Про зерові місця функциї $\zeta(s)$

написав

Др. Володимир Левицкий.

На конґресі математичнім в Парижи в р. 1900. підніс славний німецкий математик Д. Гільберт цілий ряд проблемів[1]), якими на его погляд має зайнятись математика в будучности, щоби тим успішнійше могла дальше розвиватись. Осьмий его проблем звучить: Ріманн висказав свого часу здогад, що всї місця зерові функції

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\cdots$$

мають дійсну часть рівну $\frac{1}{2}$. Доказ сего твердженя, дотепер ще не переведений, кинувби після погляду Гільберта ярке сьвітло на проблем обчисленя скількости чисел первих.

Квестия переведеня сего доказу належить до найтяжших квестий сучасної аналїзи, а хоча дослїди Goldschmidt'a, Hadamard'a, de la Vallée-Poussin'a, а в найновійших часах E. Landau'a посунули єї вперед, до повної розвязки ще далеко. — В нинїшній нотї хочу вказати дорогу, яка на мій погляд може довести, наколи вже не до самої розвязки, то бодай вказати напрям, як до розвязки можна зближитись.

[1]) Пор. пр.: Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissensch. Göttingen 1900. Math. phys. Klasse Heft 3.

В тій цїли виходжу з форми, якої ужив ще Ріманн в своїх розслїдах над скількостию чисел первих[1]); форма та звучить:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx \quad 1)$$

де:

$$\Pi(s-1)=\Gamma(s)$$

$\left(\Gamma(s)\right.$ інтеґрал Euler'а$\left.\right)$, а:

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x};\ s=a+ti.$$

З форми 1). вийде, що для місць зерових функциї $\zeta(s)$ мусить бути:

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)}\left[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx\right]=0.$$

А що після розслїдів Веєрштрасса[2]) над функциєю Γ для зложених арґументів функция:

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)=$$

є безконечностию — отже еї відворотність зером, лиш для вартостий:

$$s=1,\ -1,\ -3,\ \ldots\ldots,$$

а для тих вартостий $\zeta(s)$ ставалаб безконечно велика (вже $s=1$ є бігуном сеї функциї), то очевидно для місць зерових функций $\zeta(s)$ мусить бути:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}e^{-n^2\pi x}\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx=\frac{1}{s(1-s)} \qquad 2).$$

А що:

---

[1]). Пор. Riemann, Werke ст. 136.

[2]) Crelle's Journal т. 51.

$$s - s^2 = \alpha - \alpha^2 + t^2 + (1 - 2\alpha)\, ti$$

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{(\alpha - \alpha^2 + t^2) + (2\alpha - 1)\, ti}{(\alpha - \alpha^2 + t^2)^2 + (1 - 2\alpha)^2 t^2},$$

а:

$$x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} = \cos\frac{t\log x}{2}\left(e^{\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\log x} + e^{-\frac{1+\alpha}{2}\log x}\right) +$$

$$+ i\sin\frac{t\log x}{2}\left(e^{\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\log x} - e^{-\frac{1+\alpha}{2}\log x}\right)$$

проте з рівнаня 2). випаде наколи зрівнаем перво- і друго-рядні части:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\cos\frac{t\log x}{2}\left(x^{\frac{\alpha}{2}-1} + x^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)dx = \frac{\alpha - \alpha^2 + t^2}{(\alpha-\alpha^2+t^2)^2+(1-2\alpha)^2t^2} \qquad 3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\sin\frac{t\log x}{2}\left(x^{\frac{\alpha}{2}-1} - x^{-\frac{1+\alpha}{2}}\right)dx = \frac{(2\alpha - 1)\, t}{(\alpha-\alpha^2+t^2)^2+(1-2\alpha)^2t^2} \qquad 4).$$

Місця зерові функциї $\zeta(s)$, т. е. $s = \alpha + ti$, мусять проте бути такі, щоби сповнювали рівнаня 3). та 4).

Сейчас видко, що дійсно друге рівнане сповняесь (при якім-небудь t) для $\alpha = \frac{1}{2}$, бо тоді обі сторони сего рівнаня стають ідентично зером. Тоді рівнане 3). перейде на:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\cos\frac{t\log x}{2}\, x^{-\frac{3}{4}}\, dx = \frac{2}{1 + 4t^2} \qquad 5).$$

Колиби показало ся, що рівнане 5). дійсно істнуе для якої не-будь вартости t, то малиби ми вже доказ, що одно з місць зерових функциї $\zeta(s)$ мае дійсно часть перворядну рівну $\frac{1}{2}$. Доказ, що всї місця зерові мають часть перворядну рівну $\frac{1}{2}$, буде однак доперва тоді повний, коли би вдалось перевести доказ, що рівнаня 3). і 4). сповняють ся лиш і виключно лиш для вартости $\alpha = \frac{1}{2}$.

Львів, в цьвітню 1904.