Метода Hermite'a
інтеґрованя вимірних функцій.

подав

Микола Чайковський.

(Hermite's Integrationsmethode von rationalen Funktionen).

§. 1. Інтеґрованє вимірних дробових функцій з многократними чинниками в знаменнику можна собі улекшити при помочи методи Hermite'a*) яка позваляє відлучити альґебраічну часть інтеґрала від перестулної, без попереднього розкладаня на частинні дроби.

Інтеґрал

$$J = \int \frac{f(x)}{F(x)} dx \tag{1}$$

виконуємо в той спосіб, що функцію $\frac{f(x)}{F(x)}$ розкладаємо на частинні дроби: коли $F(x)$ є многократні чинники, то частинні дроби будуть мати в знаменниках всї степенї кождого чинника; інтеґруючи їх одержимо з кождого дроба альґебраічний інтеґрал, з виїмком тих, яких знаменники є однократні. Потім мусимо додати до себе всї альґебраічні інтеґрали.

Метода Hermite'a дає нам спосіб ощадити собі ту працю розкладаня на частинні дроби альґебраічної части і стяганя її в суму.

§. 2. Нехай буде

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\mu} (x - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{\nu} (x^2 + b_j x + c_j)^{\beta_i} \tag{2}$$

знаменником інтеґрованої функції; степень тої функції є

$$s = \Sigma \alpha_i + 2 \Sigma \beta_i,$$

степень чисельника $f(x)$ є що найменше $s_1 - 1$. Знаменник альґебраічної части інтеґрала буде обіймати всї чинники функції $F(x)$ в степенях о 1 низших ніж в $F(x)$, бо

*) Отсю методу подав Hermite в своїх викладах „Cours d' analyse"; одначе нїхто не користував ся нею, аж зробив про неї замітку Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, II. стр. 407. Про ту методу дізнав ся я від мого Вп. Професора Т. Цвойдзїнського.

$$\int\frac{dz}{z^n} = \frac{1}{nz^{n-1}}$$

длятого маємо функцію

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^{\mu}(x-a_i)^{\alpha_i-1}\prod_{j=1}^{\nu}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j-1} \tag{3}$$

якої степень буде

$$s_2 = s_1 - \mu - 2\nu,$$

а степень чисельника $\varphi(x)$ що найвисше $s_2 - 1$. — Переступна часть буде мати в знаменнику всї чинники функції $F(x)$ однократно,

$$\Psi(x) = \prod_{i=1}^{\mu}(x-a_i)\,.\prod_{j=1}^{\nu}(x^2+b_jx+c_j) \tag{4}$$

степеня

$$s_3 = \mu + 2\nu;$$

чисельник $\psi(x)$ буде степеня $\leqq s_3 - 1$. Маємо отже

$$F(x) = \Phi(x)\Psi(x); \tag{5}$$

звідси згідно з дефініціями

$$s_1 = s_2 + s_3$$

З того слїдує таке роздїлене інтеґрала

$$J = \int\frac{f(x)}{F(x)}dx = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \int\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}dx. \tag{1a}$$

§. 3. Зріжничкуймо рівнане (1a) після x:

$$dJ = \frac{f(x)}{F(x)}dx = \frac{\Phi(x)\varphi'(x) - \Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)}dx + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}dx,$$

а позносивши знаменники маємо

$$f(x) = \frac{F(x)\varphi'(x)}{\Phi(x)} - \frac{F(x)\Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)} + \frac{F(x)\psi(x)}{\Psi(x)};$$

супроти реляції (5) є

$$f(x) = \Psi(x)\varphi'(x) - \frac{\Psi(x)\,\Phi'(x)}{\Phi(x)}\varphi(x) + \Phi(x)\psi(x). \tag{6}$$

Ріжничкуючи функцію (3) маємо

$$\Phi'(x) = (\alpha_1 - 1)\frac{\Phi(x)}{x - a_1} + \ldots + (\beta_1 - 1)(2x + b_1)\frac{\Phi(x)}{x^2 + b_1x + c_1} + \ldots$$

або

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \sum\frac{\alpha_i - 1}{x - a_i} + \sum\frac{(\beta_j - 1)(2x + b_j)}{x^2 + b_jx + c_j}.$$

В знаменнику тої функції містять ся всї чинники функції $\Psi(x)$, отже

$$\frac{\Psi(x)\Phi'(x)}{\Phi(x)} = G(x) \tag{7}$$

є цілою функцією. Вставивши те в (6) одержуємо

$$f(x) = \Psi(x)\varphi'(x) - G(x)\varphi(x) + \Phi(x)\psi(x). \qquad \text{(6a)}$$

Степень того рівнаня є:
по лівій стороні; $\leqq s_1 - 1$;
по правій стороні (поодинокі вирази): $\leqq s_3 + s_2 - 2 = s_1 - 2$;
$\leqq s_3 + s_2 - 1 - s_2 + s_2 - 1 = s_1 - 2$; $\leqq s_2 + s_3 - 1 = s_1 - 1$,
отже по обох сторонах рівні.

Порівнуючи сочинники при x по обох сторонах рівнаня (6a), одержимо s_1 лінійних реляцій, з яких визначимо s_2 сочинників для функції $\varphi(x)$ і s_3 для функції $\psi(x)$.

Таким чином буде довершений розклад інтеґрала на альґебраїчну і переступну часть.

§. 4 **Примір.** Квадратура еліпси веде до інтерала

$$E = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Підставляючи

$$\frac{a - x}{a + x} = z^2,$$

т. зн.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2az}{1 + z^2},$$

$$dx = -\frac{4az}{(1 + z^2)^2}dz,$$

одержимо

$$E = 8ab\int_0^1 \frac{z^2 dz}{(1 + z^2)}.$$

Тут є:

$$F(z) = (1 + z^2)^3;\ f(z) = z^2;$$
$$(\Phi z) = (1 + z^2)^2;\ \varphi(z) = k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3$$
$$\Psi(z) = 1 + z^2;\ \psi(z) = l_0 + l_1 z;$$

звідси слідує

$$G\ z) = 4z,$$

отже маємо рівнане (6a)

$$z^2 = \left\{\begin{array}{l} k_1 + 2k_2 z + 3k_3 z^2, \\ \qquad + k_1 z^2 + 2k_2 z^3 + 3k_3 z^4, \\ - 4k_0 z - 4k_1 z^2,\ \ 4k_2 z^3 - 4k_3 z^4, \\ + l_0 + l_1 z + 2l_0 z^2 + 2l_1 z^3 + l_0 z^4 + l_1 z^5 = 0 \end{array}\right.$$

яке дає: $k_0 = 0, k_1 = -\frac{1}{8}, \; k_2 = 0, k_3 = \frac{1}{8}; \;\; l_0 = \frac{1}{8}, \; l_1 = 0,$

т. зн.

$$\varphi(x) = -\frac{1}{8}z + \frac{1}{8}z^2,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{8}.$$

Звідси

$$E = 8\,ab\left[\frac{-\frac{1}{8}z + \frac{1}{8}z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}\right]$$

$$= \frac{\pi ab}{4},$$

згідно з иншими обчисленями.

Тернопіль, 2. XII. 1910.

RÉSUMÉ.

Die Hermite'sche Integrationsmethode dient dazu, im Integral einer rational gebrochenen Funktion mit mehrfachen Faktoren im Nenner, den algebraischen Teil vom transzendenten ohne Partialbruchzerlegung abzuspalten. Sei

$$J = \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$

das gesuchte Integral, worin $F(x)$ mehrfache Faktoren ersten und zweiten Grades besitzt, dann können wir schreiben:

$$J = \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dz = \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} + \int \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}\,dz;$$

die Funktion $\Phi(x)$ besitzt dieselben Faktoren wie $F(x)$, nur ihre Grade sind um 1 geringer; $\Psi(x)$ besitzt dagegen alle Faktoren von $F(x)$, aber nur einfach. Somit haben wir

$$F(x) = \Phi(x)\Psi(x).$$

Wir differenzieren das Integral nach x:

$$dJ = \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \frac{\Phi(x)\varphi'(x) - \Phi'(x)\varphi(x)}{\Phi^2(x)}\,dx + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}\,dx,$$

woraus wir nach einigen Umformungen bekommen:

$$f(x) = \Psi(x)\varphi'(x) - G(x)\varphi(x) + \Phi(x)\psi(x);$$

$G(x)$ bedeutet hierin die ganze Funktion $\frac{\Psi(x)\Phi'(x)}{\Phi(x)}$. Aus dieser Gleichung berechnen wir nach der Methode der unbestimmten Koefizienten die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$.