає ся, щоби се міг зробити чоловік, що в 27. роцї житя зійшов до гробу. — Не годить ся-ж і нам остати зовсїм по заду других і не почтити Абелевого ювилею; а не мож сего зробити красше, як передаючи спадщину по нїм виданям Наукового Товариства ім. Шевченка.

## ЧАСТЬ ПЕРША.

### Житє Абеля.

**Микола Генрих Абель** (Niels Henrik Abel) родив ся 25. серпня 1802. р. в селї Findoe в Норвеґії, де батько єго був протестанцким

---

[1]) Єго памяти посьвячений приміром величавий твір: N. H. Abel, memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. (Leipzig, B. G. Teubner 1902, цїна 21 марок).

пастором. Дитячі лїта перевів Абель в Gierrestadt, сусїдній парохії, де вже в р. 1803. перенїс ся его отець. І ту розпочалось образоване малого хлопця під проводом самого батька і тревало до р. 1815, поки він не вступив до школи катедральної в Християнії. Ту зразу не вирізняв ся він від своїх співучеників; аж коли в р. 1818. Holmboe зістав іменований професором в тій власне школї, тодї на окремих годинах, які сей професор призначив на вправлюване своїх учеників в розвязуваню проблємів з альґебри і ґеометриї, показавсь вперве талан Абеля, і від тодї став він розвиватись безпримірно

1802 – 1829.

скоро. Вже тодашні его поступи казали догадуватись в нїм ґенїя. Проф. Holmboe зайняв ся ним і поза годинами шкільними перейшов з ним основи рахунку ріжничкового і інтеґрального Айлера (Euler). Відтак Абель ішов вже дальше самостійно, читав працї Lacroix'a, Francoeur'a, Poisson'a, Gauss'a, Lagrange'a і сам став пробувати сил своїх. Скінчивши школу катедральну вже по смерти свого батька вступив він на унїверзитет в Християнії, а що батько не оставив средств на его образоване, то деякі з поміж професорів зложились, щоби дати Абелеви можність незалежного істнованя, конечного для так визначного талану. По двох роках ряд на внесене сенату академічного надав єму надзвичайну стипендию в висотї 200 Sp. річно. І ту стипендию побирав він через два роки аж до правильного укінченя студий унїверзитетских.

В тім часї працював Абель з великим запалом і написав кілька розправ друкованих в „Magazin für die Naturwissenschaften“ в Християнії. Перша з них друкована в р. 1820. має заголовок: „Allgemeine Methode Functionen einer variablen Grösse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variablen ausgedrückt ist“. І вже тодї займав ся він справою розвязки альґебраічної рівнаня пятого степеня; раз навіть здавалось єму вже, що найшов розвязку, та на жаль спостеріг похибку в своїй роботї. Але се єго не зразило, і він постановив собі або дійти до розвязки або показати, що розвязка є неможлива. Се послїдне вдалось єму і він в р. 1824. оголосив в Християнії свій доказ під заголовком: „Mèmoire sur les équations algébriques où on démontre l' impossibilité de la résolution de l' équation générale du cinquième degré“. Так розяснив Абель се питане в теориї рівнань альґебраічних, питане найважнїйше, яке було до розвязаня в аналїзї, як каже Legendre[1]).

З оглядy на ту визначну дїяльність наукову надав ряд Абелеви на єго просьбу стипендию 600 Sp. річно на протяг двох років, щоби єму уможливити дальше фахове образоване на заграничних унїверзитетах. Абель хотїв зразу їхати прямо до Парижа, але що разом їхали і другі єго краяни і вибирали Берлїн, то і він поїхав разом і не жалував сего, бо там познакомив ся з Crelle'ом, що став відтак єго щирим приятелем і був ним аж до смерти. Дневник „Crelle's Journal“, якого перший зошит вийшов з початком р. 1826. в часї побуту Абеля в Берлїнї, причинив ся немало до лїтерацкої слави Абеля. Він був одним з найдїяльнїйших співробітників сеї часописи і в кождім зошитї була бодай одна або дві єго розвідки; а кожда з них причинила ся немало до піднесеня поваги сеї часописи.

З кінцем лютого р. 1826. покинув Абель Берлїн і на Липск, Фрейбурґ, Дрезно і Прагу поїхав до Відня; по місяцю, десь з кінцем мая, виїхав він з Відня до Італії та Швайцариї, а в липни був вже в Парижи, де задержав ся на довше, бо до січня 1827. р. Ту

---

[1]) Обширне представлене сеї квестиї находить ся в розвідцї: „К. Глїбовицкий. Рівнане пятого степеня (Збірник матем. природ. том II).

познакомив ся він з многими математиками, а між ними і з Cauchy'ом. Відтак побув еще в Берлїнї та Копенгаґї, а в маю був вже з поворотом в Християнії. Ту старав ся він о катедру математики на унїверзитетї, але обі катедри, які були, були на сей час занятї, а нової для Абеля ряд не хотїв утворити. І так оставав він без місця аж до р. 1828, коли то поручено єму заступство проф. Hansteen'а на час подорожи сего до Сиберії. Вже тоді був Абель членом королївскої академії наук в Throndhjem.

Приятелї Абеля в Німеччинї звернули увагу пруского міністра просьвіти на визначний талан Абеля і спонукали, що ряд згодив ся запросити єго на берлїньский унїверзитет. В тім самім часї кількох членів королївскої академії наук в Парижи звернули ся до короля шведского з просьбою, щоби покликав Абеля на унїверзитет в Штокгольмі, та пруский ряд поспішив ся. Crelle дістав припоручене поспитати Абеля, чи евентуально приняв би запрошене, а по прихильній єго відповіди мав остаточно уложити ту справу і стягнути Абеля до Берлїна. Єще того самого дня сповнив Crelle припоручене, та на жаль було за пізно — лист прийшов вже по смерти. Невпинна праця послїдних років, а також журба о завтра підкосили і так не сильне здоровле Абеля. В грудни 1828. р. серед лютої зими виїхав він до гути желїзної в Froland коло Arendal, де була єго наречена панна Кетр (пізнійше панї Keilhau); там захорував в сїчни 1829. р. і мимо усяких старань і заходів нареченої і властителїв гути помер на чахотку дня 6. цьвітня 1829[1]).

Можна сьміло сказати про него: Коли-б був пожив довше, то не одно еще були-б про него почули. То, що Абель оставив по собі, дає повне право до такого вискazу. Вистане згадати доказ про неможливість альґебраічної розвязки рівнань загальних степеня висшого чим четвертий, єго працї над функциями елїптичними, які властиво він сотворив разом з Jacobi'м, розправу про загальні прикмети функций переступних і т. д., щоби бачити, що не сказалось за богато. Се все є праці, що далеко розширили границї аналїзи.

Пригляньмо ся тепер спадщинї, яка осталась по сїм так передвчасно померлім ґеніяльнім математичнім дусї.

---

[1]) Порів. Holmboe: Noties sur la vie de l'auteur (Передмова до Oeuvres complètes de N. H. Abel). Обширну біографію Абеля видав Bjerknes п. заг. Niels-Henrik Abel (Paris, Gauthier-Villars 1885).

# ЧАСТЬ ДРУГА.

## Твори Абеля[1]).

**І. Шукане функций двох величин змінних независимих x і y, таких f(xy), що f(z, f(xy)) є функциєю симетричною величини x, y і z.** (Oeuvres complètes I. 1).

Вийшовши з частного приміру:

$$f(xy) = x+y, \quad \text{де} \quad f(z, f(xy)) = z+x+y,$$

де отже виходить симетрична функция даних величин, шукає автор відтак загальної форми функциї f. Яко симетрична мусить она сповняти слідуючі рівнаня:

$$f(z, f(xy)) = f(x, f(yx))$$
$$f(z, f(xy)) = f(y, f(zx))$$

а коли для скороченя назвем:

$$f(xy) = r, \quad f(yz) = v, \quad f(zx) = s \qquad (1),$$

то дістанемо через ріжничкованє:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial z}}.$$

Наколи приймем z постійне, тоді:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(y)$$

---

[1]) Твори Абеля вийшли в двох виданях; перше виданє видав Holmboe в р. 1839, друге, дуже старанно зредаґоване через L. Sylow'a і S. Lie, вийшло заходом ряду норвеґского в Христиниї в мові французкій в р. 1881. п. заг.: Oeuvres complètes de Niels-Henrik Abel, nouvelle édition (перший том ст. VIII+621, том другий ст. IV+341) ціна 24 марок. — Розвідки Абеля, що ся відносять до альґебраїчної розвязки рівнань, видав H. Maser враз з творами E. Galois під заг. Abhandlungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen (Berlin, J. Springer 1889); їх є пять. Дві розвідки Абеля вийшли в „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", а іменно № 71 клясиків (з р. 1895) містить: „Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots$ а № 111 (з р. 1900) містить: „Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen". Одна розвідка п. з. „mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes" вийшла в Парижи в р. 1841.

**буде функциею самого y, а**

$$\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} = \varphi(x)$$

**буде такою самою функциею величин** z **і** x, **як** v **величин** z **і** y; **а з відси:**

$$r = \psi\left[\int\varphi(x)dx + \int\varphi(y)dy\right]$$

($\psi$ **якась функция). А коли для скороченя поставимо за інтеґрал** $\int\varphi(x)dx$ **і** $\int\varphi(y)dy$ $\varphi(x)$ **та** $\varphi(y)$, **дістанемо:**

$$r = f(xy) = \psi\left(\varphi(x), \varphi(y)\right) \qquad (2)$$

**т. є. форму, яку має мати функция дана, лиш треба обмежити рівнаня головні (1), бо форма (2) є більше загальна як (1).**

**В той сам спосіб буде далї:**

$$f(z, r) = \psi\left(\varphi(z), \varphi(r)\right) = \psi\Big(\varphi(z) + \varphi\psi\left(\varphi(z), \varphi(y)\right)\Big).$$

**А що се вираженє є симетричне з огляду на** x, y, z, **то:**

$$\varphi z + \varphi\psi(\varphi x + \varphi y) = \varphi x + \varphi\psi(\varphi y + \varphi z).$$

**Най:** $\varphi z = o$, $\varphi y = o$, **то:**

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + c.$$

**Положім** $\varphi(x) = p$, **то:**

$$\varphi\psi(p) = p + c,$$

**а коли** $\varphi_1$ **є функциєю відворотною до** $\varphi$ **такою, що** $\varphi\varphi_1(x) = x$, **то:**

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c),$$

**а форма заґальна функциї, яку шукаєм, буде:**

$$f(xy) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y). \qquad (3)$$

**Автор кінчить натяком, що можна в подібний спосіб найти функциї двох величин змінних, що будуть сповняти рівнаня дані трох змінних.**

**Близькою тій розвідцї є иньша про: Функциї, що сповняють рівнанє** $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$. (Oeuvres compl. I. 103).

**Рівнанє:**

$$\psi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx) \qquad (1)$$

**буде сповнене, коли приміром:**

$$fy = \tfrac{1}{2}y, \quad \text{а} \quad \varphi x = \psi x = \log x$$

або коли:

$$fx = \sqrt{1-y^2}, \quad \text{а} \quad \varphi x = \psi x = \arc \sin x.$$

Абель ставить собі за задачу найти загальний вид функций, що відповідали би даному рівнаню і виводить, що функциями такими будуть:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}$$

$$\text{де} \quad a = \varphi' 0, \quad \alpha = f0, \quad \alpha' = f'0 \qquad (2)$$

$$\psi x = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0$$

підчас коли само **fx** є визначене через рівнанє:

$$f'x \, (fx + \alpha' x) + (mx - \alpha' fx) = 0 \qquad (3)$$

або:

$$c^{2n} = (fx - nx)^{\,n+\alpha} \, (fx + nx)^{\,n-\alpha'}$$

де **c** означає постійну інтеґрованя.

Рівнаня ті можуть послужити до вишуканя функций сповняючих рівнанє (1), в частних случаях, при означених вартостях на **n** і $\alpha'$.

Функцию $\varphi x$ виражену ту (2) в видї інтеґралу мож також представити при помочи льоґаритмів в видї:

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{n+\alpha'} \log \, (cnx + cfx), \quad fx \text{ відоме.}$$

В случаях $\alpha' = \infty$, і $n = 0$, fx приймає якусь вартість частну яку найде ся з рівнаня (3).

**II.** Квестию **розвязки рівнань альґебраічних** розібрав і розвязав Абель в слїдуючих розвідках:

а) **Розвідка про рівнаня альґебраічні, де виказуєсь неможливість розвязки загального рівнаня пятого степеня.** (Християнїя 1824, Oeuvres compl. 1881. I. 28).

б) **Доказ неможливости альґебраічної розвязки загальних рівнань, степеня висшого як четвертий.** (Crelle's Journal I. 1826. Oeuvres compl. I. 66).

в) **Розвідка про специяльну клясу рівнань, що ся дають альґебраічно розвязати.** (Crelle's J. IV. 1829. Oeuvres compl. I. 478).

г) **Про альґебраічну розвязку рівнань** (твір посмертний, Oeuvres compl. II. 217).

д) **Нова теория альґебраічної розвязки рівнань** (вступ до розвідки попередної, Oeuvres compl. II. 329).

Виcлїди тих епохальних розвідок, що творять chef d' oeuvres Абеля в альґебрі, розібрали ми основно в наведеній висше розвідцї[1]), тому пригадаєм тут лиш хід гадок в головних чертах.

1. Абель каже ось-так: Розвязати альґебраїчно рівнанє значить виразити коренї рівнаня через функциї альґебраїчні сочинників. Тому-то розбирає він вперед загальний вид функций альґебраїчних і шукає, чи можна сповнити дане рівнанє, наколи вставимо на місце незвісної вираженє функциї альґебраїчної.

Най:

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0 \qquad (1)$$

буде дане рівнанє з сочинниками $c_0\ c_1\ c_2 \cdots$, що є вимірними функциями величин независимих $x', x'' \cdots$, та най функция альґебраїчна величин $x', x''$,

$$y = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \qquad (2)$$

сповняє то рівнанє. Вставивши то вираженє за $y$ в дане рівнанє одержимо (редукуючи висші степенї $p$, чим $p^{\frac{n-1}{n}}$) вираженє виду:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \qquad (3)$$

де $r_0\ r_1 \quad r_{n-1}$ є функциї вимірimі величин $p\ q_0\ q_1 \cdots q_{n-1}$. Рівнанє (3) сповнить ся лиш тодї, наколи:

$$r_0 = 0,\ r_1 = 0, \qquad r_{n-1} = 0.$$

Оно ся сповнить також, коли за $p^{\frac{1}{n}}$ будемо класти по черзї:

$$\alpha^s p^{\frac{1}{n}} \ (s = 0,\ 1,\ 2, \qquad n-1),$$

де $\alpha$ є коренї рівнаня:

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \qquad + 1 = 0.$$

З огляду на се дістанемо на $y$ ряд вартостий ($q_1$ кладем $= 1$).

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

— — — — — — — — — — — — — —

Звідси можна кожду з величини:

$$p^{\frac{1}{n}}\ q_0\ q_2 \cdots q_{n-1}$$

---

[1]) пор. Глїбовицкий loc. cit.

виразити вимірнмо через $y_1$ $y_2$ ...... Бачимо проте, що **наколи рівнане якесь дасть ся альґебраічно розвязати, то на кождий корінь рівнаня дістанемо виражене таке, що кожда функция, яка в нього входить, є вимірнмою функциєю корінїв даного рівнаня (1).**

Наколи загальне рівнане пятого степеня має мати розвязку альґебраічну, то в склад его увійдуть функциї виду $v = R^{\frac{1}{m}}$, де $R$ є вимірима функция сочинників рівнаня, а $m$ є число перве. На основі (1) є $v$ вимірима функция корінів; она має $m$ ріжних вартостий, а так як число ріжних вартостий, які функция $m$ величин може приймати, не може бути меньше, як найбільше число перве, що приходить в добутку $1.2.3.......m$, бо в противнім разї зведе ся до 2 або 1, а се є функция пятьох величин $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, то $m$ яко число перве може бути рівне 1, 2, 5. $m = 1$ треба відкинути, бо корінь рівнаня не може бути вимірнмою функциєю сочинників; остає отже $m = 2, 5$.

Возьмім $m = 5$; загальний вид функциї пятивартістноі пятьох величин є:

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4;$$

з відси:

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}},$$

а відтак, як передше:

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) \quad (\alpha^5 = 1).$$

То рівнане є неможливе, позаяк права сторона має 120 вартостий, коли тимчасом се має бути корінь рівнаня 5. степеня:

$$z^5 - s_1 R = 0.$$

Остає отже $m = 2$. Тоді є:

$$\sqrt{R} = p + qs,$$

де $p$ і $q$ є функциї симетричні, а $s = (x_1 - x_2) .... (x_4 - x_5)$; а що, наколи переміннмо $x_1$ і $x_2$ випаде:

$$-\sqrt{R} = p - qs,$$

то мусить бути $p = 0$, отже $\sqrt{R} = qs$, значить ся, що кожда альґебраічна функция першого степеня, що виступає в виражену на корінь, мусить мати вид $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$ ($\alpha$, $\beta$ симетричні функциї). А що є річ неможлива, корінї виразити через функцию виду $\alpha + \beta\sqrt{R}$, то мусить істнувати рівнане:

$R^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha + \beta\sqrt{s^2}} = v$ ($\alpha$, $\beta$ функциї симетричні, $m$ число перве, v виміриа функция корінїв). З відси є:

$$v_1 = \sqrt[m]{\alpha + \beta s}, \quad v_2 = \sqrt[m]{\alpha - \beta s}, \quad v_1 v_2 = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}.$$

Наколи би функция $v_1 v_2$ не була симетрична, то для $m = 2$ було би $v = \sqrt{\alpha + \beta\sqrt{s^2}}$, значить ся v малоби чотири вартости, що неможливе. Мусить отже $\gamma = \sqrt[m]{\alpha^2 - \beta^2 s^2}$ бути функция симетрична; тодї є:

$$p = v_1 + v_2 = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} R^{\frac{m-1}{m}}, \qquad R = \alpha + \beta\sqrt{s^2}.$$

Положім за $R^{\frac{1}{m}}$ $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{2}{m}}$, ...... де $\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + 1 = 0$, то дістанем місто p вартости $p_1$ $p_2 \cdots p_m$. Легко показати, що p має $m$ ріжних вартостий; звідси слїдує $m = 5$, а тодї:

$$p = R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^{\frac{1}{5}}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4.$$

З відси слїдує далї:

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4,$$

або:

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

($t_0$ $t_1$..... є виміримі функциї R і сочинників даного рівнаня. З відси (як передше):

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p' \quad (4)$$

далї є:

$$p'^5 = t_1{}^5 R,$$

а що

$t_1{}^5 R$ має вид $u + u'\sqrt{s^2}$, то є $p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$, або $(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2$.

Звідси би виходило $p'$ через рівнане 10. степеня, якого сочинники є симетричними функциями, а що се неможливе, бо після (4) $p'$ мало би 120 ріжних вартостий, то і загальне рівнане степеня пятого (а так само і висшого) не дасть ся розвязати.

2. Та хотяй рівнаня степеня висшого чим 4. взагалї альґебраічно розвязати ся не дадуть, то однак є певна кляса рівнань всяких степенїв, що дають розвязку альґебраічну; такими є приміром рівнаня виду $x^n - 1 = 0$. Розвязка таких рівнань опираєсь

на відношенях, які заходять між корінями. І так: коли два корінї рівнаня незведимого є так звязані між собою, що один з них можна виразити виміримо через другий, тодї розвязка рівнаня даного дає ся звести до розвязки якогось числа рівнань низшого степеня. А і само рівнане дане дасть ся тодї розвязати альґебраїчно, коли степень єго є числом первим.

Так само дасть ся розвязати рівнане, если всї єго корінї мож представити в видї:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ldots\ \theta^{n-1}x \qquad (\theta^n x = x)$$

(є се Абелева ґрупа правильна), де $\theta x$ є вимірима функция величини x, $\theta^2 x$ така сама функция, що $\theta x$, два рази взята ($\theta^2 x = \theta\theta x$) і т. д.

Метода, якою послуґує ся Абель при розвязуваню сих послїдних рівнань, годить ся з методою Gauss'а, поданою в „Disquisitiones arithmeticae" pag. 645 sqts.

В сїм случаю всї корінї рівнаня дадуть ся виразити виміримо при помочи одного з них; але на відворот рівнаня, котрих корінї мають ту прикмету, не все дають ся розвязати альґебраїчно, кромі що-йно наведеного случаю.[1])

Розвязка альґебраїчна рівнаня є можлива еще в однім случаю, а се тодї, коли всї корінї рівнаня дадуть ся виразити альґебраїчно через один з них, приміром z, а поміж двома якими-небудь корінями тогож рівнаня $\theta x$ і $\theta_1 x$ заходить відношене:

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

(є се ґрупа абелева).

На случай, коли степень рівнаня даного $\varphi(x) = 0$ (а все маємо на думцї рівнаня незведимі) $\mu$ дасть ся розложити ся на:

$$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1}\, \varepsilon_2^{\nu_2}\, \varepsilon_3^{\nu_3} \cdots\cdots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha}$$

де $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \cdots\cdots$ є числами первими, тодї x буде можна знайти через розвязку $\nu_1$ рівнань степеня $\varepsilon_1$, $\nu_2$ рівнань степеня $\varepsilon_2$ і т. д. і всї тї рівнаня дадуть ся альґебраїчно розвязати.

Коли $\mu = 2^\nu$, можна найти вартість x через витягнене $\nu$ корінїв квадратових.

Тї вислїди стосує Абель до функций колових і показує, що щоби подїлити округ кола на $(2n+1)$ рівних частий, вистане:

---

[1]) Рівнаня тї назвав Kronecker „рівнанями Абелевими".

1) поділити округ на 2n рівних частий.

2) поділити лук на 2n рівних частий.

3) витягнути корінь квадратовий з величини $(2n+1)$.

Послїдний теорем висказав вже і Gauss в Diquisitiones arith., на що і Абель ся покликує.

3. Дальші его працї з обсягу альґебри відносились до сумованя рядів. Тут належать:

**Дослїди над рядом:**

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

(Oeuvres compl. I. 66)

Розвідка ся важна е тим, що в нїй по раз перший (спрецизовано) поставлено умовини збіжности ряду.

Тих умовин і прикмет рядів збіжних вичислює автор 6, а е они слїдуючі:

I. Єсли $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \cdots\cdots$ становлять ряд величин додатних, а квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, для ростучих безнастанно вартостий $m$, зближае ся безконечно до границї $\alpha$, де $\alpha > 1$, тодї ряд:

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots\cdots+\varepsilon_m\varrho_m+$$

— де $\varepsilon_m$ для $m$ безнастанно ростучого не наближае ся безконечно до зера, — е рядом розбіжним.

II. Наколи в рядї $\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots\cdots$ квот $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ для ростучих вартостий $m$ зближае ся безнастанно до границї $a < 1$, тодї ряд

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\cdots\cdots$$

— де $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2 \cdots\cdots$ не переходять одиницї, — е рядом збіжним.

III. Єсли $p_m = t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots+t_m$

е меньше, чим якась означена величина $\delta$, тодї

$r=\varepsilon_0 t_0+\varepsilon_1 t_1+\varepsilon_2 t_2+\cdots\cdots+\varepsilon_m t_m$ е меньше, чим $\varepsilon_0\delta$,

де $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots$ суть величинами додатними малїючими.

IV. Наколи ряд

$$f(\alpha)=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots\cdots+v_m\alpha^m+\cdots\cdots$$

е збіжний для якоїсь вартости $\delta$ змінчивої $\alpha$, то він буде збіжний і для кождої меньшої вартости $\alpha$, а для безнастанно малїючої вартости $\beta$ функция $f(\alpha+\beta)$ зближае ся безконечно до границї $f(\alpha)$, коли $\alpha$ е рівне або меньше чим $\delta$.

V. Коли $v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \cdots$

є рядом збіжним, а $v_0, v_1, v_2,$ представляють функциї величини $x$, тяглі в границях межи $a$ і $b$, то ряд

$$fx = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \cdots$$

де $\alpha < \delta$, буде також збіжний і буде функциєю тяглою $x$ в тих самих границях.

VI. Єсли через $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2,$ , $\varrho_0', \varrho_1', \varrho_2', \cdots$ назначимо вартости чисельні відповідних членів двох рядів збіжних $v_0 + v_1 + v_2 +$ $= p$, $v_0' + v_1' + v_2' + \cdots$ $= p'$ то наколи ряди

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots \qquad \varrho_0' + \varrho_1' + \varrho_2' + \cdots$$

суть збіжні, тодї ряд $r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$ котрого член загальний є:

$$r_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \cdots + v_m v'_0$$

буде новим рядом збіжним, а єго сума буде рівнатись:

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) (v_0' + v_1' + v_2' \quad ).$$

По тім вступі автор приходить до властивої задачі вишуканя суми ряду:

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-m)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots \qquad (1)$$

для всїх вартостий дїйсних або мнимих $x$ і $m$, для яких сей ряд є збіжний.

Назвім наш ряд через $\varphi(m)$ і положім для скорочення:

$$1 = m_0, \ \frac{m}{1} = m_1, \ \frac{m(m-m)}{1.2} = m_2, \cdots \frac{m(m-1)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu} = m_\mu$$

то $\varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots$ (2)

Най $x = a + bi, \quad m = k + k'i \qquad (i = \sqrt{-1})$

де $a, b, k, k'$ є числа дїйсні, то дістанемо

$$\varphi(m) = p + qi$$

де $p$ і $q$ суть рядами.

Представмо $x$ в виді

$$x = \alpha(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{де } \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$$

так само:

$$\frac{m - \mu + 1}{\mu} = \delta_\mu (\cos\gamma_\mu + i\sin\gamma_\mu)$$

де

$$\delta_\mu = \sqrt{\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

то:

$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu . \delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \cdots \delta_\mu \left[\cos(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu) + i \sin(\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu)\right].$$

Для скороченя назвемо:

$$\delta_1 . \delta_2 . \delta_3 \cdots \delta_\mu = \lambda_\mu$$

$$\mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu = \Theta_\mu$$

тоді:

$$m_\mu x^\mu = \lambda_\mu \alpha^\mu (\cos \Theta_\mu + i \sin \Theta_\mu)$$

а $\varphi(m)$ представить ся: (3)

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1 \alpha (\cos \Theta_1 + i \sin \Theta_1) + \lambda_2 \alpha^2 (\cos \Theta_2 + i \sin \Theta_2) + \cdots$$
$$+ \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu (\cos \Theta_\mu + i \sin \Theta_\mu) +$$

а відси:

$$\left.\begin{aligned} p &= 1 + \lambda_1 \alpha \cos \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos \Theta_\mu + \cdots \\ q &= \quad\ \lambda_1 \alpha \sin \Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \Theta_2 + \quad\ + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin \Theta_\mu + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

З форми на $\lambda_\mu$ виходить

$$\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} \lambda_\mu$$

отже:

$$\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1} = \alpha \delta_{\mu+1} \lambda_\mu \alpha^\mu$$

або:

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu \alpha^\mu} = \alpha \delta_{\mu+1}$$

а що:

$$\delta_{\mu+1} = \sqrt{\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2}$$

для вартостий $\mu$ ростучих в безконечність зближає ся до одиниці, через що

$$\frac{\lambda_{\mu+1} \alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu \alpha^\mu}$$

наближає ся до границї $\alpha$, проте $p$ і $q$ буде збіжне або розбіжне, залежно від того, чи $\alpha$ є більше, чи меньше від одиниці.

Представмо ряд $\varphi(m)$ в виді:

$$p + qi = r(\cos s + i \sin s)$$

де $$r = \sqrt{p^2 + q^2};$$

возьмім, що:

$$s = \psi(k, k'), \qquad r = f(k, k'),$$

то:

$$p + qi = \varphi(k + k'i) = f(k, k')\left[\cos\psi(kk') + i \sin\psi(kk')\right]$$

а вид тих функций $f$ і $\psi$ буде:

одної:

$$\psi(kk') = \beta k + \beta' k' - 2m\pi$$

де $\beta$ і $\beta'$ суть якимись величинами постійними,

а другої:

$$f(kk') = e^{\delta k + \delta' k'}$$

де $\delta$ і $\delta'$ суть рівнож величинами постійними.

З відси:

$$\varphi(k + k'i) = e^{\delta k + \delta' k'}\left[\cos(\beta k + \beta' k') + i \sin(\beta k + \beta' k')\right] \tag{5}$$

є найзагальнїйшою функциєю, представляючою суму ряду $\varphi(m)$ з неозначеними еще на разї величинами постійними $\beta$, $\beta'$, $\delta$, $\delta'$.

Роздїлїм часть першорядну і другорядну, то дістанемо:

$$e^{\delta k + k'\delta'}\cos(\beta k + \beta' k') = 1 + \lambda_1 \alpha \cos\Theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \cos\Theta_\mu + \cdots \tag{6}$$

$$e^{\delta k + \delta' k'}\sin(\beta k + \beta' k') = \lambda_1 \alpha \sin\Theta_1, + \lambda_2 \alpha^2 \sin\Theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \alpha^\mu \sin\Theta_\mu + \cdots$$

а для $k' = 0$ взори ті перейдуть на:

$$e^{\delta k}\cos\beta k = 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi + \cdots$$

$$(7)$$

$$e^{\delta k}\sin\beta k = \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \cdots$$

а з відси для $k = 1$ найдемо:

$$e^{\delta} = \sqrt{1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2} \qquad \text{i} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}$$

т. з.

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2), \quad \text{а} \quad \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}\right)$$

а тоді рівнаня (7) представлять ся остаточно в виді:

$$1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\cos 3\varphi+$$

$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\cos k s$$

$$\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\sin 3\varphi+\cdots \tag{8}$$

$$=\sqrt{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^k}\sin k s$$

де $s$ значить найменьшу вартість, яку $\beta$ може приняти. Та вартість заключена є поміж $-\frac{\pi}{2}$ а $+\frac{\pi}{2}$. Подібно, як $\beta$ і $\delta$, найде ся вартости на $\beta'$ і $\delta'$ і они будуть $\beta'=\delta$, $\delta'=-\beta$. А тоді рівнаня (6) можуть приняти вид:

$$1+\lambda_1\alpha\cos\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\Theta_2+\cdots\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\Theta_\mu+\cdots\cdots$$

$$=e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k')\quad=p$$

$$\lambda_1\alpha\sin\Theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\Theta_2+\cdots\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\Theta_\mu+\cdots\cdots \tag{9}$$

$$=e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k')\quad=q$$

Отже наш ряд $\varphi(m)=p+qi$ буде:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\mu+1)}{1.2.3\cdots\mu}x^\mu+\cdots\cdots$$

$$=e^{\delta k-k\beta'}\left[\cos(\beta k+\delta k')+i\sin(\beta k+\delta k')\right]$$

де $m=k+k'i$, а $x=a+bi=\alpha(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

з чого виходить:

$\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha\cos\varphi=a$, $\alpha\sin\varphi=b$, $\delta=\frac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)$

$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)$.

Вставивши тоє і кладучи $m$ замість $k$, а $n$ замість $k'$, дістанемо на суму ряду:

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m+ni-1)}{1.2}(a+bi)^2+$$

$$+\frac{(m+ni)(m+ni-1)(m+ni-2)}{1.2.3}(a+bi)^3+$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(m+ni)(m+ni-1)+\cdots\cdots+(m-\mu+1+ni)}{1.2.3\cdots\mu}(a+bi)^\mu+ \tag{10}$$

$$=\left[(1+a)^2+b^2\right]^{\frac{m}{2}} e^{-n\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\left[\cos\left\{m\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\,i\sin\left\{m\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{1}{2}n\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right\}\right]$$

Вираженє то сповняє ся для всяких $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ меньших чим одиниця.

Для $b=0$ і $n=0$ дістанемо ряд поданий в заголовку.

Єслиж $\sqrt{a^2+b^2}$ є рівне одиниці, тоді наш ряд буде збіжний для всякої вартости $m$ заключеної поміж $-1$ і $+\infty$, єсли рівночасно не є $\alpha=-1$. Наколиж $\alpha=-1$, то $m$ мусить бути додатне. У всіх иньших случаях ряд є розбіжний.

Ту треба згадати також про другі ряди, якими займає ся Абель.

І так ряд:

$$y=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\cdots\cdots+\varphi(n)x^n \text{ [1]}$$

— де $n$ є число ціле додатне, скінчене або безконечно велике, а $\varphi(n)$ означає функцию альґебраічну виміриму величин $n$, — сумує автор при помочи рядів виду:

$$p=A0^\alpha+Ax+A2^\alpha x^2+\cdots\cdots+An^\alpha x^n$$

$$q=\frac{B}{\alpha^\beta}+\frac{Bx}{(\alpha+1)^\beta}+\frac{Bx^2}{(\alpha+2)^\beta}+\cdots\cdots+\frac{Bx^n}{(\alpha+n)^\beta}$$

котрі на суму дають:

$$\frac{p-A0^\alpha}{A}=x+2^\alpha x^2+3^\alpha x^3+\cdots\cdots+n^\alpha x^n=$$

$$=x\,d\,(x\,.\,d\,(x\cdots\cdots d\left(x\,.\,d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)\right)$$

а
$$\frac{q}{B}=\frac{1}{x^\beta}+\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\cdots\cdots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx\,(x^{\beta-1}-x^{n+\beta})}{1-x}$$

а що ряд даний складаєсь з рядів тих двох видів, то і сума цілого ряду буде через них визначена.

Подібно находить і суму ряду:

$$z=f(0)\,\varphi(0)+f(1)\,\varphi(1)x+f(2)\,\varphi(2)x^2+\cdots\cdots+f(n)\,\varphi(n)x^n$$

де $f(n)$ означає функцию яку небудь, а $\varphi(n)$ функцию виміриму.

---

[1]) Oeuvres compl. II. 41.

Окремо займае ся еще автор рядом:

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots\cdots \quad [1])$$

Подае именно лежандрівскі висліди сумованя сего ряду для частних аргументів в границях збіжности (— 1 + 1), а відтак сумуе сей ряд для аргументу, що е добутком функций двох змінних, а іменно:

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi y - \psi x - \log(1-y)\log(1-x).$$

В тім взорі $x$ і $y$ мусять мати такі вартости, щоби величини: $\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x не перевисшали одиниці. А то стане ся для додатних $x$ і $y$, коли $x + y < 1$. — Наколиж $y = -m$, тоді мусить $x + m < 1$, а коли оба і $x$ і $y$ суть від'емні, тоді вистане, наколи кожде з них е меньше чим одиниця.

**III.** Перейдім тепер до другої царини аналізи, яку Абель збогатив безсмертними дослідами, а се до **теориї функций еліптичних**, та переглянмо по черзі его розвідки в тій области.

1. Перша его розвідка мае заголовок:

**Розвязка загального проблему відносячого ся до перетвореня функций еліптичних.** (Oeuvrel compl. I. 253).

Ту ставить собі Абель за завдане найти всі можливі случаї, в яких сповнить ся рівнане рівничкове:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

наколи за $y$ вставимо функцию альґебраічну величини $x$, виміриму або невиміриму.

Задача дуже тяжка на око з огляду на загальність функциї $y$ дасть ся спровадити до случаю, коли $y$ е виміриме, змінить ся лиш сочинник $a$ даного рівнаня, а прочі величини $c$ $c_1$ $e$ $e_1$ остануть ті самі.

Положім:

$$\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

---

[1]) Oeuvres compl. II. 249.

то x буде якоюсь функциєю величини $\Theta$; назвім єї $\lambda\Theta$. Дальше назвім через $\frac{\omega}{2}$ і $\frac{\omega'}{2}$ вартости $\Theta$ для $x = \frac{1}{c}$ і $x = \frac{1}{e}$, а через $\Delta\Theta$ функцию $\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}$.

Тодї на підставі рівнаня:

$$\lambda(\Theta \pm \Theta') = \frac{\lambda\Theta.\Delta(\Theta') \pm \lambda\Theta'\,\Delta(\Theta)}{(1-c^2e^2\lambda^2\Theta).\lambda^2\Theta'}$$

де $\Theta$ і $\Theta'$ означають величини які небудь, і на підставі твердженя, що рівнанє:

$$\lambda\Theta = \lambda\Theta'$$

сповнить ся, коли положимо:

$$\Theta' = (-1)^{m+m'}\Theta + m\omega + m'\omega'$$

де $m$ і $m'$ є які небудь числа цїлковиті додатні або від'ємні, легко буде можна дістати загальне вираженє на $y$ і на вартости величин $c_1$ і $e_1$.

Най $y = \psi(x)$ буде функциєю виміримою, якої шукаємо, то $x$ виражене яко функция $y$ буде корінем рівнаня $y = \psi(x)$; а всї коріні сего рівнаня то будуть всї ріжнї вартости вираженя:

$$\lambda(\Theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots\cdots + k_\nu\alpha_\nu)$$

які дістанемо, даючи величинам $k_1\ k_2 \cdots k_\nu$ всї вартости цїлковиті, підчас коли $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ мати муть вид: $\mu\omega + \mu'\omega'$ ($\mu$ і $\mu'$ числа виміримі). Назвім вартости повисшого вираженя:

$$\lambda\Theta,\ \lambda(\Theta + \alpha_1),\ \lambda(\Theta + \alpha_2), \cdots\cdots \lambda(\Theta + \alpha_{m-1})$$

і положім $\psi(x) = \frac{p}{q}$ (p і q функциї цїлковиті величини $x$ без спільного подільника), тодї:

$$p + qy = A(x - \lambda\Theta)(x - \lambda(\Theta + \alpha_1)) \cdots\cdots (x - \lambda(\Theta + \alpha_{m-1}))$$

а рівнанє се сповнить ся для всякої вартости $x$. $A$ яко сочинник при $x^{m-1}$ буде мати вид $f - gy$, де $f$ і $g$ є величини постійні.

На случай, коли p і q є степеня першого, розвязка нашої задачі може мати слїдуючі три види:

1) $$y = ax,\quad c_1{}^2 = \frac{c^2}{a^2},\quad e_1{}^2 = \frac{e^2}{a^2}$$

2) $$y = \frac{a}{ec}\,\frac{1}{x},\quad c_1{}^2 = \frac{c^2}{a^2},\quad e_1{}^2 = \frac{e^2}{a^2}$$

3) $$y = m\frac{1-x\sqrt{ec}}{1+x\sqrt{ec}},\ c_1 = \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{c}-\sqrt{e}}{\sqrt{c}+\sqrt{e}},\ e_1 = \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}},\ a = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c-e).$$

Для якого-небудь степеня $m$ функциї p і q дістанемо:

$$y = \frac{f' + f.\varphi\Theta}{g' + g.\varphi\Theta}$$

де f' g' є сочинники при $x^{m-1}$ в p і q, а $\varphi\Theta$ має вид:

$$\varphi\Theta = (1-k)x + \frac{k'' - k'}{ec}\frac{1}{x}\sum_{\alpha}\frac{2x\Delta(\alpha)}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha . x^2};$$

k, k' і k'' є рівні зеру або одиниції.

З тих перетворень витягає Абель дуже важні твердженя, що дотичать еліптичних функций; і так:

а) Наколи рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}} = \pm a \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

сповнить ся через підставленє: $y = \psi(x) = \frac{p}{q}$, де степень функций p і q є рівний добуткови $mn$, то всегда буде можна найти функциї виміриміі $\varphi$ і f такі, що наколи положимо:

$$x_1 = \varphi(x) = \frac{p'}{q'},$$

то дістанемо:

$$y = f(x_1) = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-c_2{}^2x_1{}^2)(1-e_2{}^2x_1{}^2)}} = a_1 \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}} = a_2 \frac{dx_1}{\sqrt{1-c_2{}^2x_1{}^2)(1-e_2{}^2x_1{}^2)}}$$

при чім степень функций p' і q' є рівний одному з чинників $m$ і $n$, а степень $p_1$ і $q_1$ другому.

б) Який-небудь бувби степень рівнаня $p - qy = 0$, то все можна буде дістати вартість $x$ в $y$ дорогою альгебраічною. Маємо отже одну клясу рівнань, що дадуть ся розвязати альгебраічно; їх корінї будуть функциями вимірими величин:

$$y,\ r_1^{\frac{1}{n_1}},\ r_2^{\frac{1}{n_2}}, \cdots\cdots r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}$$

де $n_1$ $n_2$ $n_\nu$ є перші зглядом себе, а їх добуток рівнаєсь степеневи рівнаня даного; $r_1$, $r_2$, ······ $r_\nu$ мають вид:

$$\xi + t\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1-e_1{}^2y^2)}$$

($\xi$ і $t$ функциї цїлковиті $y$).

в) Коли шукаєм всїх можливих розвязок рівнаня:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

і оно дасть розвязку альґебраічну що до $x$ і $y$ без згляду на те, чи $y$ дасть ся представити виміримо через $x$ чи нї, то величина постійна $a$ буде мати вид $\mu' + \sqrt{-\mu}$, де $\mu$ і $\mu'$ є числа виміримі, а $\mu$ є все додатне. При такій вартости на $a$ можна найти безконечне число ріжних вартостий $e$ і $c$, що будуть сповняти наше рівнанє, а всї они дадуть ся виразити через корінї.

г) Через введенє нових змінних перейде рівнанє на:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}} = a\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Наколи заложимо $\varphi$ і $\psi$ дїйсне, а модул $c < 1$, а надто рівнанє дістане на інтеґрал функцию альґебраічну що до $\sin\varphi$ і $\sin\psi$, то $a$ буде квадратовим корінем з додатної виміримої величини.

Яко додаток до попередних перетворень функций еліптичних випроваджує Абель теорему:

Щоби рівнанє:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

сповнити рівнанєм альґебраічним о змінних $x$ і $y$, при чім модули $c$ і $c_1$ є меньші як 1, а сочинник $a$ дїйсний або мнимий, потреба, а заразом вистарчає, щоби тї модули так були звязані з собою, щоби одно з виражень $\frac{\omega_1}{\tilde{\omega}_1}$ і $\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1}$ дало ся виразити виміримо через $\frac{\omega}{\tilde{\omega}}$,

де
$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

а
$$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}}$$

$$b_1 = \sqrt{1-c^2}$$

а де $\omega_1$ і $\tilde{\omega}_1$ відносять ся до модулів $c_1$ і $b_1$.

2. В окремій розвідці випроваджує Абель:

**Число перетворень функциї еліптичної одержаних через підставлене функциї виміримої, котрої степень є числом першим.** (Oeuvres compl. I. 309).

Приймім, що рівнане

$$\frac{dy}{\Delta'} = a\,\frac{dx}{\Delta} \qquad (1)$$

де $\Delta' = (1-y^2)(1-c_1{}^2y^2)$, $\Delta = (1-x^2)(1-c^2x^2)$

сповнить ся, коли за $y$ підставимо функцию виміриму $x$ виду:

$$y = \frac{A_0 + A_1x + \cdots\cdots + A_{2n+1}x^{2n+1}}{B_0 + B_1x + \cdots\cdots + B_{2n+1}x^{2n+1}}$$

де $2n+1$ є числом першим, а бодай один з сочинників $A_{2n+1}$ і $B_{2n+1}$ є ріжний від зера. Найзагальнійшим розвязанем рівнаня (1) буде для $B_{2n+1} = 0$:

$$y = a\,\frac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha x^2)\left[1-c^2\lambda^2(2\alpha)x^2\right]\cdots\cdots\left[1-c^2\lambda^2(n\alpha)x^2\right]},$$

$$c_1 = c^{2n+1}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+a\right)\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4$$

$$a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c_1}}\left(\lambda\alpha\,.\,\lambda(2\alpha)\,.\cdots\cdots\lambda(n\alpha)\right)^2 \qquad (2)$$

де $$\alpha = \frac{m\omega + m'\omega}{2n+1},\quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta},\quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\Delta}$$

а $m$ і $m'$ суть числами цілими.

Всї прочі вартости на $y$ будуть виду $\frac{f'+fy}{g'+gy}$, де $y$ подане через (2) а $f'$, $f$, $g'$ і $g$ суть величинами постійними, сповняючими рівнане:

$$\left(1+\frac{g+f}{g'+f'}x\right)\left(1+\frac{g-f}{g'-f'}x\right)\left(1+\frac{g+c'f}{g'+c'f'}x\right)\left(1+\frac{g-c'f}{g'-c'f'}x\right) = (1-x^2)(1-c'^2x^2).$$

Рівнане то дає 24 системів вартостий ріжних поміж собою. Отже найдемо, що кождій вартости $\alpha$ відповідає 24 вартостий $y$ і 12 вартостий модулу $c_1$; але позаяк що дві вартости $y$ суть рівні, лише противних знаків, то число ріжних вартостий $y$ буде 12, а так само число вартости $c_1$ буде рівнати ся шість. Кождій вартости $c_1$ відповідають дві ріжні вартости функциї y. Отже коли числам $m$ і $m'$ дамо якінебудь вартости цїлковиті, дістанемо всї можливі розвязаня нашого проблєму.

3. Дальша розвідка з теориї функций елїптичних носить заголовок:

**Дослїди над функциями еліптичними.** (Oeuvres coml. I. 141).

На вступі подає Абель коротку історию функций еліптичних від часу Euler'а, що впровадив тї функциї до математики доказавши спроможности інтеґрованя рівнаня:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}+\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}=0$$

аж по часи Legendre'а, котрий доказав, що всякий інтеґрал елїптичний т. є. інтеґрал

$$\int\frac{R dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

де R є функциєю вимірною, а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ величини постійні дїйсні, можна звести до одного з трох видів:

$$\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}},\ \int d\Theta(1-c^2\sin^2\Theta),\ \int\frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

т. є. інтеґрал першого, другого і третого виду.

Абель займає ся в своїй розвідцї функциєю відворотною, функциєю $\varphi(x)$ означеною рівнанями:

$$x=\int\frac{d\Theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\Theta}}$$

$$\sin\Theta=\varphi(x)=x$$

а надавши їй вид:

$$\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

або:

$$\varphi'(\alpha)=\sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha)}$$

займає ся прикметами трох функций

$$\varphi\alpha,\quad f\alpha=\sqrt{1-c^2\varphi^2\alpha},\quad F\alpha=\sqrt{1+e^2\varphi^2\alpha}.$$

Деякі з тих прикмет виходять безпосередно з видомих прикмет інтеґралів першого виду, иньші є меньше видні.

І так справджує теорем додаваня для функций $\varphi$, f, F, випроваджує їх періодичність, через що стає нам відоме захованє ся функций на цїлім необмеженім просторі змінної дїйсної і мнимої, наколи знаєм захованє ся функциї для вартостий дїйсних в границях $\frac{\omega}{2}$ і $-\frac{\omega}{2}$, а для вартостий мнимих в границях $\frac{\tilde{\omega}}{2}$ і $-\frac{\tilde{\omega}}{2}$; дальше випроваджує Абель, що рівнаня $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ мають безконечне число корінїв, перше з них в видї:

$$\alpha = m\omega + n\tilde{\omega}i,$$

друге:

$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega + n\tilde{\omega}i,$$

трете:

$$\alpha = m\omega + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tilde{\omega}i;$$

се є вже всї корінї тих рівнань.

Одною з найбільше характеристичних прикмет тих функций є, що $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, де $m$ є числом цїлим, можна виразити виміримо через $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ (теорем множеня). Але случай відворотний не має місця, бо рівнаня, які виражають $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, є взагалї рівнанями висших степенів, отже відверненя не є однозначні. Але корінї тих рівнань дадуть ся виразити при помочи $\varphi$, f, F і то коли $m = 2n$ (паристе), то:

$$\varphi\alpha = x = \pm\,\varphi\left[(-1)^{m'+\mu'}\alpha + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\tilde{\omega}i\right]$$

де $m'$ і $\mu'$ є додатні, меньші від $2n$. Отже всї ріжні вартости на x дістанемо кладучи за $m'$ і $\mu'$ всї вартости $(0 \cdots\cdots 2n-1)$; число корінїв є $8n^2$. — Колиж $m = 2n+1$ (непаристе), тодї:

$$x = \varphi\left[(-1)^{\mu'+m'}\alpha + \frac{m'}{2n+1}\omega + \frac{\mu'}{2n+1}\tilde{\omega}i\right],$$

де за $m'$ і $\mu'$ треба класти всї вартости цїлковиті $(-n \cdots\cdots +n)$; число корінїв є тодї $(2n+1)^2$.

Так само:

$$y = f\alpha = f\left[\alpha + \frac{2m'}{m}\omega + \frac{\mu'}{m}\tilde{\omega}i\right]$$

($m'$ і $\mu'$ цїлковиті меньші від m); корінїв буде $m^2$.

А:

$$z = F\alpha = F\left[\alpha + \frac{m'}{m}\omega + \frac{2\mu'}{m}\tilde{\omega}i\right]$$

($m'$ і $\mu'$ цїлковиті додатні, меньші від m); корінїв буде $m^2$.

Через розвязку тих рівнань доходить Абель до представленя функций $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ при помочи функций $\varphi(\alpha)$, $f(\alpha)$, $F(\alpha)$. Задачу ту ділить він на дві части, при чім шукає вираженя наперед для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, а відтак для $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ при помочи $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, бо всяке число мож розбити на $2^{\nu}(2n+1)$.

В першім случаю приходять в вираженю самі лиш корінї квадратові, в другім треба розвязати рівнанє степеня $(2n+1)^2$, а розвязка та, як доказує Абель, дасть ся все перевести альґебраічно. Вираженя, якими представлені є корінї сего рівнаня, заключають дві величини постійні, що зависять від рівнаня степеня $(2n+1)^2-1$. Та розвязка сего рівнаня дасть ся звести до розвязки лиш одного рівнаня степеня $2n+2$; тільки се рівнанє не дасть ся взагалї розвязати альґебраічно.

Та в дуже многих случаях розвязка альґебраічна є можлива, пр. коли: $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$ і т. д.

Першим з тих случаїв займає ся Абель і стосує сей случай до ґеометриї, щоби при помочи лїнїї і циркля подїлити округ лемніскати на $m$ рівних частий, наколи $m=2^n$, або $2^{n+1}$, або коли $m$ є добутком більше чисел тих обох видів. Є се той сам теорем, який стосував Gauss до кола.

Функциї $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ можна представити в ріжнім видї. Назначім через $\sum\limits_{k}^{k'}{}^{m}\,\psi(m)$ суму, а через $\prod\limits_{m=k}^{k'}\psi(m)$ добуток всїх $\psi(m)$, які одержимо кладучи за $m$ всї вартости цїлковиті $(k \cdots\cdots k')$, далї через $\sum\limits_{k}^{k'}{}^{m}\sum\limits_{\nu}^{\nu'}{}^{\mu}\,\psi(m\mu)$ суму, а через $\prod\limits_{m=k}^{k'}\prod\limits_{\mu=\nu}^{\nu'}\psi(m\mu)$ добуток всїх вартостий функциї $\psi(m\mu)$, які одержимо кладучи за $m$ всї вартости цілковиті від $k$ до $k'$, а за $\mu$ всї вартости цїлковиті від $\nu$ до $\nu'$, тодї наші функциї представлять ся в видї сум:

$$\varphi(2n+1)\alpha=\frac{1}{2n+1}\sum_{-n}^{+n}{}^{m}\sum_{-n}^{+n}{}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\varphi\left(\alpha+\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$f(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^m f\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

$$F(2n+1)\alpha = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{-n}^{+n}{}^{m} \sum_{-n}^{+n}{}^{\mu} (-1)^{\mu} F\left(\alpha + \frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)$$

**або в виді добутків:**

$$\varphi(2n+1)\alpha = (2n+1)\varphi\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$f(2n+1)\alpha = f\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{n} \cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

$$F(2n+1)\alpha = F\alpha \prod_{m=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}i + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \cdot$$

$$\prod_{m=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega+\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}} \; \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}i}{2} + \frac{m\omega-\mu\tilde{\omega}i}{2n+1}\right)}}$$

Се є вартости для $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$, коли $m$ є числом непаристим; анальоґічні взори вийдуть і для $m$ паристого.

Наколи підставимо в тих взорах $\alpha = \dfrac{\beta}{2n+1}$, дістанемо взори на функциї $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, які зі згляду на неозначене число $n$ можуть зміняти ся на безконечно много способів. Поміж всїми тими взорами заслугують на увагу ті, які випадуть, коли вставимо $n = \infty$. Тодї дістанемо на функциї $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ вираженя зложені з безконечно много виразів; і так з взорів на суми дістанемо безконечні ряди:

$$\varphi\alpha = \frac{1}{ec} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \left( \frac{(2\mu+1)\omega}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2} - \frac{(2\mu+1)\tilde{\omega}}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\tilde{\omega}^2} \right)$$

$$\mathrm{f}\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{0}^{\infty} {}^{\mathrm{m}} (-1)^{\mathrm{m}} \frac{2[\alpha - (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]}{[\alpha - (\mathrm{m} + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} - \sum_{0}^{\infty} {}^{\mathrm{m}} (-1)^{\mathrm{m}} \frac{2[\alpha + (\mathrm{m} + \frac{1}{2})\omega]}{[\alpha + (\mathrm{m} + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} \right\}$$

$$\mathrm{F}\alpha = \frac{1}{\mathrm{c}} \sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty} \left\{ \sum_{0}^{\infty} {}^{\mu} (-1)^{\mu} \frac{(2\mu + 1)\tilde{\omega}}{[\alpha - (\mathrm{m} + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} + \sum_{0}^{\infty} {}^{\mu} (-1)^{\mu} \frac{(2\mu + 1)\tilde{\omega}}{[\alpha + (\mathrm{m} + \frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2} \right\}$$

**а з взорів на добутки:**

$$\varphi\alpha = \alpha \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\mu^2 \omega^2}\right) \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{(\alpha + \mathrm{m}\omega)^2}{\mu^2 \omega^2}}{1 + \frac{[\alpha + (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \, \frac{1 + \frac{(\alpha - \mathrm{m}\omega)^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{[\alpha - (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \left\{ \frac{1 + \frac{(\mathrm{m} - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{\mathrm{m}^2 \omega^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}} \right\}^2$$

$$\mathrm{f}\alpha = \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{(\mathrm{m} - \frac{1}{2})^2 \omega^2}\right) \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{[\alpha + (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{[\alpha + (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \, \frac{1 + \frac{[\alpha - (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{[\alpha - (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \left\{ \frac{1 + \frac{(\mathrm{m} - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{(\mathrm{m} - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{\mu^2 \tilde{\omega}^2}} \right\}^2$$

$$\mathrm{F}\alpha = \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\mu + \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}\right) \prod_{\mathrm{m}=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{(\alpha + \mathrm{m}\omega)^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{[\alpha + (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \, \frac{1 + \frac{(\alpha - \mathrm{m}\omega)^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{[\alpha - (\mathrm{m} - \frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \left\{ \frac{1 + \frac{(\mathrm{m} - \frac{1}{2})^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}}{1 + \frac{\mathrm{m}^2 \omega^2}{(\mu - \frac{1}{2})^2 \tilde{\omega}^2}} \right\}^2$$

Через застосоване функций виложничих та колових до повисших взорів дійдем до еще простійших виражень на функциї $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$:

$$\varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}-e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$F\alpha = \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{(2m+1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

$$f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}+e^{-\frac{m\tilde{\omega}\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(e^{\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{(2m-1)\tilde{\omega}\pi}{2\omega}}\right)^2}}$$

А вже найпростійший вид після Абеля буде:

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c\omega'}\sqrt{q}\left(\sin x\frac{1}{1-q}+\sin 3x\frac{q}{1-q^3}+\sin 5x\frac{q}{1-q^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{4\pi}{c^2\omega'}\sqrt{q}\left(\cos x\frac{1}{1+q}+\cos 3x\frac{q}{1+q^3}+\cos 5x\frac{q}{1+q^6}+\cdots\cdots\right)$$

де $q=e^{-\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'}\pi}$, $\sqrt[4]{c}=\frac{1-r}{1+r}\,\frac{1-r^3}{1+r^3}\,\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots\cdots\cdots$ $r=e^{-\pi i-\frac{\omega'}{\tilde{\omega}'}\pi}$

а де $\lambda$ і $\lambda'$ означають функциї, на які перейде $\varphi$ і $f$, коли за $\alpha$ підставимо $1-\frac{2\pi}{x}$.

На підставі повисшого вираженя на модул $c$ дійдем до відношеня загального між модулами; а іменно, коли функция елїптична має модул: $\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \frac{1-r^3}{1+r^3} \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots\cdots$ то модул кождої иньшої функциї елїптичної дасть ся перетворити на перший, наколи в вираженє на $c$ вставимо на місце $r$ $r^{\frac{n}{m}}$, де $n$ і $m$ є які небудь два числа цїлковиті додатні.

Legendre показав в своїх „Exercises de calcul integral", як можна замінити інтеґрал:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

на иньші інтеґрали того самого виду з ріжними модулами. Тоту теорию зґенералїзував Абель доказавши, що наколи назначимо:

$$\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\tilde{\omega}i}{2n+1}$$

де бодай одно з поміж чисел $m$ і $\mu$ є перше зглядом $(2n+1)$, то дістанемо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-c_1{}^2y^2)(1+e_1{}^2y^2)}} = \pm\, a \int \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

де:

$$y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)\cdots\cdots\cdots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\cdots\cdots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+2\alpha\right)\cdots\cdots\varphi\left(\frac{\tilde{\omega}i}{2}+n\alpha\right)\right]^2$$

$$a = f(\varphi\alpha\,.\,\varphi 2\alpha\,.\,\varphi 3\alpha \cdots\cdots \varphi n\alpha)^2$$

де $f$ є неозначене, $c_1$ і $e_1$ є вираженє через $c$ і $e$ при помочи функциї $\varphi$ так, що істнує лиш одно відношенє поміж тими величинами. Відношенє се можна представити також при помочи рівнаня альґебраїчного. Величини $e_1$ і $c_1$ можуть принимати усякі вартости кромі 0 і $\infty$.

На основі повисших взорів можна при помочи функций $\varphi$, f, F дістати безконечне число перетворень, що є великої ваги в зіставленю повної теориї перетворень функций елїптичних.

4. Дальша розвідка Абеля з теориї функций еліптичних під заголовком: „**Теория функций еліптичних**“ ділить ся на дві части. (Oeuvr. compl. I. 326.)

Перша часть говорить про функциї еліптичні яко інтеґрали неозначені і не згадує ся в нїй нїчо про природу величин дїйсних або мнимих, з яких ті функциї ся складають. В тій части послугуєсь Абель слїдуючими означенями:

$$\Delta(x, c) = \pm \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}$$

$$\tilde{\omega}(x, c) = \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}, \quad \tilde{\omega}_0(x, c) = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta(x, c)}$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)\Delta(x, c)}$$

так що $\tilde{\omega}(x, c)$, $\tilde{\omega}_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ означають функциї першого, другого і третого виду.[1])

Часть друга говорить про функциї о модулах дїйсних меньших як одиниця. На місце функций $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_0$ і $\Pi$ впроваджує Абель три иньші, а се функцию $\lambda(\Theta)$ означену рівнанєм:

$$\Theta = \int_0^{\lambda\Theta} \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

отже функцию відвернену першого виду, і дві функциї:

$$\tilde{\omega}_0(x, c) = \int (\lambda\Theta)^2\,d\Theta$$

$$\Pi(x, c, a) = \int \frac{\Delta\Theta}{1 - \frac{\lambda^2\Theta}{a^2}}$$

які одержимо кладучи в виражених на $\tilde{\omega}_0(x, c)$ і $\Pi(x, c, a)$ $x = \lambda\Theta$.

a) Часть перша. Функциї еліптичні мають ту прикмету, що суму кількох-небудь тих функций можна виразити через одну лише функцию того самого виду з додатком якогось вираженя альґебраічного і льоґаритмічного. Коли $\psi x$ буде представляти яку-небудь функцию виду:

---

[1]) се властиво не є функциї, але інтеґрали еліптичні.

$$\psi x = \int \left[ A + Bx^2 + \frac{\alpha}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\alpha_1}{1 - \frac{x^2}{a_1^{\,2}}} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_\nu}{1 - \frac{x^2}{\alpha_\nu^{\,2}}} \right] \frac{dx}{\varDelta x},$$

то:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = C - Bp - \frac{\alpha a}{2\varDelta a} \log \frac{fa + \varphi a \varDelta a}{fa - \varphi a \varDelta a} -$$

$$- \frac{\alpha_1 a_1}{2\varDelta a_1} \log \frac{fa_1 + \varphi a_1 \varDelta a_1}{fa_1 - \varphi a_1 \varDelta a_1} - \qquad - \frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\varDelta a_\nu} \log \frac{fa_\nu + \varphi a_\nu \varDelta a_\nu}{fa_\nu - \varphi a_\nu \varDelta a_\nu}$$

де C є стала інтеґрована, $p$ функция альґебраічна, $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві якінебудь функциї цїлковиті що до x, одна паристого степеня, друга непаристого, о сочинниках змінних.

Окремо для функций першого, другого і третого виду форма ся перейде по черзї на:

$$\tilde{\omega} x_1 + \tilde{\omega} x_2 + \cdots\cdots + \tilde{\omega} x_\mu = \tilde{\omega} y + C$$

$$\tilde{\omega}_0 x_1 + \tilde{\omega}_0 x_2 + \cdots\cdots + \tilde{\omega}_0 x_\mu = \tilde{\omega}_0 y - b_{\mu-1} + C$$

$$\Pi x_1 + \Pi x_2 + \cdots\cdots \Pi x_\mu = \Pi y - \frac{a}{2\varDelta a} \log \frac{fa + \varphi a \varDelta a}{fa - \varphi a \varDelta a} + C$$

де $b_{\mu-1}$ є сочинником при найвисшій степени x в функциї $\varphi(x)$, а:

$$y = \pm \frac{a_0}{x_1 x_2 \cdots\cdots x_{\mu-1}}$$

($a_0$ вираз вільний в $f(x)$; знак + або — залежить від того, чи $\mu$ непаристе чи паристе).

$$\tilde{\omega} x = \int \frac{dx}{\varDelta x}, \quad \tilde{\omega}_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\varDelta x}, \quad \Pi x = \int \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \varDelta x}.$$

Суму якого-небудь числа функций еліптичних можна проте представити одною лиш функциєю того самого виду з додатком величини постійної для функций першого виду, а функциї льоґаритмічної для функций третого виду. — Теорем сей не є новий, бо его поставив еще Legendre.

Теорем сей можна виразити при помочи трох иньших простїйших теоремів, дуже важних в своїх застосованях:

1) Коли якийсь інтеґрал виду:

$$\int (y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2 + \cdots\cdots + y_\mu\, dx_\mu)$$

— де $y_1 y_2 \cdots y_\mu$ є функциї альґебраічні величин $x_1 x_2 \cdots x_\mu$, звязані поміж собою якимсь числом рівнань альґебраічних — дасть ся виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні, еліптичні в спосіб:

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots +$$
$$+ A_\nu \log v_\nu + \alpha_1 \psi_1 (t_1) + \alpha_2 \psi_2 (t_2) + \cdots + \alpha_n \psi_n (t_n),$$

де $A_1$ $A_2$ $\alpha_1$ $\alpha_2$ є сталі, $u$ $v_1$ $v_2 \cdots t_1$ $t_2 \cdots$ функциї альґебраічні величин $x_1$ $x_2 \cdots$, а $\psi_1$ $\psi_2$ якінебудь функциї еліптичні, то все буде можна виразити сей інтеґрал в спосіб:

$$\delta \int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu) = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \cdots +$$
$$+ A^{(k)} \log \varrho^{(k)} + \alpha_1 \psi_1 (\Theta_1) + \cdots + \alpha_n \psi_n (\Theta_n),$$

де $\delta$ є число ціле, $\alpha_1$ $\alpha_2$, $A'$ $A''$ сталі, а $\Theta_1$, $\Delta_1 (\Theta_1)$, $\Theta_2$, $\Delta_2 (\Theta_2)$, $\cdots \Theta_n$, $\Delta_n (\Theta_n)$, $\varrho'$ $\varrho'' \cdots \varrho^{(k)}$ є функциї виміримі величин $x_1$ $x_2 \cdots x_\mu$ $y_1$ $y_2$ $y_\mu$.

Теорем сей служить не лиш до розвязки передше поданого теорему загального, але кромі сего є він підставою до застосованя функций альґебраічних, льоґаритмічних і еліптичних до теориї інтеґрованя форм ріжничкових альґебраічних.

2) Коли інтеґрал виду:

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \cdots + y_\mu dx_\mu)$$

дасть ся виразити функциєю альґебраічною і льоґаритмічною виду: $u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu$, то $u$ $v_1$ $v_2 \cdots$ все будуть функциями виміримими величин: $x_1$ $x_2 \cdots x_\mu$, $y_1$ $y_2 \cdots y_\mu$.

Коли отже маєм інтеґрал $\int y dx$, де $y$ є з $x$ звязане якимсь рівнанем альґебраічним, то тодї $u$ $v_1$ $v_2$ є функциями виміримими величин $x$ і $y$[1]).

Покладім в відношеню якімнебудь заходячім між функциями еліптичними:

---

[1]) Є се „теорем Абелевий", важний в теориї „інтеґралів Абелевих". На нїм основує автор нову теорию інтеґрованя форм ріжничкових альґебраічних. Задачею сеї теориї є виконати всї можливі перетвореня інтеґралів форм альґебраічних при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних. Через се зводить ся до можливо малого числа інтеґрали, то представляють в скінченім видї всї інтеґрали тої самої кляси.

$$\alpha_1 \psi_1 (x_1) + \alpha_2 \psi_2 (x_2) + \cdots + \alpha_\mu \psi_\mu (x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + \\ + A_2 \log v_2 + \cdots A_\nu \log v_\nu, \qquad (A)$$

де $\psi_1 (x_1)$, $\psi_2 (x_2), \cdots \psi_\mu (x_\mu)$ означають функциї еліптичні, — $x_1 = x_2 = x_3 = \quad = x_\mu = x$, а модули тих функций $c_1 = c_2 = c_3 = \quad = c_\mu = c$, то лїва сторона рівнаня (A) буде інтеґралом $\int \frac{rdx}{\Delta x}$, де $r$ є функциєю виміримою змінної $x$. Отже:

3) Коли поміж функциями $\tilde{\omega} x$, $\tilde{\omega}_0 x$, $\Pi_1 x_1 \quad \Pi_\mu x$, — де модули функций першого, другого і третого виду суть ті самі, — заходить відношенє:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi_1 x_1 + \alpha_2 \Pi_2 x_2 + \cdots + \alpha_\mu \Pi_\mu x_\mu = u + A_1 \log v_1 + \\ A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu,$$

то $u$, $v_1$, $v_2 \quad v_\nu$ все будуть виду $p + q\Delta x$, де $p$ і $q$ суть функциями виміримими $x$.

Порівнуючи рівнанє (A) з рівнанєм одержаним з него через ріжничкованє, можемо (A) обнижати, так що число функций еліптичних в тім рівнаню буде малїти, а в кінци через повтарянє дійдемо до рівнаня, в котрім будуть приходити лише функциї альґебраічні і льоґаритмічні.

І так теорем поставлений на самім вступі „части першої" зводить ся до сповненя рівнаня:

$$\psi(x) = \beta_1 \psi_1 y_1 + \beta_2 \psi_2 y_2 + \cdots + \beta_n \psi_n y_n + u + A_1 \log v_1 + \\ + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu .$$

А щоби се рівнанє сповнити в случаю найзагальнїйшім, потреба:

1) Найти всї случаї, коли дасть ся сповнити рівнанє:

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) \qquad (1)$$

($p$ і $q$ функциї виміримі неозначеного $x$, а $c$ і $c'$ величини постійні).

2) Сповнивши рівнанє (1), звести три функциї $\tilde{\omega}(y c')$, $\tilde{\omega}_0(y c' a)$ $\Pi(y c' a)$ до виду:

$$r + A \tilde{\omega} x + A_0 \tilde{\omega}_0 x + A' \Pi(x a') + A'' \Pi(x a'') + \cdots$$

де $r$ означає часть альґебраічну і льоґаритмічну.

3) Найти умовини потрібні і достаточні, щоби функцию виду:

$$\alpha \tilde{\omega} x + \alpha_0 \tilde{\omega}_0 x + \alpha_1 \Pi' (x a') + \alpha_2 \Pi'' (x a'') + \cdots$$

— де всї функциї еліптичні мають той сам модул — виразити при помочи функций альґебраічних і льоґаритмічних.

Найлекша є умовина послїдна і тому від неї зачнемо.

Взір, що позваляє функциї елїптичні якінебудь всїх трох видів виразити при помочи функций альґебраїчних і льоґаритмічних, є:

$$\beta\tilde{\omega}x - \frac{2m_1 \Delta\alpha_1}{\alpha_1} \Pi'\alpha_1 - \frac{2m_2 \Delta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'\alpha_2 -$$

$$- \frac{2m_n \Delta\alpha_n}{\alpha_n} \Pi'\alpha_\nu = \log\left(\frac{fx + \varphi x\Delta x}{fx - \varphi x\Delta x}\right) + C$$

де $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_n$ мусять сповняти рівнанє:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1{}^2)^{m_1}(x-\alpha_2{}^2)^{m_2} \cdots\cdots (x-\alpha_n{}^2)^{m_n}$$

а з поміж функций fx і $\varphi$x одна є париста, друга непариста.

Таке є віднощенє найзагальнїйше поміж функциями відносячими ся до того самого модулу і тої самої змінної. Цїкаве, що у взорі повисшім нема зовсїм функциї елїптичної другого виду.

Друга умова, то сповненє рівнаня:

$$(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

де $y$ і $r$ суть функциями вимірними величини $x$. Через підставленє

$$r = \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{dy}{dx}$$

де $\varepsilon$ є постійне, можна се рівнанє звести до виду:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c'^2y^2)}} = \frac{\varepsilon\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

або:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon\,\frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

а інтеґруючи одержимо:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C.$$

Отже коли істнує відношенє між якимнебудь числом функций еліптичних, а $c$ означає модул одної з них довільно вибраної, то поміж прочими функциями найдесь бодай одна о модулї $c'$ така, що між функциями *першого виду* відповідаючими модулам c і $c'$ істнує відношенє:

$$\tilde{\omega}(y,c') = \varepsilon\tilde{\omega}(x,c) + C$$

де $y$ є функция вимірима $x$, а де $\varepsilon$ є постійне. Якийнебудь буде степень тої функциї

$$y = \psi(x) = \frac{p}{q}$$

де $p$ і $q$ суть функциями цїлковитими $x$, то все модул $c'$ буде мати $6$ вартостий ріжних між собою, а до кождої вартости модула $c$ належати будуть дві вартости $y$. Значить, що функция $y$ буде мати 12 ріжних вартостий. Вид тої функциї буде залежати від вартостий $a$ і $b$ в рівнаню

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \cdots (z - x^{(\mu-1)})$$

де $a$ і $b$ суть постійні, а $x', x'', \cdots x^{(\mu-1)}$ суть коренями рівнаня $y = \psi(x)$.

І так для $b$ рівного зеро, а $\mu$ непаристого $\mu = 2n + 1$

$$y = a \frac{x(e_1{}^2 - x^2)(e_2{}^2 - x^2) \cdots (e_n{}^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n{}^2 x^2)}$$

для $b = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = \frac{a(1 - \delta_1{}^2 x^2)(1 - \delta_2{}^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n{}^2 x^2)}{x(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n + 1$

$$y = \frac{a(1 - c^2 e_1{}^2 x^2)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_n{}^2 x^2)}{x(e_1{}^2 - x^2)(e_2{}^2 - x^2) \cdots (e_n{}^2 - x^2)}$$

для $a = 0$, а $\mu = 2n$

$$y = a \frac{x(1 - c^2 e_1{}^2 x)(1 - c^2 e_2{}^2 x^2) \cdots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x)}{(1 - \delta_1{}^2 x^2)(1 - \delta_2{}^2 x^2) \cdots (1 - \delta_n{}^2 x^2)}$$

де $e_1$, $e_2$, $\cdots$ суть коренями рівнаня $e^n = 0$, а $e_n$ є функция величини $e$ така, що:

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n \frac{de}{\Delta e},$$

а де $\delta_1$, $\delta_2 \cdots$ суть коренями рівнаня $q = 0$.

**Рівнане $y = \psi(x)$, де $\psi(x)$ є функциєю вимірною $x$, сповняюче:**

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \frac{dx}{\Delta(x, c)}$$

**має ту прикмету, що дасть ся розвязати при помочи самих лиш коренїв.**[1])

Через се дістаємо цїлу величезну клясу рівнань альґебраїчних якихнебудь степенїв, що дадуть ся розвязати альґебраїчно.

---

[1]) Теорем сей, званий теоремом множеня функций елїптичних, має первородне значінє в дальшім розвою функций елїптичних.

На трету умовину відповідає автор, що відношенє якенебудь між функциями еліптичними о модулах $c_1$, $c_2$, $c_m$, не може істнувати, наколи поміж відповідними функциями першого виду не заходить відношене:

$$\tilde{\omega}(x,c) = \frac{1}{\varepsilon_1}\,\tilde{\omega}(y_1,c) = \frac{1}{\varepsilon_2}\,\tilde{\omega}(y_2,c) = \cdots\cdots = \frac{1}{\varepsilon_m}\,\tilde{\omega}(y_m,c_m)$$

де $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ $\varepsilon_m$ суть величини постійні, а $y_1$, $y_2$, $y_3$ $y_m$ функциї виміримі змінної $x$.

Але коли якусь функцию еліптичну $\varphi(x)$ о модулі $c'$ мож виразити через другі функциї еліптичні о модулах $c_1$, $c_2$, $\cdots\cdots$ $c_m$, то все буде мож ту функцию виразити при помочи функций еліптичних, — всїх з тим самим модулом $c$, де $c$ є довільно вибраним з поміж модулів $c_1$, $c_2$, $\cdots\cdots$ $c_m$. Тота функция представить ся:

$$\varphi y = \int \frac{r\,dx}{\Delta(x\,c)}$$

де $y$ і $r$ є функциї виміримі змінної $x$.

б) В части другій подані лиш самі вислїди без доказів, а всї они відносять ся до прикмет функциї $\lambda\Theta$.

1. Функция $\lambda\Theta$ є двоперіодична і має період один дїйсний, другий мнимий.

$$\lambda(\Theta + 2\tilde{\omega}) = \lambda\Theta,$$
$$\lambda(\Theta + \omega i) = \lambda\Theta$$

де $$\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x\,c)}, \quad \text{а} \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,b)}$$

$$(b = \sqrt{1-c^2}, \quad \sqrt{-1} = i)$$

2. Функция $\lambda\Theta$ стає ся зером і безконечностию для безконечного числа вартостий дїйсних і мнимих $\Theta$:

$$\lambda(m\tilde{\omega} + n\omega i) = 0,$$
$$\lambda\left(m\tilde{\omega} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega i\right) = \frac{1}{0}$$

де $m$ і $n$ є числа цїлі додатні або відємні.

Дальше для:

$$\Theta' = (-1)^m\,\Theta + m\tilde{\omega} + n\omega i$$

є $$\lambda\Theta' = \lambda\Theta.$$

3. Функция $\lambda\Theta$ сповняє рівнанє:

$$\lambda(\Theta' + \Theta)\,\lambda(\Theta' - \Theta) = \frac{(\lambda\Theta')^2 - (\lambda\Theta)^2}{1 - c^2(\lambda\Theta)^2(\lambda\Theta')^2}$$

де $\Theta$ і $\Theta'$ суть якінебудь величини змінні дїйсні або мнимі.

4. Функция $\lambda\Theta$ дасть ся розвинути на добуток або суму дробів на богато способів. Приміром кладучи:

$$q = e^{-\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\pi} \qquad p = e^{-\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\pi}$$

дістанемо:

$$\lambda(\Theta\omega) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\,\sin(\pi\Theta)\,\frac{[1-2q^2\cos(2\Theta\pi)+q^4]\,[1-2q^4\cos(2\Theta\pi)+q^8]\,[1-2q^6\cos(2\Theta\pi)+q^{12}]\cdots}{[1-2q\cos(2\Theta\pi)+q^2]\,[1-2q^3\cos(2\Theta\pi)+q^6]\,[1-2q^5\cos(2\Theta\pi)+q^{10}]\cdots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c}\,\frac{\pi}{\tilde{\omega}}\left[\frac{1}{1-q^2}\sin(\Theta\pi) + \frac{q}{1-q^3}\sin(3\Theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5}(5\Theta\pi) + \cdots\cdots\right]$$

$$\lambda\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} - \Theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{(1-pe^{-2\pi\Theta})\,(1-pe^{2\pi\Theta})\,(1-p^3e^{-2\pi\Theta})\,(1-p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}{(1+pe^{-2\pi\Theta})\,(1+pe^{2\pi\Theta})\,(1+p^3e^{-2\pi\Theta})\,(1+p^3e^{2\pi\Theta})\cdots}$$

Анальоґічно мож представити функцию другого і третого виду.

5. Дуже важна прикмета функциї $\lambda\Theta$ є слїдуюча: (для скороченя підставимо $\Delta\Theta = \pm\sqrt{(1-\lambda^2\Theta)(1-c^2\lambda^2\Theta)}$)

Наколи рівнанє:

$$(\lambda\Theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\Theta)^{2n-2} + \cdots\cdots + a_1(\lambda\Theta)^2 + a_0 = b_0\,\lambda\Theta + b_1(\lambda\Theta)^3 + \cdots\cdots +$$
$$+ b_{n-2}(\lambda\Theta)^{2n-3}.\Delta\Theta$$

буде сповнене, коли за $\Theta$ підставимо 2n вартостий $\Theta_1$, $\Theta_2$ $\Theta_{2n}$, таких що $(\lambda\Theta_1)^2$, $(\lambda\Theta_2)^2, \cdots\cdots (\lambda\Theta_{2n})^2$, суть ріжні поміж собою, тодї буде все:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots\cdots + \Theta_{2n}) = 0$$

$$-\lambda(\Theta_{2n}) = \lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots + \Theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\Theta_1\,.\,\lambda\Theta_2 \qquad \lambda\Theta_{2n-1}}$$

сочинники $a_0$, $a_1$, , $b_0$, $b_1, \cdots\cdots\cdots$ можуть бути якінебудь, а можна їх визначити, позаяк $\Theta_1$, $\Theta_1, \cdots\cdots\cdots$ $\Theta_{2n-1}$ є дані.

А отсе також важна прикмета:

Коли покласти

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\Theta_1)(x-\lambda\Theta_2)\cdots\cdots\cdots(x-\lambda\Theta_\mu)$$

де $p$ і $q$ є якінебудь функциї цїлковиті $x$, то все мож буде вибрати величини $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ $\Theta_\mu$ так, що виражене:

$$\lambda(\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots\cdots\cdots + \Theta_\mu)$$

буде зером або безконечностию.

Подібно приміром, коли

$$p^2 - x^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\Theta)^\mu$$

де одна з функций $p$ і $q$, є париста а друга непариста, тоді буде:

а) для $p$ паристого:

$\lambda(\mu\Theta) = 0$, коли $\mu$ є паристе

$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}$, коли $\mu$ є непаристе.

б) для $p$ непаристого

$\lambda(\mu\Theta) = 0$, коли $\mu$ є непаристе

$\lambda(\mu\Theta) = \frac{1}{0}$, коли $\mu$ є паристе;

а з відси виходить, що коли рівнанє повисше має місце, то:

$$\lambda\Theta = \lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right)$$

де $m$ і $n$ суть цїлі і меньші чим $\mu$.

6. Поміж величинами $\lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ а коренями одиницї $(2\mu+1)^{\text{ими}}$ істнують дуже цікаві відношеня:

$$0 = \lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + \omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^k\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k}\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 3\omega i}{2\mu+1}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots + \delta^{2\mu k}\lambda\left(\frac{2m\tilde{\omega} + 2\mu\omega i}{2\mu+1}\right)$$

$$0 = \lambda\left(\frac{\omega + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{k'}\lambda\left(\frac{2\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right) + \delta^{2k'}\lambda\left(\frac{3\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right) +$$

$$+ \cdots\cdots + \delta^{2\mu k'}\lambda\left(\frac{2\mu\tilde{\omega} + m\omega i}{2\mu+1}\right)$$

де $\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1} + i\sin\frac{2\pi}{2\mu+1}$, а всї величини $\lambda\left(\frac{m\tilde{\omega} + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ суть коренями одного лиш рівнаня степеня: $(2\mu+1)^2$, котрого сочинники є функциями вимірними $c^2$.

7. Коли функция

$$\int\frac{dx}{\Delta(xc)}$$

о модулї $c$, дійснім і меньшім чим одиниця, дасть ся перетворити на иньшу:

$$\varepsilon \int \frac{dy}{\Delta(x,c')}$$

о модулї $c'$ дїйснім або мнимім, через підставлене за $y$ якоїнебудь функциї альґебраічноï $x$, тодї модул $c'$ дасть ся виразити через одно з помежи рівнань:

$$\sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}\ \sqrt[8]{q_1}\ \frac{(1+q_1{}^2)(1+q_1{}^4)(1+q_1{}^6)\cdots\cdots}{(1+q_1)(1+q_1{}^3)(1+q_1{}^5)\cdots\cdots}$$

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{1-q_1}{1+q_1}\ \frac{1-q_1{}^3}{1+q_1{}^3}\ \frac{1-q_1{}^5}{1+q_1{}^5}$$

де $q_1 = q^{\mu}$, а $\mu$ виміриме, або, що на одно вийде:

$$q_1 = e^{\left(\mu\frac{\omega}{\tilde{\omega}} + \mu' i\right)\pi}$$

$\mu$ і $\mu'$ які небудь числа вимірими.

8. Функция $\lambda\Theta$ має застосоване в теориї перетворень. І так при єї помочи показуєсь, що, щоби дві функциї дїйсні перетворити одну на другу, т. зн. щоби сповнити рівнане:

$$\int \frac{dy}{\Delta(x, c')} = m\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \int \frac{dx}{\Delta(x,c)}$$

потреба, щоби поміж функциями $\tilde{\omega}$, $\omega$, $\tilde{\omega}'$, $\omega'$ заходило рівнане:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\ \frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

де $n$ і $m$ є числа цїлі.

9. На увагу заслугує случай, коли один з поміж модулів мож перетворити на єго доповнене $\sqrt{1-c^2} = b$.

В тім случаю будемо мати з узглядненем рівнаня:

$$\frac{\tilde{\omega}'}{\omega'} = \frac{n}{m}\ \frac{\tilde{\omega}}{\omega}$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{і} \quad \frac{dy}{\Delta(y,b)} = \sqrt{mn}\ \frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Модул $c$ буде визначений рівнанем альґебраічним, котре мож розвязати при помочи корінів; бодай так буде дійсно, коли $\frac{m}{n}$ є повним квадратом. У всїх случаях легко виразити $c$ через безконечні добутки.

І справдї коли

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{n}},$$

тодї маємо:

$$\sqrt[4]{c} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{\left(1 + e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 + e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)}{\left(1 + e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 + e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1 - e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}{\left(1 + e^{-\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\left(1 + e^{-3\pi\sqrt{\frac{n}{m}}}\right)\cdots\cdots}$$

Коли два модули $c$ і $c'$ дадуть ся перетворити один на другий, то они будуть звязані між собою альґебраїчно. Але взагалї буде неможливо виразити $c'$ через $c$ при помочи коренів і тільки в тім случаю буде се можливе, коли $c$ мож перетворити на єго доповненє.

Рівнаня модулові мають ту прикмету, що всї їх коренї мож виразити виміримо при помочи двох з поміж них; а всї коренї дадуть ся виразити через один з помежи них при помочи корінїв.

10. Функцию $\lambda\theta$ мож розвинути на:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + }{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \cdots\cdots}$$

де чисельник і знаменник є рядами збіжними.

Кладучи:

$$\varphi\theta = \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 +$$
$$f\theta = 1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 +$$

можемо ті функциї виразити при помочи рівнань:

$$\varphi(\theta' + \theta)\,\varphi(\theta' - \theta) = (\varphi\theta f\theta')^2 - (\varphi\theta' f\theta)^2$$
$$f(\theta' + \theta)\, f(\theta' - \theta) = (f\theta f\theta')^2 - c^2(\varphi\theta\varphi\theta')^2$$

де $\theta$ і $\theta'$ є независимі змінні.

**IV.** Широко опрацьовує автор теорию **переступних функций еліптичних.** Ту належить розвідка:

1. **Теория переступних функций еліптичних.** (Oeuvres compl. II. 93.)

Автор розпочинає з в е д е н є м  і н т е ґ р а л а

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}}$$

н а  ф у н к ц и ї  а л ь ґ е б р а ї ч н і.

Назвім для скороченя корінь через $\sqrt{R}$ та розбираймо:

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$$

де $P$ значить функцию альґебраїчну виміриму $x$.

$P$ мож розложити на члени виду $Ax^m$ і $\frac{A}{(x-a)^m}$, де $m$ є числом цілковитим. Автор розбирає ті інтеґрали:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \quad \text{і} \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$$

спершу окремо, а відтак разом.

a) *Зведенє інтеґрала*

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Пошукаймо загальної функциї альґебраїчної, котрої ріжничка дасть ся розложити на члени виду

$$\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}},$$

бо тоді інтеґрал тої функциї так розложеної дасть відношенє загальне поміж інтеґралами виду

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}.$$

Функция шукана не може заключати иньших корінїв, лише $\sqrt{R}$, а як функция вимірима величин $x$, $\sqrt{R}$ буде мати вид:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q' + Q\sqrt{R}$$

де $Q$ і $Q'$ суть функциями вимірмими $x$, або опустивши $Q'$, позаяк оно буде заключати лише самі вираженя вимірмі $x$, дістанемо:

$$f(x, \sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

Функция $Q$ мусить бути цілковитою, бо в противнім случаю, колиб заключала член виду $\frac{1}{(x-a)^m}$, тодї ріжничка вираженя

$$\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}:$$

$$d\left[\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right] = \left[\frac{\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}}\right]\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

малаби за сочинник при $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ функцию дробову, хиба що $R$ малоби принайменьше два сочинники рівні т. з. інтеґрал мавби зовсїм иньший вид, бо $\int \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$.

Тото $Q$ яко цїлковита функция альґебраічна представить ся:

$$Q = f(0) + f(1)x + f(2)x^2 \cdots\cdots + f(n)x^n;$$

зріжничкуймо найдену функцию $Q\sqrt{R}$, то дістанемо:

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{RdQ + \frac{1}{2}QdR}{dx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = S\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

а коли за $Q$ і $R$ підставимо вартости, дістанемо на $S$ якусь функцию цїлковиту $x$ степеня $m$, пр.

$$S = R\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{2}Q\frac{dR}{dx} \tag{1}$$

$$= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots\cdots + \varphi(m)x^m; \tag{2}$$

з порівнаня сочинників (1) і (2) вийдуть вартости на $\varphi$:

$$\varphi(p) = (p+1)f(p+1)\alpha + (p+\tfrac{1}{2})f(p)\beta + pf(p-1)\gamma + (p-\tfrac{1}{2})f(p-2)\delta + \\ + (p-1)f(p-3)\varepsilon \tag{3}$$

де $p = 0, 1, 2, 3, \quad m$.

А що дотичить вартости $n$, то випаде $m = n+3$.

І тепер функция наша:

$$Q\sqrt{R} = \int S\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

представить ся в видї:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \varphi(m)\int\frac{x^m dx}{R} = \\ = \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3}) \tag{4}$$

То є найзагальнїйше відношенє поміж інтеґралами виду $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, виражене функциями альґебраічними. З рівнаня сего мож випровадити всї зведеня (réduction), які інтеґрали сего виду допускають. Лїва сторона сего рівнаня є заразом найбільше загальним інтеґралом виду $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цїлковита $x$), який дасть ся виразити через функциї альґебраічні.

В рівнаню (4) є очевидно $m \geq 3$, бо права сторона є функцією цілковитою $x$, отже всяке $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, $m \geqq 3$, дасть ся виразити через інтеґрали того самого виду о низшім $m$. Лише

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

суть незведимі при помочи функций альґебраічних, і то суть одинокі функциї переступні в інтеґралї $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ (P функция цілковита), (інтеґрали абелеві I-го, II-го і III-го виду).

Щоби звести інтеґрал $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, положимо в рівнаню (4) $\varphi(m) = -1$, а позаяк:

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \qquad \varphi(3) = 0$$

то:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} -$$

$$- \sqrt{R}\,(f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \cdots\cdots + f(m-3)x^{m-3})$$

а сочинники $\varphi(0)$ $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, f(0), f(1), $\cdots\cdots$ f(m—3) дістанемо з (3) кладучи $p = 0, 1, \cdots\cdots m$.

І так приміром $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ виразить ся через названі функциї переступні ось як:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = \left(\frac{5}{24}\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{12}\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varepsilon}\right) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \left(\frac{5}{8}\frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{3}\frac{\gamma}{\varepsilon}\right) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \left(\frac{5}{12}\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}x\right) \sqrt{R}$$

Інтеґрал $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ дасть ся, як бачилисьмо, виразити через три функциї перестуцні. Колибисьмо хотїли се число функций перестуцних зменьшити, то поміж величинами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ мусїлиби зайти якісь відношеня. Приміром, щоби $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ виразити через функциї альґебраічні, требаби поклаети $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$, а тодї три з поміж $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ виразять ся через дві прочі. Приміром інтеґрал $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}}$ вираженний функциями альґебраічними буде:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{R}} = -\left(\frac{5}{12}\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\varepsilon}x\right)\sqrt{R}$$

б) *Зведенє інтеґрала*

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}.$$

В тім случаю $Q$ яко функция дробова дасть ся розложити на дроби частинні:

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}$$

$$d(Q\sqrt{R}) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

де S кладемо:

$$S = \varphi'(0) + \varphi'(1)(x-a) + \varphi'(2)(x-a)^2 + \frac{\chi(1)}{x-a} + \frac{\chi(2)}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{\chi(m)}{(x-a)^m}$$

а $\varphi$ і $\chi$ суть сочинниками при відповідних степенях $(x-a)$, такі які випадуть з розвиненя.

А інтеґрал: $Q\sqrt{R} = \int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ представить ся:

$$\varphi(0)\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$

$$+ \chi(1)\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2)\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} + \cdots\cdots + \chi(m)\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{(x-a)} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right) \quad (5)$$

З сеї форми видко, що

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}, \; m > 1$$

все дасть ся виразити через три інтеґрали:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \; \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \text{ і інтеґрал } \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},$$

та що сей послїдний *взагалї* є незведимий. Він дасть ся звести лише через відповідне дібранє величин $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, подібно, як три попередні функциї перестулні. Кладучи в (5) $\chi(m) = -1$, $\chi(2) = \chi(3) = \quad = \chi(m-1) = 0$, дістанемо:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \chi(1) \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$- \sqrt{R} \left( \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \cdots\cdots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}} \right) \quad (6)$$

Єслиж $(x-a)$ є чинником функциї $R$, отже $R$ стає зером для $x = a$, тодї (5) не дасть ся застосувати до зведеня інтеґрала $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$. Та коли за $m$ положимо $m+1$ і в так зміненім взорі покладемо $m = 1$, тодї інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$ дасть ся виразити через $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{R}} = \varphi(0) \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$$
$$- \sqrt{R} \left( \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \cdots\cdots \frac{\psi(m)}{(x-a)^m} \right) \quad (7)$$

Ві всїх прочих случаях оно є неможливе, позаяк рівнанє (6) закладає $m > 1$.

Інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ дасть ся також звести в случаю, коли $(x-a)$ є чинником $R$. Взір (7) перейде тодї на:

$$\int \frac{dx}{(x-a\sqrt{R}} = - \frac{a^2 + a(a' + a'' + a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{a + a' + a'' + a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} \cdot \frac{\sqrt{R}}{x-a} \quad (8)$$

де $R = (x-a)(x-a')(x-a'')(x-a''')$.

Щоби найти відношенє поміж інтеґралами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, положім:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}+$$

$$+\varphi(3)\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}\right)$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}+\frac{A'''}{x-a'''}=0$$

Та коли в то рівнанє підставимо вартости за $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і т. д., тоді дістанемо відношенє:

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}}=$$

$$=\sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\frac{A''}{x-a''}\right) \tag{9}$$

То є відношенє між трома якиминебудь з помежи інтеґралів:

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$

значить, два з поміж них можна виразити через два другі, наколи $(x-a)$ є чинником R. В противнім случаю, коли $(x-a)$ не є чинником $R$, відношенє нїяке між інтеґралами не істнує.

Пошукаймо тепер еще, чи інтеґрали

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt{R}},\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

не дадуть ся звести на інтеґрали виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і які відношеня мусять тоді істнувати поміж $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$.

Позаяк $(x-a)$ мусить бути чинником $R$, проте на підставі (9):

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}=$$

$$=A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}\left(\frac{B}{(x-a)}+\frac{B'}{(x-a')}\right)$$

Підставивши за $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ вартости, дістанемо з порівнаня сочинників вартости на A, A', B, B', а межи $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ вийде відношенє:

$$2\varepsilon\varphi(1) - \delta\varphi(2) = 0.$$

Кладучи $\varphi(1) = 0$ а $\varphi(0) = 1$ дістанемо $\varphi(2) = 0$, а тоді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} +$$
$$+ \frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')} \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')} \quad (10)$$

Колиж покладемо $\varphi(0) = 0$, а $\varphi(2) = 1$, тоді $\varphi(1) = \frac{\delta}{2\varepsilon}$ і дістанемо:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\delta \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} = \frac{a'(a'-a-a''-a''')f'(a)}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{a(a-a'-a''-a''')f'(a')}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')} \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \quad (11)$$
$$+ \frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')} \cdot \left( \frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a} - \frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'} \right)$$

де:

$$f'(a) = \frac{d f(a)}{da} \qquad f(x) = R.$$

Отже бачимо, що $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся виразити при помочи інтеґралів $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ і $\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$. А вже інтеґрали $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$ і $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ не дадуть ся виразити в сей спосіб. Коли $a+a' = a''+a'''$, то (10) і (11) стають ілюзоричні, а лишаєсь лише рівнанє (8); в тім случаю мож найти відношенє поміж двома інтеґралами виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; оно буде:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} = \frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}$$

Дальшою квестиєю є слідуюча:

**Зведеня інтеґралу $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ при помочи функций льоґаритмічних.**

Будемо шукати відношень льоґаритмічних, які мож одержати поміж чотирома інтеґралами $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ незведимими при помочи функций альґебраічних. В тій цїли пошукаємо загальноï функциï льоґаритмічноï, котроï ріжничка дасть ся розложити на вираженя виду:

$$\frac{Ax^n dx}{\sqrt{R}}, \text{ і } \frac{A dx}{(x-a)^m \sqrt{R}}$$

а зінтеґрувавши ту ріжничку дістанемо загальне відношене поміж тими чотирома інтеґралами, виражене при помочи функций льоґаритмічних. Шукана функция льоґаритмічна буде очевидно мати вид:

$$T = A \log (P + Q\sqrt{R}) + A' \log (P' + Q'\sqrt{R}) + A^{(2)} \log (P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R}) + \\ + \cdots\cdots + A^{(n)} \log (P^{(n)} + Q^{(n)}\sqrt{R})$$

де $P, P', P^{(2)}$, $Q, Q', Q^{(2)} \cdots$ суть цїлковитими функциями $x$, а $A, A', A^{(2)}$, суть величинами постійними. З тоï функциï $T$ мож еще виділити виміриму часть яко не маючу значіня і взяти під увагу функцию:

$$T' = A \log \left( \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) + A' \log \left( \frac{P' + Q'\sqrt{R}}{P' - Q'\sqrt{R}} \right) +$$

а вже ріжничка сего вираженя не буде зовсім заключати в собі частий вимірних.

$$dT' = A \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} + A' \frac{P'Q'dR + 2(P'dQ' - Q'dP')R}{(P'^2 - Q'^2R)\sqrt{R}} + \cdots \\ = S' \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

Коли положимо:

$$A \frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

то:
$$M = A \frac{2N \frac{dP}{dx} - P \frac{dN}{dx}}{Q}, \quad N = P^2 - Q^2R.$$

З сего видко, що коли $(x-a)^m$ є подільником функциї $N$, $(x-a)^{m-1}$ буде подільником $M$, отже $\frac{M}{N}$ не може мати членів виду $\frac{B}{(x-a)^m}$ при $m > 1$. Дальше, коли $(x-a)$ є чинником заключеним в $R$, то він буде і чинником $P$, отже $M$ і $N$ будуть его мати яко чинник спільний, значить $\frac{M}{N}$ не може заключати також виражень $\frac{B}{x-a}$, наколи $(x-a)$ є чинником $R$. $\frac{M}{N}$ є на случай, коли $m > n+2$ і $m < n+2$, величиною постійною, а лише на случай коли $m = n+2$, може бути функциєю цілковитою першого степеня, ($m$ означає степень функциї $P$, а $n$ функциї $Q$), і на тій підставі $\frac{M}{N}$ буде мати вид:

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} +$$

де $(x-a)$, $(x-a')$ не суть чинниками в $R$.

З сего виходить, що інтеґрал $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ є незведимий в ніякім случаю. Він становить незведимість особливу (transcedente particulière).

$T'$ представить ся: (12)

$$T' = k\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + k'\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \cdots\cdots + L^{(\nu)}\int \frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}}$$

І се є найзагальнїйше відношенє між нашими інтеґралами.

Щоби скористати з сего рівнаня, автор розвязує кілька (пять) частинних проблемів, з котрих перший є:

A) Виразити інтеґрал $\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ через як найменьше число інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Наколи $P$, $Q$, $P'$, $Q'$, $\cdots\cdots$ $P^{(r)}$, $Q^{(r)}$ суть степенів: $m$, $n$, $m'$, $n'$, $m^{(r)}$, $n^{(r)}$, то они мають $m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + r + 1$ сочинників неозначених, а додавши до сего ще $A$, $A'$, $A^{(r)}$, будемо мати всїх сочинників неозначених:

$$m + n + m' + n' + \cdots\cdots + m^{(r)} + n^{(r)} + 2r + 2 = a'$$

отже:

$$A\frac{M}{N}+A'\frac{M'}{N'}+A''\frac{M''}{N''}+\cdots\cdots\cdots+A^{(r)}\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$

$$=k+k'x+\frac{C+C_1x+C_2x^2+\qquad+C_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}{D+D_1x+D_2x^2+\cdots\cdots+D_{\nu-\alpha'+1}x^{\nu-\alpha'+1}}=P$$

($\nu$ є сумою степенів $N$, $N'$ ......... $N^{(r)}$, $k$ і $k'$ суть які небудь). А то значить, що: Інтеґрал $\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ можна виразити через $\nu+\alpha'+2$ інтеґралів виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

В случаю частнім, іменно коли всї $P$ будуть степеня $m=n+2$, випаде: $\nu-\alpha'+2=2$. Тодї

$$S=k+k'x+\frac{C+C'x}{D+D_1x+D_2x_2}=k+k'x=\frac{L}{(x-a)}+\frac{L'}{(x-a')}$$

а інтеґрал сего:

$$\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}=T'-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}-L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

А позаяк $r$ є довільне, то при $r=0$

$$T'=A\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

а коли кромі сего положимо $n=0$, бо оно також є довільне, то $m=2$. Положім:

$$P=f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2,\ \text{а}\ Q=1$$

дістанемо:

$$N=P^2-Q^2R=(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)^2-R=D+D_1x+D_2x^2$$

$$M=A\left(2N\frac{dP}{dx}-P\frac{dN}{dx}\right)$$

$$=A\left[2(D+D_1x+D_2x^2)(f^{(1)}+2f^{(2)}x)-(D_1+D_2x)(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)\right]$$

$$=C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3$$

а з відси через порівнане сочинників одержимо $C, C_1, C_2, C_3, D, D_1, D_2, f, f^{(1)}, f^{(2)}$, отже:

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{C_3}{D_3}x+\frac{C_2D_2-C_3D_1}{D_2{}^2}+\frac{C'+C'_1x}{D+D_1x+D_2x^2}$$

де для скорочення положено:

$$\frac{C_1D_2 - C_3D}{D_2} - \frac{D_1(C_2D_2 - C_3D_1)}{D_2{}^2} = C_1{}' \quad \text{а}$$

$$C - \frac{D(C_2D_2 - C_3D_1)}{D_2{}^2} = C'$$

Возьмім $\frac{C_3}{D_3} = k'$ а $\frac{C_2D_2 - C_3D_1}{D_2{}^2} = k$

то наколи: $\frac{C' + C_1{}'x}{D + D_1x + D_2x^2}$ розібємо на:

$$\frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} \qquad \text{тоді:}$$

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = -L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} \tag{13}$$

$$+\frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left( \frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon}x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon}x^2 - \sqrt{R}} \right)$$

і то є шукане зведене.

Коли $k = 0$, а $k' = 1$, то взір сей перейде на:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x - \sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K}) \int \frac{dx}{(x - \sqrt{K})\sqrt{R}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \log \left( \frac{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon}x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}} x + \sqrt{\varepsilon}x^2 - \sqrt{R}} \right) \tag{14}$$

де:

$$G = \frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + \beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)}$$

$$H = \frac{\delta}{4\varepsilon} \left( \frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2} \right), \quad K = \frac{4\varepsilon}{\delta} \left( \frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3} \right)$$

На случай, коли $D_2 = 0$, рівнанє (13) перейде на

$$\int \frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}} = \left[ \frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}} f - \left( \frac{k'}{3\varepsilon} - k \right) \mu \right] \int \frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$

$$+\frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}\right)$$

де: $f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ а: $\mu=\frac{(f^2-\alpha^2)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta-\beta\sqrt{\varepsilon}}$

а взір (14) представить ся:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{3\varepsilon}(\mu'-\mu)\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}+\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}\log\left(\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2+\sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}x+\sqrt{\varepsilon}\,x^2-\sqrt{R}}\right)$$

де: $\mu'=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon}$ а $\mu=-\frac{\delta}{2\varepsilon}$;

між сочинниками $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ заходить тоді відношене:

$$(4\varepsilon\gamma-\delta^2)^2+4\delta^2(4\varepsilon\gamma-\delta^2)+32\beta\delta\varepsilon^2-64\alpha\varepsilon^3=0.$$

До зведень тих дійшли ми в той спосіб, щосьмо спровадили $\frac{M}{N}$ до виду $\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}$ кладучи $P^2-Q^2R=D+D_1x+D_2x^2$. Але се можна би зробити також в иньший спосіб, приміром кладучи:

$$R=(p+qx+rx^2)(p'+q'x+x^2)$$
$$P=f(p'+q'x+x^2),\quad Q=1.$$

Поступаючи анальоґічно найдемо, що $\int\frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ на сей спосіб звести ся не дасть, за се $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ дасть ся звести до одного лише інтеґрала виду $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A\log\left[\frac{f(p'+q'x+x^2)+\sqrt{R}}{f(p'+q'x+x^2)-\sqrt{R}}\right]\quad(15)$$

де:

$$L=\frac{pq'-qp'+(rq'-q)a^2}{(rq'-q)a}$$

$$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)},\quad a=\frac{q-q'f^2}{2(f^2-r)}$$

а $f$ визначене є рівнанем

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Положім в взорі (15) $r = 1$, $q' = -q$, $p' = p$, то дістанемо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}} = 2\sqrt{p}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)}}$$

(16)

$$-\frac{1}{\sqrt{4p-q^2}}\log\left(\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{4p-q^2}}\sqrt{p-qx+x^2}+\sqrt{p+qx+x^2}}\right).$$

Можна еще через підставлене $P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2$ звести інтеґал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і на иньші способи, пр. кладучи:

$$N = P^2 - R = k(x-a)^4, \quad R = \varepsilon(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

Взір зведеня буде:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}} = L\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

(17)

$$+ A\log\frac{f+f'x+f''x^2+\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}{f+f'x+f''x^2-\sqrt{(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')}}$$

де:

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)}}$$

$$L = 2\sqrt{\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')]\,[2a-(p''+p''')]}}$$

а коли в тім взорі положимо $p'' = -p$, $p''' = -p'$ і назвемо $(p+p')$ через $q$, а $pp'$ через $r$, то (17) перейде на:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}} = 2\sqrt{r}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{R})\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}$$

(18)

$$-\frac{1}{(q^2-4r)}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{q^2-4r}\,\sqrt{(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}\,x^2}\right)$$

А то є той сам взір, що (16), лише представлений в иньшім видї. Додати треба, що все можна приняти $P$ і $R$ без спільного чинника, (бо через перерібку все мож дійти до таких $P'$ і $R$, котрі не будуть мати спільного подїльника).

Б) **Найти умовини потрібні, щоби:**

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots\cdots + k' + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \qquad + l'x + l} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}$$

**Спосіб переведеня остане той сам.**

Положім:

$$Q = e_1 + e^{(1)} x + e^{(2)} x^2 + \cdots\cdots + e^{(n-1)} x^{(n-1)} + x^n$$

$$P = f + f^{(1)} x + f^{(2)} x^2 + \cdots\cdots + f^{(n+1)} x^{(n+1)} + x^{n+2}$$

де $n$ є число цїле, сповняюче услівє $2n + 4 > m$.

Най:

$$x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + \cdots\cdots + l'x + l = (x-a)((x-a')(x-a'') \cdots\cdots (x-a^{(m-1)}),$$

то щоби $\frac{M}{N}$ звести до виду:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots + k}{x^m + l^{(m-1)} x^{m-1} + l^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots\cdots + l} = \frac{M'}{(x-a)(x-a') \cdots\cdots (x-a^{(m-1)})}$$

потреба положити:

$$N = P^2 - Q^2 R = C(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}(x-a'')^{\mu''} \cdots\cdots (x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}} = CS$$

де $\qquad 2n + 4 = \mu + \mu' + \mu'' + \cdots\cdots + \mu^{(m-1)};$

а то сповнимо, кладучи пр.

$$P = Fx, \quad Q = fx, \quad R = \varphi(x)$$

і дістанемо $(m - 1)$ рівнань:

$$(Fx)^2 = (fx)^2 \varphi x$$

або:

$$Fx = \pm fx \sqrt{\varphi x} = i\, fx \sqrt{\varphi x}$$

$$x = a, \ a', \ a'', \qquad a^{(m-1)}. \tag{19}$$

А ріжничкуючи перше $(\mu - 1)$ разів, друге $(\mu' - 1)$ разів і т. д. дістанемо зі згляду на $a$ рівнанє виду:

$$d^p Fa = \pm d^p fa \sqrt{\varphi a} + p d^{p-1} fa\, d\sqrt{\varphi a} + \frac{p(p-1)}{2} d^{p-2} fa\, d^2 \sqrt{\varphi a} + \\ + \cdots\cdots + fa\, d^p \sqrt{\varphi a} \tag{20}$$

$$a = a, \ a', \ a'',$$

а кладучи:

$$p = 0, \ 1, \ 2, \qquad \mu$$

$$p = 0, \ 1, \ 2, \qquad \mu'$$

$$p = 0, \ 1, \ 2, \qquad \mu'' \qquad \text{і т. д.}$$

дістанемо рівнаня потрібні до визначеня $e$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, і т. д. Щоби найти $k$, $k'$, $k''$ і $A$, утворім:

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \frac{\mu'''}{x-a'''} + \cdots$$

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{h + h^{(1)}x + h^{(2)}x^2 + h^{(3)}x^3 + \cdots + h^{(m-1)}x^{m-1}}{l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + \cdots + l^{(m-1)}x^{m-1}} = \frac{t}{S}$$

а:

$$\frac{M}{N} = \frac{A\left(2\frac{dP}{Qdx}S - \frac{PT}{Q}\right)}{S} = \frac{k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m}{S}$$

а в відси:

$$k + k^{(1)}x + k^{(2)}x^2 + \cdots + k^{(m-1)}x^{m-1} + x^m = A\,\frac{2\frac{dP}{dx}S - Pt}{Q};$$

для $x = a$ буде:

$$k + k^{(1)}a + k^{(2)}a^2 + k^{(3)}k^3 + \cdots + a^m = -\,i\mu A\sqrt{\varphi}\,\psi(a) \qquad (21)$$

де $\psi(x) = (x-a')(x-a'')(x-a''')\cdots$

для $x = a,\ a',\ a'' \cdots a^{(m-1)}$.

Через се дістанемо з (21) $m$ рівнань на визначене: $k$, $k^{(1)}$, $k^{(2)}, \cdots k^{(m-1)}$ при помочи $A$, $a$, $a'$, $a'' \cdots a^{m-1}$, а на $A$ найдемо вартість:

$$A = -\frac{1}{(\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \cdots)f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}}.$$

Коли $\mu = \mu' = \mu'' = \cdots = \mu^{(m-1)} = 1$, рівнаня останить ті самі, а $m = 2n + 4$.

Возьмім $n = 0$ і щоби найти сочинники, покладім:

$$R = (x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$$

а в рівнанях:

$$P = \sqrt{R + CS},\quad S = l + l^{(1)}x + l^{(2)}x^2 + l^{(3)}x^3 + x^4 = \Theta x$$

положім $x = p,\ p',\ p'',\ p'''$, то на підставі (19) дістаємо чотири рівнаня:

$$f + pf^{(1)} + p^2 f^{(2)} = \sqrt{C}\sqrt{(\Theta p)} \qquad p = p,\ p',\ p'',\ p'''$$

а усуваючи з тих рівнань $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, дістанемо рівнане:

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{\sqrt{(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+$$

$$+\frac{\sqrt{(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{\sqrt{(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0$$

**котре вказує, які відносини мусять заходити, щоби сповнилось заложене подане в заголовку.**

**Перейдім другі частні случаї.**

1) $m=2$, $n=0$.

**Се мож сповнити кладучи:**

$\alpha$) $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$

$\beta$) $P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$

$\alpha$) **Наколи** $P^2-R=C(x-a)(x-a')^3$, **то з рівнань (19) і (20) вийдуть вартости на** $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, **а на відношене між** $a$ **і** $a'$ **дістанемо:**

$$\sqrt{\varphi a}-\sqrt{\varphi a'}-\frac{1}{2}(a\quad a')\frac{\varphi'(a')}{\sqrt{\varphi a'}}+\frac{1}{8}(a-a')^2.\frac{2\varphi a'\varphi''(a')^2}{\varphi a'\sqrt{\varphi a'}}=0$$

$$A=-\frac{1}{(a+3a')f^{(2)}+2f^{(1)}}$$

$\beta$) **Коли** $\qquad P^2-R=C(x-a)^2(x-a')^2$

**то підставляючи вартости за** $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ **і** $A$ **найдені з рівнаня (20), в вираженях на** $k$ **і** $k'$ **дістанемо:**

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')}=1+\frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')},$$

**де:**

$$b=\frac{a'\sqrt{\varphi a}+a\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi'a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi'a'}{\sqrt{\varphi a'}}},\quad b'=\frac{\sqrt{\varphi a}+\sqrt{\varphi a'}}{\frac{\varphi'a}{\sqrt{\varphi a}}+\frac{\varphi'a'}{\sqrt{\varphi a'}}}$$

**Отже інтеґрал виразить ся:**

$$\int\frac{dx}{\varphi(x)}=-\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}+A\log\frac{P+\sqrt{\varphi x}}{P-\sqrt{\varphi x}}$$

**а відношене поміж** $a$ **і** $a'$ **буде:**

$$a'=\frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')-pp'+p''p'''}$$

2) **Для** $m=1$ **буде:**

$$P^2-Q^2R=C(x-a)^{2n+4}$$

$$\int \frac{x+k}{(x-a)} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

$k$ виразить ся безпосередно з рівнаня (21) $k = -a - \mu A \sqrt{\varphi a}$, а величиня $A$, a, f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, і т. д. найде ся при помочи (20).

Підставивши вартість за $k$ в повисшім інтеґралї одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A \sqrt{\varphi a} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

В той спосіб найде ся всї інтеґрали виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, які мож спровадити на інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ при помочи функциї льоґаритмічної виду $A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$.

З цїлого сего уступу бачимо, що коли заходить рівнане

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a')(x-a'') \quad (x-a^{(m-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+R\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то поміж сочинниками a, $a'$, $a''$ ……… $a^{(m-1)}$, k, $k'$ $k^{(m-1)}$ буде істнувати (m+1) рівнань, значить буде мож $m+1$ з поміж тих величин вибрати довільно і при їх помочи означати прочі. Звідси виходить, що можна положити:

$$\frac{x^m + k^{(m-1)} x^{m-1} + k^{(m-2)} x^{m-2} + \cdots + k^{(1)} x + k}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(m-1)})} =$$

$$= \frac{x^m + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(n-1)})} + \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \cdots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}}$$

де $k_1^{(n-1)}$, $k_1^{(n-2)}$, ……… $k_1^{(1)}$, $k_1$, a, $a'$, $a''$, ……… $a^{(n-1)}$ суть які-небудь.

Отже інтеґрал

$$\int \frac{x^n + k_1^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots + k_1^{(1)} x + k_1}{(x-a)(x-a') \cdots (x-a^{(n-1)})} \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

мож виразити через $n$ інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$. Так само видко, що можна інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ виразити через $n$ інтеґралів виду $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, з поміж котрих $(n-1)$ є довільних зі згляду на $\alpha$.

B) Найти всї інтеґрали виду $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{R}}$, що дадуть ся виразити при помочи функциї $A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Позаяк
$$\int \frac{(x-k)dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

то ріжничка
$$x+k = \frac{M}{N}$$

а з сего виходить, що $N = c = \text{const.}$

З взорів:
$$M = \frac{A\left(2N\frac{dP}{dx} - P\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$

$$N = P^2 - Q^2 R \qquad \text{дістанемо:}$$

$$c(x+k) = 2Ac\frac{dP}{dx}, \qquad c = P^2 - Q^2R.$$

З рівнань тих мож винайти $k$ і $A$, наколи $P$ і $Q$ суть відомі. Принявши $c = 1$, положім в наших рівнанях:

$$P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + f^{(n+2)}x^{n+2}$$
$$Q = e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + e^{(n)}x^n$$

то дістанемо на $A$ і $k$ вартости:

$$A = \frac{e^{(n)}}{(2n+4)f^{(n+2)}}, \quad k = \frac{f^{(1)}e^{(n)}}{(n+2)\,e\,f^{(n+2)}}$$

Що до вартостий $P$ і $Q$, то їх дістанемо з рівнаня:

$$P^2 - Q^2R = 1.$$

Іменно, коли за P і Q підставимо повисші вираженя, дістанемо:

$$(f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^{(2)} + \cdots\cdots + f^{(n+2)}x^{n+2})^2 - (e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + \cdots\cdots + e^{(n)}x^n)^2(\alpha + \beta x + \cdots\cdots \varepsilon x^4) = 1. \qquad (22)$$

Розвинувши се і порівнавши сочинники, дістанемо $(2n+5)$ рівнань на означенє $(2n+4)$ сочинників: $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(2n+2)}$, $e$, $e^{(1)}$, $e^{(2)} \cdots\cdots e^{(n)}$, значить ся, що понад се дістанемо ще відношенє поміж $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$. Сочинник при $x^{2n}$ буде: $f^{(n+2)} - \varepsilon e^{(n)} = 0$, а через се вартости на $A$ і $k$ перейдуть на:

$$A = \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \quad k = \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{f^{(1)}}{e}. \qquad (23)$$

Є ту лиш недогідність рахунку, а то та, що рівнаня, які вийдуть з порівнаня сочинників в (22), не суть лїнїйні. Але рівнаня ті мож заступити системою рівнань лїнїйних в слідуючий спосіб: Коли в рівнаню:

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

місто $x$ положимо $\frac{1}{y}$, одержимо рівнане виду:

$$(Fy)^2 - (fy)^2 \varphi(y) = y^{2n+4}$$

котре для $y = 0$ перейде на:

$$Fy = fy\sqrt{\varphi y}$$

а в нїм:

$$F(y) = fy^{2n+2} + f^{(1)} y^{n+1} + \cdots + f^{(n+2)}$$
$$f(y) = ey^n + e^{(1)} y^{n-1} + \cdots + e^{(n)}$$
$$\varphi(y) = \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

Зріжничкувавши рівнане $Fy = fy\sqrt{\varphi y}$ $2n+3$ разів дістанемо дл $y = 0$ по підставленю вартостий:

$$f^{(n+2)} = c\,e^{(n)}$$
$$f^{(n+1)} = c\,e^{(n-1)} + c^{(1)} e^{(n)}$$
$$f^{(n)} = c\,e^{(n-2)} + c^{(1)} e^{(n-1)} + \tfrac{1}{2} c^{(2)} e^{(n)}$$

$$(24)$$

$$f^{(2)} = ce + c^{(1)} e^{(1)} + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(3)} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{1.2 \cdots n} e^{(n)}$$
$$f^{(1)} = c^{(1)} e + \frac{c^{(2)}}{2} e^{(1)} + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \cdots \cdots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2.3 \cdots (n+1)} e^{(n+1)}$$
$$f = \frac{c^{(2)}}{2} e + \frac{c^{(3)}}{2.3} e^{(2)} + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(3)} + \cdots + \frac{c^{(n+2)}}{1.2.3 \cdots (n+3)} e^{(n+1)}$$
$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3} e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e^{(1)} + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(2)} + \cdots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2.3 \cdots (n+3)} e^{(n)}$$
$$0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4} e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5} e^{(1)} + \cdots + \frac{c^{(n+4)}}{1.2.3 \cdots (n+4)} e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3 \cdots (n+3)} e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3 \cdots (n+4)} e^{(1)} + \cdots + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3 \cdots (2n+3)} e^{(n)}$$

де в сочинники $c$, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ....... і т. д. війшли кромі $c$ ще $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$. З $n+1$ послїдних з поміж тих рівнань виразимо $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ ...... $e^{(n)}$

при помочи $e$, а кромі сего дістанемо відношене поміж $c^{(3)}$, $c^{(4)}$, і т. д. Перших $(n+2)$ рівнань дасть знова $f$, $f^{(1)}$, $f^{(2)} \cdots\cdots f^{(n+2)}$ виражені при помочи $e$. Само $e$ є довільне і в вислїдї не буде приходити. Коли положимо $k=0$, то і $f^{(1)}=0$, а з відси дістанемо ще друге відношене поміж $c^{(1)}$, $c^{(2)}, \cdots\cdots$ і т. д. і тоді побачимо що:

Інтеґрал $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

дасть ся виразити при помочи льоґаритмів все, наколи поміж $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, заходять два відношеня, які дістанемо, коли виелїмінуємо з $n+1$ з поміж (20) і з $f^{(1)}=0$ величини $e$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \cdots\cdots e^{(n)}$. (Ограничене $k=0$ не впливає на загальність проблєму, бо вистане в вислїдї положити $x=y+k$, а дістанемо той сам інтеґрал, як колиб не були закладали $k=0$).

І так пр. для $n=0$ тото відношене поміж $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ представить ся:

$$\gamma = \frac{2\varepsilon\beta}{\delta} + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}.$$

Пр.: $n=1$;

можна положити $\varepsilon=1$, $\beta=-\alpha$, тодї з рівнань (20) вийде: $\delta=2$, $\gamma=3$, $e$ (яко довільне) возьмемо $=2$, то дальше вийде: $e^{(1)}=1$, $f^{(3)}=1$, $f^{(2)}=3$, $f^{(1)}=0$, $f=-\frac{\alpha}{2}-2$, $k=0$, $A=\frac{1}{6}$

отже:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}} = \frac{1}{6}\log\left(\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x-2)\sqrt{x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha}}\right)$$

Рівнане: $P^2-1=Q^2R$ можна переробити:

$$(P+1)(P-1)=Q^2R=P'^2Q'^2R'R''.$$

Положім ту:

$$Q=P'Q', \quad R=R'R'',$$

то дістанемо:

$$P+1=P'^2R'$$

$$P-1=P'^2R''$$

а з відси:

$$2=P'^2R'-Q'^2R'' \tag{25}$$

А то є простійше рівнанє, чим $P^2 - Q^2R = 1$. Пожиток з сего рівнаня побачимо.

Положім:

$$R' = x^2 + 2qx + p, \quad R'' = x^2 + 2q'x + p'$$

а $P'$ і $Q'$ возьмім постійні, то дістанемо через порівнанє сочинників в (25) по підставленю вартостий за $R'$ і $R''$

$$P = \frac{2x^2 + 4qx + p + p'}{p - p'}, \quad Q = \frac{2}{p - p'}, \quad k = q, \quad A = \frac{1}{4}.$$

А інтеґрал виразить ся:

$$\int \frac{(x+q)dx}{\sqrt{(x^2+2qx+p)(x^2+2q'x+p')}} = \frac{1}{4} \log \left( \frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}} \right)$$

Є ще і другий спосіб розвязаня рівнаня:

$$P^2 - Q^2R = 1 \tag{26}$$

а є він слїдуючий:

Поставмо: $\qquad R = r^2 + s,$

де $r$ є степеня другого, а $s$ першого, то:

$$P^2 - Q^2r - Q^2s = 1.$$

Перший сочинник в $P^2$ і в $Q^2r$ мусить бути той сам, отже можна положити:

$$P = Qr + Q_1$$

де $Q_1$ буде степеня $n-1$, наколи $Q$ є степеня $n$, а наше рівнанє перейде на:

$$Q_1{}^2 + 2QQ_1 - Q^2s = 1.$$

А коли $v$ є найбільшою функцією цїлковитою, що містить ся в $\frac{r}{s}$, тодї:

$$r = sv + u,$$

де $u$ є постійне.

Через се дістанемо:

$$Q_1{}^2 + 2QQ_1u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1$$

або кладучи:

$$Q = 2vQ_1 + Q_2$$

$$s_1 = 1 + 4uv, \quad r_1 = r - 2u$$

дістанемо місто рівнаня (26):

$$s_1 Q_1{}^2 - 2r_1 Q_1 Q_2 - sQ_2{}^2 = 0$$

А стосуючи до сего рівнаня на той сам лад і дальші підставленя виду:

$$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1}v_{m-1} \tag{27}$$

$$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1} \tag{28}$$

$$r_m = s_m v_m + u_m \tag{29}$$

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

де $Q_{m+2}$ є степеня $n-m-2$, дійдемо до рівнаня:

$$s_n Q_n{}^2 = (-1)^{n+1}$$

де $Q_n$ буде величиною постійною, а тим самим і $s_n$ буде постійне. А то значить, що коли $P^2 - Q^2R = 1$ дасть ся розвязати при помочи функций цїлковитих, тодї одна з поміж величин:

$$c,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \cdots\cdots$$

є постійною і на відворот. А коли приміром $s_n = const$, тодї $P$ є степеня $n+2$, а $Q$ степеня $n$. Отже треба по черзї класти $s$, $s_1$, $s_2$, $= const$, щоби найти всї вартости $R$.

З рівнань (27), (28), (29), виходять слїдуючі прикмети величин $r$, $s$, $u$, $v$ для $s_n = const$:

$$r_{n-k} = r_k,\quad s_{n-k} = s_{k-1}u^{\pm 1},\quad v_{n-k} = v_{k-1}u^{\mp 1},\quad u_{n-k} = -u_{k-1}.$$

Для $n$ непаристого $= 2\alpha + 1$ дістанемо кладучи $k = \alpha + 1$:

$$u_\alpha = 0,$$

а для $n$ паристого $= 2\alpha$ дістанемо:

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0.$$

То значить, що коли $P^2 - Q^2R = 1$ дасть ся розвязати, а $P$ є степеня непаристого, тодї $u_\alpha = 0$, а коли $P$ є степеня паристого, тодї $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ і на відворот: $u_\alpha = 0$ в разї непаристого степеня $P$, а $u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$ в разї $P$ паристого суть умовинами потрібними і достаточними до розвязаня рівнаня $P^2 - Q^2R = 1$.

З взорів перетворюючих (трансформацийних)

$$Q_m = 2v_m Q_{m+1} + Q_{m+2}$$

$$Q = 2vQ_1 + Q_2,\quad P = rQ + Q_1$$

одержимо $\frac{P}{Q}$ в видї дроба тяглого:

$$\frac{P}{Q} = r + \frac{1}{2v} + \frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2v_{n-2}} + \frac{1}{2v_{n-1}}$$

а звиваючи се на дроб звичайний одержимо $P$ і $Q$.

$\sqrt{R}$ дістанемо кладучи в $\frac{P}{Q} = \sqrt{R} \quad n = \infty$

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cdots \text{in inf.}}}}$$

На случай коли $P^2 - Q^2R = 1$ дасть ся розвязати, дроб сей буде періодичний.

Щоби означити величини $v_m$, $u_m$, $s_m$ і $r_m$ для всякої вартости $m$, положім:

$$r_m = x^2 + ax + b_m, \quad s_m = c_m + p_m x, \quad v_m = (g_m + x)\frac{1}{p_m}.$$

Коли ті вартости підставимо в (27), (28), (29), дістанемо через порівнане сочинників рівнаня, з котрих постепенно найдемо $c_m$, $p_m$, $b_m$, $g_m$, $u_m$. — Так само мож ті величини дістати, зіставляючи названі рівнаня з рівнанем:

$$(c_{m-1} + p_{m-1}x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax\,b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px.$$

Тут дістанемо ще відношеня:

$$c_{m-1}c_m = c + b^2 - b_m^2, \quad p_{m-1}p_m = 2(b - b_m) = 2q_m$$

де
$$(b - b_m) = q_m.$$

$$c_{m-1}p_m + c_m p_{m-1} = p + 2a(b - b_m)$$

а з відси по перерібці:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)q_{m-1} - q_{m-2}q_{m-1}^2}{q_{m-1}^2}$$

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m q_{m-1}}{p}, \quad q_m = a - \frac{c_m}{p_m}, \quad p_m = \frac{2q_m}{2q_{m-1}}p_{m-2}$$

маємо:
$$q_m = b - b_m,$$

отже:
$$q = b - b = 0, \quad q_1 = b - b_1$$

з відси:
$$b_m = -b_{m-1} + 2\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)$$

а для:
$$m = 1 \quad b_1 = -b + 2\frac{c}{p}\left(a - \frac{c}{p}\right)$$

$$q_1 = 2\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$$

Застосуймо се до інтеґрала:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}}$$

Для упрощеня можна положити $c=0$ і будемо мати:

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{2n+4} \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

а узглядневши $P^2-Q^2R=1$

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}} = \frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$$

Щоби се рівнане було можливе, потреба перше всього, щоби:

$$P^2-Q^2R=1$$

дало ся розвязати. Се станесь, наколи $s_n = const$, а що $s_n = c_n + p_n x$, проте мусить бути:

$$p_n = 0.$$

Коли та умовина $p_n=0$ буде сповнена, то все буде мож визначити $k$ так, що $\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px}}$ буде рівне $\frac{1}{n+2} \log (P+Q\sqrt{R})$.

Вартість $k$ мож буде винайти, так як шукало ся еї повисше: $k=\frac{1}{n+2}a+\frac{f^{(1)}}{e}$. Ту тото $k$ буде мати вартість:

$$k=\frac{1}{n+2}a+\frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right)$$

Позаяк умовина $p_n=0$ є рівноважна з иньшою, іменно $q_n=0$ або $q_{n-k}=q_{k-1}$, то збираючи всьо то разом дістанемо слїдуюче правило, щоби найти всї інтеґрали виду:

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}}$$

які дадуть ся представити функциєю льоґаритмічною:

$$2A\log\left[P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+px+c}\ \right]$$

іменно:

Обчислюе ся всї величини $q_2, q_3, q_4,$ після взора:

$$q_m = \frac{\frac{1}{4}p^2 + (ap - 2c)\,q_{m-1} - q_{m-2}\,q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}$$

закладаючи:

$$q = 0, \quad q_1 = 2\,\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$$

Відтак кладе ся по черзї:

$$q_1 = 0, \; q_2 = 0, \; q_3 = 0, \qquad q_n = 0$$

або, що на одно вийде:

$$q_{n-k} = q_{k-1}\,.$$

Тодї всї вартости, які $R$ може мати, одержимо позбуваючись з тих рівнань і рівнаня $R = 0$ одної з поміж $a, p, b, c$. Найшовши $R$ найдемо k:

$$k = \frac{1}{n+2}\,a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p} + \frac{c_1}{p_1} + \cdots\cdots + \frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right)$$

де:

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}\,.$$

Дальше $\frac{P}{Q}$ представить ся:

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + b + \cfrac{1}{\cfrac{x+g}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_1}{p_1} + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_2}{p_2} + \cdots\cdots + \cfrac{1}{\cfrac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}$$

де:

$$g_m = a - \frac{c + q_m\,q_{m-1}}{p}\,.$$

А з відси дістанемо $P$ і $Q$, коли сей дроб тяглий замінимо на дроб звичайний, памятаючи що $q_{n-k} = q_{k-1}$. Найшовши се маємо наконець

$$\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}} = \frac{1}{n+2}\,\log\left[P + Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2+c+px}\,\right]$$

Г) Найти всї інтеґрали виду $\int \frac{x+k}{x+l}\,\frac{dx}{\sqrt{R}}$, які дадуть ся виразити через функцию льоґаритмічну

$A\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$. Єсть се вправді частний случай заключений в проблемі (Б), та для єго ваги в теориї функций еліптичних розвяжемо єго окремо при помочи проблему попередного.

Вийдемо з рівнаня:

$$\int\frac{(y+k')dy}{\sqrt{R'}}=A'\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right)$$

і коли в нїм за $y$ підставимо $\frac{1}{x+l}$, дістанемо

$$-k'\int\frac{(x+k)dx}{(x+l)\sqrt{R}}=A'\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

де $k'=\frac{1}{k-l}$, а P, Q, R означають вартости, на які перейде P', Q', R' по підставленю $y=\frac{1}{x+l}$.

Вартість на $l$ дістанемо з порівнаня сочинників в рівнанях:

$$R=(1+(x+l)a+(x+l)^2b)^2+p(x+l)^3+e(x+l)^4$$
$$R=(b^2+c)(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)$$

іменно $l$ виразить ся при помочи $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ і $\delta$, а наш інтеґрал представить ся в виді:

$$\int\frac{(x+k)}{(x+l)\sqrt{(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)}}=A\sqrt{b^2+c}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

де:
$$A=-\frac{A'}{k'}$$

а звідси:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=(k-l)\int\frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}}=A\sqrt{b^2+c}\log\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$$

або:

$$\int\frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}}=\frac{1}{l-k}\int\frac{dx}{\sqrt{R}}-\frac{A\sqrt{b^2+c}}{l-k}\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

I в той спосіб дістанемо всї інтеґрали виду

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

які дадуть ся виразити через інтеґрал $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ і функцию льоґаритмічну $A \log \left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

Д) Відношене поміж інтеґралами виду:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

Загально неможливо є виразити інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ через інтеґрали $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$. Але в границях, іменно для таких $x$, котрі дають $R=0$, все мож інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ виразити через тамті інтеґрали.

І так, коли інтеґрал:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

зріжничкуємо зі згляду на $a$ і $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ зведемо на інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, дістанемо узгляднюючи таке $x = r$, що для него $R = f(x) = 0$, таке рівнане:

$$\sqrt{fa} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \sqrt{fx} \int \frac{da}{(x-a)\sqrt{fa}} =$$

$$= \int \frac{da}{\sqrt{fa}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)dx}{\sqrt{fx}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)da}{\sqrt{fa}}$$

Маємо в той спосіб ріжницю двох інтеґралів $\sqrt{fa} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ і $\sqrt{fx} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{fa}}$ виражену через інтеґрали виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}} \text{ i } \int \frac{(\frac{1}{2}\delta y + \varepsilon y^2)\,dx}{\sqrt{fy}}.$$

Наколи інтеґрал $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}}$ возьмемо в границях від $x = r$ до $x = r_1$, де $r_1$ також є вартостию, що сповняє $fx = 0$, дістанемо:

$$\sqrt{fa} \int_r^{r_1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} =$$

$$= \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} - \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2)\,da}{\sqrt{fa}}$$

**Взір сей має важне значінє в теориї функций еліптичних.**

**Можна найти еще загальнїйше відношенє межи інтеґралами означеними в слїдуючий спосіб:**

**Най** $s$ **означає якунебудь функцию льоґаритмічну виду:**

$$A \log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right) + A' \log\left(\frac{P' + Q'\sqrt{R'}}{P' - Q'\sqrt{R'}}\right) + \cdots\cdots$$

**то:**

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{R}}\left(B + Cx + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \cdots\cdots\right)$$

**а з відти:**

$$s = \int\left(\frac{B + Cx}{\sqrt{R}}\right) dx + L \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + L' \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} +$$

**а інтеґруючи від** $x = r$ **до** $x = r_1$ **одержимо:**

$$s' - s = \int_r^{r_1} \frac{(B + Cx)\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$- \int_r^{r_1} \frac{dx}{\sqrt{fx}} \left[ \frac{L}{\sqrt{fx}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}\delta\alpha + \varepsilon\alpha^2)\,da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int_r \frac{(\frac{1}{2}d\alpha' + \varepsilon\alpha'^2)}{\sqrt{fa'}} + \qquad \right]$$

$$+ \int_r^{r_1} \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)\,dx}{\sqrt{fx}} \left[ \frac{L}{\sqrt{fa}} \int_r \frac{da}{\sqrt{fa}} + \frac{L'}{\sqrt{fa'}} \int \frac{da'}{\sqrt{fa'}} + \qquad \right]$$

Рівнане се дає відношене поміж системою інтеґралів виду:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}, \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{fy}}.$$

Кромі до тепер виведених відношень поміж функциями переступними, випроваджує автор такіж:

2. **Відношеня для частної кляси функций переступних.** (Oeuvres compl. II. p. 54).

І так, коли $y$ є функциєю $x$ ($y = \psi x$) сповняючою рівнане:

$$y\,fx + \varphi x \frac{dy}{dx} = 0,$$

тоді між функциями тими заходити буде відношене:

$$\frac{1}{\psi a}\int \frac{\psi x\,dx}{x-a} - \psi x\,\varphi x \int \frac{da}{(a-x)\,\varphi a\,\psi a} =$$

$$= \sum \Big((n+1)\,\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\Big) \int \frac{a^m\,da}{\varphi a\,\psi a} \int x^n\,\psi x\,dx$$

де $\alpha$ і $\beta$ суть сочинниками належачими до:

$$\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 +$$
$$fx = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \cdots\cdots$$

Причім треба зазначити, що інтеґрали зі взгляду на $x$ належить брати від тої вартости $x$, яка зводить до зера функцию $\psi x . \varphi x$, а зі згляду на $a$ від тої вартости $a$, яка зводить до зера функцию $\frac{1}{\psi a}$.

Наколи $\psi x = \frac{1}{\sqrt{\varphi x}}$, тоді повисше відношене переходить на:

$$\sqrt{\varphi a}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} - \sqrt{\varphi x}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}} =$$

$$= \sum \tfrac{1}{2}(n-m)\,\alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi x}} \int \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi a}}$$

а для відомого нам вже виду функциї $\varphi x$:

$$\varphi x = (1-x^2)(1-c^2x^2)$$

дістанемо відношенє:

$$\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}-$$

$$-\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

$$=c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\int\frac{da}{\sqrt{(1-a^2)(1-a^2c^2)}}-$$

$$-c^2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}\cdot\int\frac{a^2da}{\sqrt{(1-a^2)(1-c^2a^2)}}$$

котре служить як точка вихідна до випроваджування прикмет функций еліптичних. — Єсть се твердженє Абеля найбільше основне в цілій теориї інтеґралів альґебраічних.

3. Як виразити суму функций переступних $\int f(yx)\,dx$, де $y$ є функциєю $x$, через означене число функций того самого виду, показує Абель в уступі під заголовком: **Порівнанє функций переступних.** (Oeuvres compl. II. p. 66).

Коли $y$ є функциєю альґебраічною, означеною рівнанєм:

$$0=\alpha+\alpha_1 y+\alpha_2 y^2 \qquad +\alpha_m y^m \tag{1}$$

де $\alpha$ суть функциями цілковитими $x$:

а так само:

$$0=q+q_1 y+q_2 y^2+\cdots\cdots+q_{m-1} y^{m-1} \tag{2}$$

де $q$ суть функциями цілковитими $x$ і якогось числа иньших змінних $a$, $a_1$, $a_2$, , де ті $a$ суть сочинниками при ріжних степенях $x$ в функциях $q$, $q_1$, $q_2$ З обох тих рівнань можна $y$ виразити виміримо при помочи $x$, $a$, $a_1$, $a_2$ Нехай $r$ буде тою функциєю, значить $y=r$, то підставивши ту вартість за $y$ в одно з обох рівнань даних, дістанемо:

$$s=0$$

де $s$ є функциєю цілковитою $x$, $a$, $a_1$, $a_2$

Зріжничкувавши его і помноживши через $f(yx)=f(rx)$, дістанемо:

$$f(yx)\,dx=\varphi(x)\,da+\varphi_1(x)\,da_1+\varphi_2(x)\,da_2+\cdots\cdots \tag{3}$$

де $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ суть функциями вимірими $x$, $a$, $a_1$, $a_2$, Наколи $x_1$, $x_2$, $x_3$, ......... $x_n$ суть корінями рівнаня $s = 0$, то підставивши їх по черзї в послїдне рівнане, дістанемо суму:

$f(y_1 x_1) dx_1 + f(y_2 x_2) dx_2 \cdots\cdots + f(y_n x_n) dx_n = R da + R_1 da_1 +$

де $R$, $R_1$, $R_2$, суть функциями виміримими а $a_1$ $a_2$ виду:

$$R_m = \varphi_m(x_n) + \varphi_m(x_{n-1}) + \cdots\cdots + \varphi_m(x_2) + \varphi_m(x_1).$$

Позаяк лїва сторона повнешого рівнаня ріжничкового є цїлковитою ріжничкою, то і права сторона також мусить дати ся з'інтеґрувати:

$\int R da + \int R_1 da_1 + \int R_2 da_2 + \cdots\cdots = \varrho$, де $\varrho$ є функциєю альґебраічною і льоґаритмічною величин $a$, $a_1$, $a_2$,

Назвавши ще $\int f(yx)dx$ через $\psi(x)$

дістанемо: $\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) \cdots\cdots + \psi(x_n) = C + \varrho$. (4)

При помочи сего рівнаня можна виразити суму якогонебудь числа функций $\psi x$ через означене число функций того самого виду.

Величини $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_n$ суть функциями змінних независимих $a$, $a_1$, $a_2$, .........  Ясною річею є, що закладаючи число тих змінних рівне $\mu$, мож уважати число $\mu$ з поміж величин $x_1$, $x_2$, ......... $x_n$ яко независимі, а прочі $n - \mu$ яко їх функциї. Функциї ті мож вишукати.

Положім в рівнаню (4) $n = \mu + \nu$, а $x_{\mu+1} = c_1$, $x_{\mu+2} = c_2$, ......... $x_n = c_\nu$, то оно перейде на:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots\cdots + \psi(x_\mu) = C + \varrho$$

де $x_1$, $x_2$, ......... $x_\mu$ суть звязані між собою рівнанями:

$$\begin{aligned} &\Theta(x_1) = 0, \ \Theta(x_2) = 0 \cdots\cdots \ \Theta(x_\mu) = 0 \\ &\Theta(c_1) = 0, \ \Theta(c_2) = 0 \qquad \Theta(c_\nu) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Колиж тепер покладемо $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_\nu = x'_\nu$

а: $x'_{\nu+1} = \beta_1$, $x'_{\nu+2} = \beta_2 \cdots\cdots x'_\mu = \beta_{\mu-\nu}$,

дістанемо: $C = -\varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots\cdots + \psi(x'_\nu)$

а:

$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \cdots + \psi(x_\mu) = \varrho - \varrho' + \psi(x_1') + \psi(x_2') + \cdots + \psi(x'_\nu)$,

де $x_1'$, $x_2'$, ......... $x'_\nu$ суть означені рівнанями:

$$\begin{aligned} &\Theta(x_1') = 0, \ \Theta(x_2') = 0, \cdots\cdots \ \Theta(x'_\nu) = 0 \\ &\Theta(\beta_1) = 0, \ \Theta(\beta_2) = 0, \qquad \Theta(\beta_{\mu-\nu}) = 0 \\ &\Theta(c_1) = 0, \ \Theta(c_2) = 0, \qquad \Theta(c_\nu) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

То коли $s$ означимо через $\Theta_1(x)$, то буде також

$$\Theta_1(x'_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(\beta_\varkappa) = 0, \quad \Theta_1(c_\varkappa) = 0,$$

позаяк $a, a_1, a_2, \quad a_{\mu-1}$ суть визначені двома послїдними рядами рівнань (6).

Отже буде: $\Theta_1(x) = (x-x_1')(x-x_2') \quad (x-x_\nu')$

$$\cdot (x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots\cdots (x-\beta_{\mu-\nu})$$
$$\cdot (x-c_1)(x-c_2) \cdots\cdots (x-c_\nu)$$

а дїлячи рівнане $\Theta_1(x) = 0$ через добуток:

$$(x-\beta_1)(x-\beta_2) \cdots\cdots (x-\beta_{\mu-\nu})(x-c_1)(x-c_2) \cdots\cdots (x-c_\nu)$$

дістанемо рівнане степеня $\nu$, котрого коренї будуть величинами:

$$x_1', \; x_2', \qquad x'_\nu .$$

А коли так визначені суть $x_1', x_2' \cdots x_\nu'$, яко функциї $c_1, c_2, \cdots c_\nu$ то можна їх уважати яко змінні а визначені через (5). В той спосіб величин $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ суть независимі, а $x_1', x_2', \cdots x_\mu'$ стають функциями тих змінних.

**V.** Прочі розвідки Абеля належать до ріжних дїлів математики, а вимінити з них належить слїдуючі:

1. **Про функцию переступну $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$.** (Oeuvres compl. p. 24 et 30). Функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right)$ названа через Абеля $Lx$ е першою функциею переступною, яка приходить в рахунку ріжничковім, е се функция такої самої ваги в рахунку ріжничковім як $\int\frac{dx}{x}$ в рахунку інтеґральнім.

Автор зачинае представленем еї в видї ряду і принявши що

$$L(a+x) = \alpha + \beta x + \gamma x(x-1) + \delta x(x-1)(x-2) + \varepsilon x(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots\cdots \tag{1}$$

находить через ріжничковане вартости на $\alpha, \beta, \gamma \qquad$, через що $L(a+x)$ прийме вид:

$$L(a+x) = La + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \frac{x(x-1)(x-)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)} + \tag{2}$$

Наколи за $x$ возьмемо число цїле, тодї ряд сей буде мати скінчене число членів, а если будемо знали вартість $L(a)$, то будем знати так само і $L(a+n)$, де $n$ е число цїле додатне.

І так, коли в взорі тім підставимо по черзї $x = 1, 2, 3$ і т. д., то знаючи вартість $L(a)$ для всїх величин на $a$, від $a = 1$ до $a = 2$, найдемо $L(a)$ для всїх прочих вартостий на $a$. [Позаяк функция $\sum\left(\frac{1}{x}\right) = Lx$ має одну величину постійну довільну, то для якоїсь даної вартости на $a$ буде мож за ню підставити яку небудь вартість функциї $L(a)$, прим. $L(1) = 0$, тодї з нашого взора (2) дістанемо: $L(0) = -\infty$, $L(a) = -\infty$].

Щоби найти $L(a)$ від $a = 1$ до $a = 2$, треба взір (2) представити в відповіднім видї:

$$L(1+\omega) = \frac{\omega}{\omega+1} + (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 + (S_4-1)\,\omega^3 -$$

$$\text{де} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots;$$

кладучи $-\omega$ на місце $\omega$ дістанемо (3)

$$L(1-\omega) = \frac{\omega}{\omega-1} - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 +$$

а позаяк: $L(2-\omega) = L(1-\omega) + \dfrac{1}{1-\omega}$, то:

$$L(2-\omega) = 1 - (S_2-1)\,\omega - (S_3-1)\,\omega^2 - (S_4-1)\,\omega^3 - \cdots\cdots.$$

Взори (3) мають важне застосоване при обчисленю рядів. Бо позаяк $S\varphi(x) = \Sigma\varphi(x+1)$, то буде мож найти суму всяких рядів, котрих член загальний є $\varphi x$, наколи знаємо $\Sigma\varphi x$.

Обчислїм для приміру суму ряду гармонїчного при помочи функциї $L(x)$:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \cdots\cdots + \frac{a}{b+cx} = S\left(\frac{a}{b+cx}\right) = P$$

маємо $$P = \sum\left(\frac{a}{b+c+cx}\right) = a\sum\left(\frac{1}{b+c+cx}\right).$$

Положїм $b+c+cx = cy$, то $P = \dfrac{a}{c}\sum\left(\dfrac{1}{y}\right) = C + \dfrac{a}{c}\,L(y)$

$P = C + \dfrac{a}{c}\,L\left(\dfrac{b+c}{c} + x\right)$. Щоби означити $C$, положїм $x = o$,

тодї $P = \dfrac{a}{b}$, а з відси: $\dfrac{a}{b} = C + \dfrac{a}{c}\,L\left(\dfrac{b+c}{c}\right)$, отже:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[L\left(\frac{b+c}{c} + x\right) - L\left(\frac{b+c}{c}\right)\right];$$

для $a=1$, $b=1$, $c=2$ буде:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{1+2x}=1+\frac{1}{2}L\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}L\left(\frac{3}{2}\right).$$

Функция $L(1+a)$ дасть ся представити при помочи інтеґралу:

$$L(1+a)=\int_0^1\frac{x^a-1}{x-1}\,dx$$

кладучи $x^{a'}$ на місце $x$ і називаючи $aa'=m$, дістанемо:

$$L\left(1+\frac{m}{a'}\right)=a'\int_0^1\frac{x^m-1}{x^{a'}-1}\,x^{a'-1}\,dx$$

а взір сей говорить, що доки $y$ є якою небудь величиною дійсною, то $L(y)$ дасть ся все виразити через функциї альґебраічні, льоґаритмічні і колові, бо інтеґрал $\int\frac{x^m-1}{x^{a'}-1}\cdot x^{a'-1}\,dx$ дасть ся для цілковитих вартостий $a'$ і $m$ представити при помочи функций альґебраічних, льоґаритмічних і колових.

Цїкаві суть також деякі прикмети тої функциї; і так:

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\cdots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)=a\log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$2\,L(2a)=2\log 2+L(a)+L\left(a+\frac{1}{2}\right)$$

$$L(na)=\log n+\frac{1}{n}\left[L(a)+L\left(a+\frac{1}{n}\right)+\cdots+L\left(a+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

і т. д.

Ріжничкуючи постепенно функцию $\sum\left(\frac{1}{a}\right)$ дістанемо:

$$\frac{d\sum\left(\frac{1}{a}\right)}{da}=\frac{\sum\left(d\frac{1}{a}\right)}{da}=-\sum\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2\sum\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\sum d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\sum\frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^n\sum\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\sum d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\cdots n\sum\frac{1}{a^{n+1}}$$

де знак $+$ буде, коли $n$ паристе, а $-$, коли непаристе.

То і на відворот:

$$\sum \frac{1}{a^2} = \frac{d \sum \frac{1}{a}}{da}, \quad \sum \frac{1}{a^3} = \frac{d^2 \sum \frac{1}{a}}{da^2} \text{ і т. д.}$$

Ті всї функциї переступні висшорядні мож представити при помочи інтеґралів означених:

Було, що:

$$\sum \frac{1}{a} = La = \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1} dx;$$

ріжничкуючи се зі згляду на $a$ дістанемо:

$$\sum \frac{1}{a^2} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1} lx}{x-1} dx \qquad \text{де } lx = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sum \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (lx)^2}{x-1} dx \quad \text{і т. д.}$$

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \pm \frac{1}{2.3.\cdots\alpha} \int_0^1 \frac{x^{a-1} (lx)^{\alpha-1}}{x-1} dx$$

або:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} \left(l \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1} dx \ (\Gamma \text{ функция Euler'a})$$

найшовши сталу інтеґрованя і вставивши в послїднім взорі одержимо:

$$\sum \frac{1}{a^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{x - 1} \left(l \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

2. **Інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений поодинокий.** (Oeuvres compl. II. 45).

Після Parseval'a можна інтеґрал скінчений $\Sigma^n \varphi x$ виразити через інтеґрал означений подвійний.

Абель представляє той сам інтеґрал $\Sigma^n \varphi x$ при помочи інтеґралу означеного поодинокого.

Він надає функциї $\varphi x$ вид:

$$\varphi x = \int e^{xv} fv . dv \qquad (1)$$

де інтеґрал береcь поміж двома якимись границями $v$ незалежними від $x$, $fv$ означає функцию $v$ залежну від виду $\varphi x$.

Інтеґруючи обі сторони для $\Delta x = 1$ дістанемо:

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{e^v - 1} dv$$

з додатком сталоï інтеґрованя. А по $n$-кратнім інтеґрованю одержимо:

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} \frac{fv}{(e^v - 1)^n} dx \qquad (2)$$

з додатком:

$$C + C_1 + C_2 x^2 + \cdots\cdots + C_{n-1} x^{n-1},$$

де $C$, $C_1$, $C_2$, суть сталими інтеґрованя.

$\frac{1}{(e^v - 1)^n}$ дасть ся представити в виді:

$$\frac{1}{(e^v - 1)^n} = (-1)^{n-1} \Big( A_{0,n}\, p + A_{1,n} \frac{dp}{dx} + A_{2,n} \frac{d^2 p}{dv^2} + \cdots\cdots + \\ + A_{n-1,n} \frac{d^{n-1} p}{dv^{n-1}} \Big).$$

Ріжничкуючи се рівнане одержимо взори на сочинники: $A_{0,n}$, $A_{1,n}$ і т. д.

$$A_{0,n} = 1, \quad A_{1,n} = \sum \frac{1}{n}, \quad A_{2,n} = \sum \Big( \frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \Big),$$

$$A_{3,n} = \sum \Big[ \frac{1}{n} \sum \Big( \frac{1}{n} \sum \frac{1}{n} \Big) \Big]$$

$$A_{n,n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots\cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1}, \quad A_{0,1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}.$$

А що після Legendre'a (Exerc. de calc. int. T. II. p. 189).

$$\frac{1}{e^v - 1} = \frac{1}{v} - \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \sin dt}{e^{2\pi t} - 1}$$

проте для $n$ паристого

$$\frac{d^n p}{dv^n} = \frac{2.3 \quad n}{v^{n+1}} - 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^n\, dt \cos vt}{e^{2\pi t} - 1}$$

для $n$ непаристого будемо мати знак $-$ і $\sin vt$ місто $\cos vt$. Інтеґрал $\int e^{vx} fv \sin vt\, dv$ найдемо кладучи в рівнаню (1) за $x$ раз $x + ti$, другий раз $x - ti$; дістанемо іменно:

$$\int e^{vx} . \sin vt . fv . dv = \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i}$$

а так само:

$$\int e^{vx} . \cos vt . fv . dv = \frac{\varphi(x + ti) + \varphi(x - ti)}{2}$$

узглядпивши при тім

$$\int^{n} \varphi x \, dx = \int e^{vx} fv \frac{dv}{v^{3}}$$

дістанемо по підставленю:

$$\sum^{n} \varphi x = A_{n-1, n} \Gamma(n) \int^{n} \varphi x \, dx^{n} - A_{n-2, n} \Gamma(n-1) \int^{n-1} \varphi x \, dx^{n+1} + \quad +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int \varphi x \, dx + (-1)^{n} \tfrac{1}{2} \varphi x$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_{0}^{\frac{1}{0}} \frac{P . dt}{e^{2\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) - \varphi(x - ti)}{2i} +$$

$$+ 2(-1)^{n-1} \int_{0}^{\frac{1}{0}} \frac{Q . dt}{e^{\pi t} - 1} \frac{\varphi(x + ti) + \varphi(x - ti)}{2}$$

де: $P = A_{0, n} - A_{2, n} t^{2} + A_{4, n} t^{4} -$

а: $Q = A_{1, n} - A_{3, n} t^{3} + A_{5, n} t^{5} - \cdots\cdots$

Взором (3) представлений є інтеґрал скінченний $\Sigma^{n} \varphi x$ при помочи інтеґрала означеного поодинокого.

3. В розвідцї:

**Визначні прикмети функциї $y = \varphi x$, означеної рівнанєм:**

$$fy . dy - dx \sqrt{(a - y)(a_{1} - y)(a_{2} - y) \quad (a_{m} - y)} = 0$$

**де** $fy$ **означає якунебудь функцию** $y$, **що не стає ся зером анї безконечностию для** $y = a, \ a_{1}, \ a_{2}, \quad a_{m}$. (Oeuvres compl. II. 51), — доказує автор, що функция $\varphi x$ є функциєю періодичною о періодї $2\alpha$ означенім рівнанєм:

$$\alpha = \int^{a} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{\psi y}}$$

де отже $\alpha$ означає вартість x відповідаючу вартости $y = a$.

$$\varphi(v) = \varphi(v + 2n\alpha + 2n_1\alpha_1 + 2n_2\alpha_2 + \cdots + 2n_m\alpha_m)$$

де $$n_1 + n_2 + n_3 + \quad + n_m = 0$$

а де $\alpha_1$, $\alpha_2$, і т. д. суть вартостями $x$ для $y = a_1$, $a_2$, $a_m$.

**4. Теория функций творячих (génératrice) і визначаючих (determinante).** (Oeuvres compl. II. 77).

Єсли $\varphi(xyz)$ представляє якунебудь функцию змінних $x, y, z$, то мож найти функцию $f(u, v, p)$ таку, щоби:

$$\varphi(x, y, z) = \int e^{xu+yv+zp} f(u, v, p)\,du\,dv\,dp$$

число змінних може бути якенебуь.

В рівнаню тім називає автор $\varphi$ функциєю творячою функциї $f$ і значить єї: $\varphi(x, y, z \quad) = fgf(u, v, p, \quad)$, а $f$ називає визначаючою функциї $\varphi$ і значить: $f(u, v, p \quad) = D\varphi(x, y, z \cdots)$.

Возьмім функцию одноі змінноі:

$$\varphi x = \int e^{vx} fv\,.\,dv$$

$$\varphi x = D\varphi x$$

$$fv = fg\,.\,fv$$

так само:

$$\varphi_1 x = \int e^{vx} f_1 v\,dv$$

то:

$$\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{vx}(fv + f_1 v)\,dv$$

отже:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v$$

т. з.:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x$$

так само:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \cdots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + \cdots$$

а рівночасно:

$$fg\,.\,(fv + f_1 v + f_2 v + \quad) = fg\,.\,fv + fg\,.\,f_1 v + fg\,.\,f_2 v +$$

Дальше випроваджує автор, що:

$$D\left(\frac{d^n \varphi v}{dx^n}\right) = v_n D\varphi v,$$

$$fg.(v^n f v) = \frac{d^n fx}{dx^n}$$

що:

$$D\left(\int^n \varphi x\, dx^n\right) = v^{-n} D\varphi x,\quad fg(v^{-n} fv) = \int^n \varphi x\, dx^n$$

Потім:

$$D(\Delta^n_\alpha \varphi x) = (e^{v\alpha} - 1)^n fv,\quad fg.\left[(e^{v\alpha} - 1)^n fv\right] = \Delta^n_\alpha \varphi x$$

$$D(\Sigma^n_\alpha(\varphi x)) = (e^{v\alpha} - 1)^{-n} fv,\quad fg.\left[(e^{v\alpha} - 1)^{-1} fv\right] = \Sigma^n_\alpha \varphi x$$

де $\alpha$ значить ріжницю $x$.

Єсли возьмемо загально:

$$\delta(\varphi x) = A_{n,\alpha} \frac{d^n \varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n_1,\alpha_1} \frac{d^{n_1} \varphi(x+\alpha_1)}{dx^{n_1}} +$$

то:

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx}. fv \left(A_{n,\alpha} v^n . e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \qquad\right) dx$$

отже:

$$D(\delta\varphi x) = fv.\left(A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots\right).$$

Назвім:

$$A_{n,\alpha} v^n e^{v\alpha} + A_{n_1,\alpha_1} v^{n_1} e^{v\alpha_1} + \cdots\cdots = \psi(v)$$

тоді:

$$D(\delta\varphi x) = \psi(v). D\varphi x$$

а:

$$D(\delta\,\delta_1\,\delta_2 \qquad \varphi x) = \psi(v).\psi_1(v).\psi_2(v) \qquad D\varphi x.$$

Теория та є дуже придатна при розвиваню функций на ряди.

Розвинїм для приміру $\varphi(x+a)$ при помочи ріжничкових сочинників $\varphi x$.

Визначаюча функциї $\varphi(x+a)$ є рівна $e^{v\alpha} fv$, а функциї $\frac{d^n \varphi x}{dx^n} = v^n . fv$. Ходить о розвинене $e^{v\alpha}$ на вираженя виду $A_n v^n$, отже буде:

$$e^{v\alpha} = 1 + v\alpha + \frac{v^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{v^3}{1.2.3}\alpha^3 + \cdots\cdots + \frac{v^n}{1.2.3\cdots n}\alpha^n + \cdots$$

а:

$$e^{v\alpha}.fv = fv + \alpha.vfv + \frac{\alpha^2}{1.2}v^2fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3}v^3fv +$$

а беручи функцию творячу кождого члена сего рівнаня дістанемо з увагою на:

$$fg(e^{v\alpha}.fv) = \varphi(x+a) \text{ і } fg(v^n fv) = \frac{d^n\varphi x}{dx^n}$$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \cdots\cdots$$

форма відома нам з рахунку ріжничкового.

Таких примірів застосованя повисшої теориї випроваджує автор більше.

Дальше є пару розвідок, в яких автор старає ся ріжні функциї виразити при помочи інтеґралів означених пр.:

5. **Виразити $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ через інтеґрал означений.** (Oeuvr. compl. II. 222).

Часть дійсну сеї суми $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ можна на случай, коли $\varphi$ є функциєю альґебраічною, льоґаритмічною, виложничою або коловою, представити в виді дійснім і скінченім, та не мож сего зробити в случаю загальнім. За се мож саму суму представити при помочи означеного інтеґрала:

Коли $\varphi(x+yi)$ і $\varphi(x-yi)$ розвинемо після взору Taylor'а, то дістанемо на суму:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi''x}{1.2}y^2 + \frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}y^4 - \qquad\right) \quad (1)$$

Щоби найти суму сего ряду, возьмім під увагу:

$$\varphi(x+t) = \varphi x + t.\varphi'x + \frac{t^2}{2}\varphi''x + \frac{t^3}{2.3}\varphi'''x + \cdots\cdots$$

Помноживши обі сторони рівнаня через $e^{-v^2t^2}$ та інтеґруючи від $t = -\infty$ до $t = +\infty$ одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-v^2t^2}dt =$$

$$= \varphi x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}dt + \varphi'x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t\,dt + \tfrac{1}{2}\varphi''x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^2dt + \cdots \quad (2)$$

а що:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}t^{2n+1}dt = 0$$

проте остануть самі паристі ріжнички функції $\varphi x$. Інтеґрали з паристими виложниками при $t$ будуть мати вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2} \cdot t^{2n}\, dt = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n\, v^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}} \cdot A_n$$

По підставленю вартостий за них в рівнаню (2) одержимо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x + \frac{A_1}{2}\,\frac{\varphi'' x}{v^2} + \frac{A_2}{2.3.4}\cdot\frac{\varphi'''' x}{x^4} + \quad\right) \tag{3}$$

Помноживши се через $e^{-v^2y^2}.v.dv$ і з'інтеґрувавши від $v = -\infty$ до $+\infty$ дістанемо остаточно: (4)

$$\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v.dv.e^{-v^2y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt = 2\left(\varphi x - \frac{\varphi'' x}{2}.y^2 + \frac{\varphi'''' x}{2.3.4}.y^4 \quad\right)$$

Другий член сего рівнаня є рівний:

$$(\varphi x+y i) + \varphi(x-y i)$$

отже:

$$\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v dv.e^{-v^2y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, e^{-v^2t^2} dt$$

дасть суму $\varphi(x+yi) + \varphi(x-yi)$ виражену означеним інтеґралом.

6. **Числа Bernoulli'ого виражені при помочи означених інтеґралів і випроваджене звідси вираженє скінченого інтеґралу $\Sigma\varphi x$.** (Oeuvr. compl. II. 224).

Числа Бернулього суть то сочинники $A_1$, $A_2$, $A_3 \cdots$ в розвиненю функциї $1 - \frac{u}{2}\cot\frac{u}{2}$ на ряд після ростучих степений $u$:

$$1 - \frac{u}{2}\cot\frac{u}{2} = A_1\,\frac{u^2}{2} + A_2\,\frac{u^4}{2.3.4} + \cdots + A_n\,\frac{u^{2n}}{2.3.4\cdots 2n}$$

Вартости тих сочинників суть:

$$\frac{A_n}{1.2.3\cdots 2n} = \frac{1}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}\left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\right)$$

Возмім на увагу інтеґрал:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}\, dt}{e^t - 1}.$$

Розвинувши єго знаменник на ряд дістанемо:

$$\int \frac{t^{2n-1}dt}{e^t} = \int e^{-t}.t^{2n-1}dt + \int e^{-2t}t^{2n-1}dt + \cdots + \int e^{-kt}t^{2n-1}dt + \cdots$$

а позаяк:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} e^{-kt}t^{2n-1}dt = \frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$$

проте:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^t-1} = \Gamma(2n)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+ \quad \right) = \frac{\Gamma(2n).2^{2n-1}.\pi^{2n}}{1.2.3\cdots 2n}.A_n$$

отже:

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1}dt}{e^{\pi t}-1}$$

При помочи послїдного вираженя мож функцию $\Sigma\varphi x$ виразити означеним інтеґралом.

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + A_1 \frac{\varphi' x}{1.2} - A_2 \frac{\varphi''' x}{1.2.3.4} + A_3 \frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5.6} -$$

Підставивши за $A_1$, $A_2$, $A_3$ вартости дістанемо (винявши перед скобки $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}$):

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\left(\varphi' x \frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5}\frac{t^5}{2^5} + \cdots\right)$$

а що:

$$\varphi' x \frac{t}{2} - \frac{\varphi'''' x}{1.2.3}\frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{v} x}{1.2.3.4.5}.\frac{t^5}{2^5} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)\right]$$

проте $\Sigma\varphi x$ виразить ся рівнанем:

$$\Sigma\varphi x = \int \varphi x\, dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\, \frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)}{2i}$$

Суть також розвідки, в яких Абель подає способи інтеґрованя деяких рівнань ріжничкових. Пр.:

7. **Інтеґрованє рівнаня ріжничкового** $dy = (p + qy + ry^2)dx = 0$ **де** $p$, $q$, **і** $r$ **суть функциями самого** $y$. (Oeuvr. compl. II. 229).

Рівнанє ріжничкове: $dy = (p + qy + ry^2) dx = 0$ (1) перейде через підставленє $y = zr'$ на:

$$(2) \qquad dz + \left(pe^{\int q dx} + re^{-\int q dx} z^2\right) dx = 0$$ т. є на рівнанє виду: $$dy = (P + \theta y^2) dx$$

а се рівнанє (1) дасть ся в'інтеґрувати, наколи $pe^{\int q dx} = are^{-\int q dx}$, бо тоді (3)

$$\frac{dz}{a + 2^2} = -\frac{p}{a} e^{\int q dx} . dx, \quad \text{отже:}$$

$$z = -\sqrt{a}\, tg\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int p\, dx . e^{\int q dx}\right)$$

значить, що:

$$y = -\sqrt{a} . e^{\int -q dx} tg\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{\int q dx} . p\, dx\right) \tag{4}$$

Через підставленє (3) перейде рівнанє (1) на:

$$dy + \left[p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{r\, dx} - \frac{dp}{p\, dx}\right) y + ry^2\right] dx = 0 \tag{5}$$

а єго інтеґрал на:

$$y = -\sqrt{\frac{p}{r}}\, tg \int \sqrt{rp}\, dx$$

або виразивши tang функциями виложничими на:

$$y = \sqrt{-\frac{p}{r}} . \frac{1 - e^{2\int dx \sqrt{-pr}}}{1 + e^{2\int dx \sqrt{-pr}}} \tag{6}$$

Пр. для $p = -r = \frac{1}{x}$ інтеґрал сей буде $y = \frac{1 - cx^2}{1 + cx^2}$.

Та помимо сего, що — як видко в деяких случаях — через відповідне підставленє рівнанє дасть ся з'інтеґрувати, то всеж догіднїйшим для інтеґрованя рівнань є чинник інтеґруючий. Коли приміром чинник інтеґруючий возьмемо $z = e^r$, то рівнанє (1) перейде на:

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2) \frac{dr}{dy} + 2qy \tag{7}$$

Рівнане се взагалї не є лекше до розвязаня чим (1); та мож найти богато частних случаїв, в яких рівнане (7) дасть ся з'інтеґрувати.

Возьмім приміром за чинник інтеґруючий

$$\frac{1}{(\alpha+\beta y)^2},$$

тодї рівнане (7) перейде на:

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha} y^2\right) dx = 0 \tag{8}$$

де $\alpha'$ значить $\frac{d\alpha}{dx}$ а $\beta = \frac{d\beta}{dx}$

причім $\alpha$ і $\beta$ будуть звязані рівнанями:

$$\alpha' - \beta p = 0, \quad \beta' + aq = 0.$$

З'інтеґрувавши (8) дістанемо:

$$\int \frac{dy}{(\alpha+\beta y)^2} + fx = 0$$

або:

$$fx - \frac{1}{\alpha+\beta y} = 0.$$

Щоби найти fx, треба се послїдне рівнане зріжничкувати, виразити $y$ при помочи $x$, тодї:

$$f'x = -\frac{\alpha'}{\alpha\beta^2}, \quad \text{а} \quad fx \doteq -\int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx$$

а тоді інтеґрал рівняня (8) буде:

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)} + \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx = 0$$

т. є.

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2\left(C - \int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2} dx\right)}$$

Застосоване чинника інтеґруючого до розвязаня рівнань ріжничкових показує автор ще і на рівнаню:

$$(y+s)dy + (p+qy+ry^2)dx = 0$$

розвязуючи єго на кілька способів при помочи ріжних чинників інтеґруючих. T. II. p. 236).

8. **Умовини потрібні, щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених, — де ті змінні суть независимі одна від другої — була цілковитою ріжничкою.** (Oeuvres compl. II. 9.).

Най $U$ буде функциєю, що має бути цілковитою ріжничкою а $\Sigma U$ єї інтеґралом, то наколи $\Sigma U$ має бути цілковитим інтеґралом, тоді і $\delta\Sigma U$ також ним буде.

Наколиж:

$$U = f(x, y, z, \cdots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \cdots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \cdots)$$

то:

$$\Sigma\delta U = \Sigma\delta x . P + \Sigma\delta y . Q + \Sigma\delta z . R + \cdots + \alpha$$

де:

$$P = fx - \Delta f'(\Delta(x - \Delta x)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)) - \cdots$$

$$Q = f'y - \Delta f'(\Delta(y - \Delta y)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(y + 2\Delta y + \Delta^2 y)) -$$

і т. д.; $\alpha$ означає часть поза знаком інтеґрованя.

Позаяк $\delta x, \delta y, \delta z,$ суть независимі, проте $\Sigma\delta x . P$, $\Sigma\delta y . Q$, $\Sigma\delta z . R$, не будуть цілковитими інтеґралами, хиба що $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. А се значить, що щоби функция більше змінних і їх ріжничок скінчених була повною ріжничкою, потреба, щоби сповнили ся слідуючі рівнаня:

$$0 = f'(x) - \Delta f'[\Delta(x - \Delta x)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)] -$$
$$- \Delta^3 f'[\Delta^3(x - 3\Delta x + 3\Delta^2 x - \Delta^3 x)] + \cdots$$

$$0 = f'(y) - \Delta f'[\Delta(y - \Delta y)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(y - 2\Delta y + \Delta^2 y)] -$$
$$- \Delta^3 f'[\Delta^3(y - 3\Delta y + 3\Delta^2 y - \Delta^3 y)] +$$

$$0 = f'(z) - \Delta f'[\Delta(z - \Delta z)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(z - 2\Delta z + \Delta^2 z)] -$$
$$- \Delta^3 f'[\Delta^3(z - 3\Delta z + 3\Delta^2 z - \Delta^3 z)] +$$

і т. д.

Се суть умовини конечні, а як автор дальше доказує, заразом і достаточні.

Рівнаня ті випроваджує автор ще і другий раз як умовини потрібні, щоби інтеґрал функциї даної був maximum або minimum. Є се іменно предметом розвідки: **Про maxima і minima інтеґралів.** (Oeuvres compl. II. p. 1.). Там окрім випровадженя повисших взорів, є ще і два частні приміри яко застосоване виведених рівнань.

## Закінчене.

Так перейшов я по черзї всі працї Абеля, великі обемом, богаті ріжнородностию обсягів, а перворядного значіня в історії розвою математики. Вже перші его працї з обсягу розвязуваня рівнань альґебраічних мають епохальне значінє в альґебрі. Квестия, яка через два столїтя оставала непорішеною, а якій посьвятили свої працї майже всї визначні математики XVIII. столїтя, як Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde, Malfatti і иньші, квестия альґебраічного розвязаня рівнаня пятого степеня, війшла тепер на нову дорогу. Стало ясно, що рівнаня степеня висшого чим четвертий, альґебраічно розвязати не дадуть ся, а тим самим і дослїди на тім поли мусїли звернутись в иньшім напрямі; треба було шукати иньших функций, що при їх помочи рівнанє пятого степеня дало ся розвязати. Се й довело до розвязаня при помочи функций елїптичних.

Теория ґруп абелевих дала новий спосіб розвязуваня рівнань альґебраічних, а дальше можність пізнаваня, коли рівнанє дасть ся розвязати альґебраічно. Теория ся, піднята пізнїйше через Galois, розвинула ся широко і отворила нове поле до дослїдів над функциями аналїтичними. Не меньше цїнні є працї Абеля, що відносять ся до функций елїптичних, а період 1815 – 1829, на який припадає час твореня Абеля, мож безперечно назвати найважнїйшим в розвою теориї функций елїптичних. Прикмети функций еліптичних, виписажених теоремом множеня зложеного, по части доказані, а по части лиш (інтуіцийно) віщо перечуті Абелем, стались товчком до дальших праць в тім напрямі Jacobi, Hermite'a, Jouberta, Greenhilla, Webera, а передовсїм Kroneckera, який не лише доказав твореми Абля, але відкрив глубші відносини сеї науки до альґебри і теориї чисел. В тім множеню зложенім беруть початок „числа альґебраічні", які доперва в послїдних часах стали загальним добром ширших кругів математичних. Відкритє альґебраічної природи рівнаня, відносячого ся до подїлу періодів функций елїптичних, основує ся на відношенях поміж коренями того рівнаня, відношенях, які відкрив Абель.

Его дослїди над функциями переступними суть підставою до цїлої нової теориї функций і інтеґралів абелевих, а его славне твердженє о сумі інтеґралів абелевих є найбільше основним твердженєм в цїлій теориї функций альґебраічних і їх інтеґралів. З ним вяжуть ся працї Riemanna і цїла теория поверхнийріманівских, дальше праці Eulera, Weierstrassa, Neumanna, а також Clebscha і Gordana, який щасливо зробив **ту** початок до сполуки понять ґеометричних і аналїтичних.

В загалї у всїх галузях аналїзи слїдний вплив сего великого чоловіка.

*Перемишль, вересень 1902. – май 1903.*