Про закон бігунового дуалїзму ґеометричних творів.

написав

В. Калїцун.

(B. Kalicun. Über das Gesetz der polaren Dualität in der Geometrie.)

Часть II. (II. Teil.)

Про закон бігунового дуалїзму в просторі.

I.

1. Дана є в просторі поверхня другого степеня $F^{(2)}$ і довільна точка P.

Довільна площа α, яка переходить через точку P, перетинає дану поверхню $F^{(2)}$ після кривої II-го степеня c^2. Бігунова точки P, з огляду на ту криву c^2, нехай буде означена через p. Иньша площа α_1, переходяча через точку P, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої $C_1{}^2$, а криву C^2 в двох точках A і B. Бігунова p_1 точки P, з огляду на криву $C_1{}^2$, перейде через точку U, гармонїчно спряжену з P в ґрупі $(PUAB) = -1$, через яку переходить рівнож бігунова p, бо точки A і B є спільні для обох кривих C^2 і $C_1{}^2$. З того слїдує, що прямі p і p_1 лежать на одній площі Π.

Однак нетрудно буде доказати, що на тій площі Π лежать всї бігунові p_x точки P, з огляду на перерізи $C_x{}^2$ поверхнї $F^{(2)}$ довільними площами α_x, які переходять через точку P.

Коли іменно площа α_x перетинає прямі p і p_1 в точках U_1 і U_2, а криві C^2 і $C_1{}^2$ в парах точок: C і D, E і F, то точки U_1 і U_2 є гармонїчно спряжені з точкою P в ґрупах: $(PU_1CD) = -1$, $(PU_2EF) = -1$; отже пряма p_x, яка сполучує точки U_1 і U_2, є бігуновою точки P, з огляду на криву $C_x{}^2$, бо точки C і D, E і F належать рівнож і до тої кривої $C_x{}^2$. — Так отже дїйсно пряма p_x лежить на площі Π, визначеній прямими p і p_1.

З повисшого розумованя слїдує твердженє:

„Коли сїчна площа α_x поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ обертає ся около своєї сталої точки P, тодї бігунова p_x тої точки P. з огляду на криву C_x^2, після якої площа α_x перетинає поверхню $F^{(2)}$, описує сталу площу Π.“

Площу тую названо „бігуновою площею“ точки P, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$.

Нетрудно однак запримітити, що:

„Бігунова площа Π точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є місцем ґеометричним точок U, U_1, U_2, ... гармонїчно спряжених з точкою P з огляду на пари точок A, B; C, D; ..., в яких прямі, що переходять через точку P, перетинають ту поверхню $F^{(2)}$.“

А позаяк точки U, U_1, U_2, ... є одинокими точками гармонїчно спряженими з точкою P в ґрупах $(PUAB)$, (PU_1CD), ..., проте площа Π є одинокою бігуновою площею точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

З сего слїдує, що:

„З кождою дїйсною точкою (P) простору є спряжена певна площа (Π), яка є однозначно визначена тою точкою і поверхнею II-го ст. $F^{(2)}$.“

Зі свійства гармонїчної ґрупи чотирох точок дасть ся дальше легко доказати, що:

„Бігунова площа Π довільної точки P, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, є площею стичности стожка II-го ст., описаного з точки P на данїй поверхнї $F^{(2)}$.“

„Бігунова площа точки в безконечности переходить через осередок поверхнї $F^{(2)}$.“

„Бігунова площа точки P, що лежить на поверхнї $F^{(2)}$, сходить ся з площею стичною тої поверхнї в точцї P.“

2. Виходжу тепер з заложеня, що є дана в просторі довільна площа Π і поверхня II-го степеня $F^{(2)}$.

Бігунова площа Π_1 довільної точки P_1, що лежить на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_1^2, а площу Π після прямої p_1; подібно бігунова площа Π_2 иньшої точки P_2 на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_2^2, площу Π після прямої p_2, а площу Π_1 після прямої d. Та послїдна пряма d перетинає криві C_1^2 і C_2^2 в двох спільних точках A і B, а площу Π в точцї U, яка є точкою пересїчи прямих p_1 і p_2. З того слїдує, що пряма d мусить перейти через точку P, гармонїчно спряжену в ґрупі $(PUAB) = -1$, а яка є бігуном прямої p_1, з огляду на криву C_1^2, як рівнож бігуном прямої p_2, з огляду на криву C_2^2.

Рівнож легко буде доказати що через тую точку переходять всі бігунові площі (Π_x) точок (P_x) площі Π, з огляду на $F^{(2)}$.

Іменно бігунова площа Π_x точки P_x, що лежать на площі Π, перетинає поверхню $F^{(2)}$ після кривої C_x^2, а бігунові площі Π_1, Π_2 точок P_1, P_2 після прямих d_1, d_2. Ті послїдні перетинають криві C_x^2 і C_1^2, C_x^2 і C_2^2 в їх спільних точках C і D, E і F, а прямі p_1 і p_2 в точках U_1, U_2. Отже на прямих d_1, d_2 мусить лежати точка P, яко гармонїчно спряжена з точками U_1, U_2 в ґрупах $(PU_1\,CD) = -1$, $(PU_2\,EF) = -1$.

Таким способом доказалисьмо слїдуюче твердженє:

„Бігунові площі (Π_x) всїх точок (P_x), що лежать на данїй площі Π, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходять через одну і ту саму точку P."

Однак з тверджень попередного уступа слїдує, що спільні точки A і B кривих C_1^2 і C^2_2 є точками стичности стичних площ σ_1 і σ_2 до поверхнї $F^{(2)}$, які переходять через пряму $[P_1\ P_2] = g$. Ввиду сего площа v, яка лучить точку P з прямою g, є гармонїчно спряжена з площею Π, з огляду на стичні площі σ_1 і σ_2, бо ті площі переходять через точки P, U, A, B, що творять ґрупу гармонїчну. Отже:

„Коли грана (g) двох стичних площ (σ_1 і σ_2) поверхнї II-го ст. $F^{(2)}$ порушає ся по сталїй площі Π, тодї площа V гармонїчно спряжена з площею Π, з огляду на пару стичних площ σ_1 і σ_2, обертає ся около сталої своєї точки P."

А що через кожду пряму g площі Π можна попровадити тілько одну площу v, яка є гармонїчно спряжена з площею Π, з огляду на площі σ_1 і σ_2, проте точка P є одинокою спільною точкою всїх площ V.

Точку P названо „бігуном" площі Π, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$.

Подібно отже як через точку і поверхню II-го ст. $F^{(2)}$ є однозначно визначена бігунова площа тої точки, так і взаїмно „з кождою дїйсною площею є спряжена одинока дїйсна точка, яка є докладно визначена тою площею і поверхнею $F^{(2)}$.

3. Вертаю еще раз до попередної фіґури і беру під розвагу довільну точку P_x на прямій g площі Π.

Бігунова площа Π_x тої точки, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, мусить перейти через бігун P площі Π, з огляду на $F^{(2)}$, як рівнож через бігун P_g прямої g, з огляду на криву C^2, після якої площа Π перетинає поверхню $F^{(2)}$. Коли отже точка P_x, порушаючи ся по прямій g, описує ряд (P_x), то її бігунова площа Π_x визначує вязку

(Π_x), що посїдає прями g_1 за вісь, яка лучить ті два сталі бігуни P і P_g. Однак звісно, що ряд *(P_x)* є проективний з вязкою бігунових тих точок, з огляду на криву C^2, яка то вязка не є нїчим иньшим як слїдами площ Π_x на площі Π. — Отже:

„Коли точка P_x описує на прямій g ряд *(P_x)*, то еї бігунова площа Π_x, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходить через одну і ту саму пряму g_1 і творить вязку *(Π_x)*, яка є проективна з рядом *(P_x)*."

І взаїмно:

„Коли площа Π_x описує около своеї сталої прямої g_1 вязку площ *(Π_x)*, то бігун P_x тої площі, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, порушає ся по сталій прямій g і визначує ряд *(P_x)*, який є проективний з вязкою *(Π_x)*."

З повисших тверджень передовсїм слїдує, що „прямій *(g)*, яку уважаємо за основу ряду точок *(P_x)*, відповідає бігуново, з огляду на поверхню $F^{(2)}$ II-го ст. иньша пряма g_1, котра становить вісь вязки *(Π_x)* бігунових площ точок P_x, з огляду на тую поверхню.

Прямі g і g_1 що в той спосіб собі відповідають названо „прямими бігуново зі собою спряженими", з огляду на поверхню II-го степ. $F^{(2)}$.

Нетрудно буде відтак провірити слїдуючі свійства прямих g і g_1 бігуново спряжених, з огляду на $F^{(2)}$:

„Коли пряма g порушає ся по площі Π, то пряма g_1, бігуново спряжена з g, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, переходить через бігун P площі Π, з огляду на ту поверхню."

І взаїмно:

„Коли пряма g описує на площі Π вязку прямих о вершку P_1, то g_1 описує вязку прямих на площі Π_1, бігуновій точки P_1, якої то вязки вершком є бігун P площі Π; Обі ті вязки прямих є проективні".

4. Дві точки, які посїдають те свійство, що бігунова площа, з огляд на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, одної з них — переходить через другу, носять назву „**спряжених бігунів**"; подібно під „**двома бігуново спряженими площами**", з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, належить розуміти такі дві площі, з котрих одна переходить через бігун другої.

В попереднім відступі (3) доказано, що ряд точок P_x на прямій g є проективний з вязкою бігунових площ *(Π_x)* тих точок, визначених з огляду на поверхню $F^{(2)}$. З сего слїдує, що точки P'_x, в яких пробиває пряма g вязку (Π_x,) творять ряд *(P'_x)*, проективний з рядом *(P_x)*. Однак легко запримітити, що точки відповідні тих рядів є спряженими бігунами, з огляду на криву C^2, після якої перетинає поверхню $F^{(2)}$ довільна площа Π, що переходить через пряму g; ті ряди мусять отже, як звісно з I части, творити інволюцию. Позаяк однак точки P_x і P'_x є спряженими бігунами рівнож і з огляду на поверхню $F^{(2)}$, а площі Π_x і Π'_x, що переходять через ті точки і пряму g_1, бігуново спряжену з прямою g, є бігуново спряженими площами, з огляду на поверхню $F^{(2)}$, проте з повисшого розумованя слїдують твердженя:

„Всї пари спряжених бігунів, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, що лежать на тій самій прямій g, творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки пересїчи тої прямої з поверхнею $F^{(2)}$."

I взаїмно:

„Всї пари бігуново спряжених площ, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, переходячих через ту саму пряму g_1, творять вязку інволюцийну, якої подвійними площами є стичні площі до $F^{(2)}$, поведені через пряму g_1."

„Коли прямі g і g_1 є зі собою бігуново спряжені, з огляду на $F^{(2)}$, тодї інволюцийний ряд спряжених бігунів на одній з них є перспективічний з вязкою бігуново спряжених площ, переходячих через другу."

5. Повисші сполученя між просторними елементами і їх творами I-го ст. становлять основне свійство „закона бігунового дуалїзму в просторі."

Після того закона:

„Просторному системови Σ, який складає ся з точок — яко вершків вязок (P), — з прямих — яко основ рядів точок (g) або осий вязок площ (l) — і з площ — яко основ плоских системів (Π) — відповідає бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, иньший просторний систем Σ, котрий складає ся з площ — яко основ плоских системів, відповідаючих бігуново вязкам (P), — з прямих — яко осий вязок площ проєктивних з рядами (g) або основ рядів проєктивних з вязками (l), — і з точок яко вершків вязок, бігуново спряжених з плоскими системами (Π)," — при чім:

„Кождому твердженю, кождій дефінїциї, конструкциї або завданю, в яких виступають певні сполученя і свійства метові між елементами системи Σ, відповідає иньше твердженє, иньша дефінїция, конструкция або задача о сполученях і свійствах метових між елементами системи Σ_1, які слїдують з перших, коли поміняємо понятя: — точка — і площа; ділання: — перетинати — і — лучити, а полишимо однаковож незміненими понятя: прямої перспективічного положеня і відношеня подвійного поділу."

Системи Σ і Σ_1, що в той спосіб собі відповідають, названо „системами бігуново спряженими", з огляду на поверхню II-го ст. $F^{(2)}$, яку знов названо „провідною бігунового дуалїзму."

6а) Нехай отже точка P в системі Σ, яка порушаює ся після певного закона, описує криву просторну C.

Що дві безпосередно по собі слїдуючі точки тої кривої визначують єї стичні, які з причини неперерваного наслїдства творять поверхню розвивну Π_r, описану на кривій C; що дві безпосередно по собі слїдуючі стичні перетинають ся в точцї тої кривої, визначаючи площу (α), яка є стичною до розвивної поверхнї Π_r, а рівночасно тїсно-стичною до кривої C. — Неперерваному наслїдству точок P в системі Σ відповідає в системі Σ_1, бігуново спряженім з Σ, неперерване наслїдство єго бігунової площі Π, яка обвиває поверхню розвивну Π_r'. Що дві безпосередно по собі слїдуючі стичні площі визначають творячі тої поверхнї, які відповідають бігуново стичним кривої C, а що дві безпосередно по собі слїдуючі творячі тої поверхнї визначають точки кривої звороту C', які відповідають бігуново тїсно-стичним площам кривої C.

Отже:

„Кривій просторній C і на нїй описаній поверхнї розвивній Π_r відповідає бігуново дуалїстично поверхня розвивна Π'_r і єї крива звороту C'. — "

„Коли крива C є m-го ряду n-ої кляси r-го степеня, тодї з довільної точки можна попровадити m площ стичних до поверхнї Π'_r, отже m площ тїсно-стичних до кривої C', довільна площа перетинала-би криву звороту C' в n точках, а довільна пряма перетинала-би r творячих поверхнї Π_r' — отже r стичних кривої C'. Крива C' є отже ряду n-го кляси m-ої степеня r-го."

Коли крива C є плоскою, тодї всї бігунові площі єї точок переходять через бігун площі тої кривої і обвивають стіжок (σ). Творячі того стіжка є бігуново спряжені зі стичними кривої C, а крива звороту (C') редукує ся до вершка того стіжка.

„Коли плоска крива C є ряду m-го кляси n-ої, то стіжок σ, бігуново з нею спряжений, з огляду на поверхню II. ст., є кляси m-ої ряду n-го."

6б) З повисших розважань слїдує, що:

„Коли крива просторна C, що порушає ся після певного закона, творить поверхню Π, то поверхня розвивна Π'_r, бігуново з C спряжена, обвиває поверхню Π', яка відповідає бігуново дуалїстично поверхнї Π.“

Поверхнї Π і Π' є зі собою в той спосіб спряжені, що:

„Кождій точцї і стичній площі в тій точцї одної поверхнї — відповідають бігуново дуалїстично стичні площі і їх точки стичности другої поверхнї.“

Ввиду сего легко запримітити, що:

„Коли поверхня Π є ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, то поверхня Π' з нею бігуново спряжена є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$.“

Іменно m точкам, в яких довільна пряма l перетинає поверхню Π, відповідає m площ стичних, поведених через пряму l', бігуново спряжену з l, до поверхнї Π'; n площам стичним, поведеним через довільну пряму q до поверхнї Π відповідає n точок пересїчи прямої q', бігуново спряженої з q, з поверхнею Π'.

6в) Приймім під розвагу дві поверхнї Π і Π_1, які належать до систему Σ; перша з них нехай буде ряду $m^{\text{-го}}$ кляси $n^{\text{-ої}}$, а друга ряду $q^{\text{-го}}$ кляси $p^{\text{-ої}}$; то тим поверхням відповідають бігуново в системі Σ' дві иньші поверхнї Π' і Π'_1, з яких перша є кляси $m^{\text{-ої}}$ ряду $n^{\text{-го}}$, а друга кляси $q^{\text{-ої}}$ ряду $p^{\text{-го}}$, — при чім легко запримітити, що:

1^0 „Кривій пересїчи поверхнї Π і Π_1, яка є ряду $m.q^{\text{-го}}$, відповідає поверхня розвивна (Π_r), описана на бігунових поверхнях Π' і Π'_1; та поверхня є отже кляси $mq^{\text{-ої}}$[1]“.

І взаїмно:

2^0 „Поверхня розвивна описана на обох поверхнях Π і Π_1 відповідає бігуново дуалїстично кривій пересїчи поверхний Π' і Π_1', є отже кляси $n.p^{\text{-ої}}$.“

3^0 „Коли поверхнї Π і Π_1 стикають ся в певній точцї і посїдають в тій точцї спільну площу стичности, тодї їх бігунові поверхнї Π' і Π'_1 стикають ся рівнож в однїй точцї і посїдають в нїй спільну стичну площу; если-би отже перші поверхнї стикали ся вздовж певної кривої, тодї їх поверхнї бігунові стикали-би ся рівнож вздовж певної кривої.“

4^0 „З вязкою поверхний, які переходять через криву пересїчи поверхний Π і Π_1, є бігуново дуалїстично спряжена громада по-

---

[1]) Cremona-Kurtze. Oberfläche... ст. 21.

верхний, вписаних в поверхню розвивну, яка є описана на поверхнях $П'$ і $П'_1$."

Нехай в данім случаю будуть дані в системі Σ дві поверхнї II-го степеня $П^2$ і $П_1{}^2$; то поверхнї ($П'^2$ і $П_1'^2$), що відповідають їм бігуново дуалїстично, з огляду на поверхню провідну $F^{(2)}$, є рівнож II-го степеня; отже їх крива пересїчи є ряду IV-го кляси 12-ої ($C^4{}_{12}$). Та крива відповідає бігуново розвивній поверхнї ($П_4{}^r$), описаній на перших двох поверхнях, поверхня $П^r{}_4$ є отже кляси 4-ої ряду XII-го. Звісно однак, що через ту криву C^4 можна повести чотири стіжкові поверхнї II-го степеня, яких вершки сходять ся з вершками спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний $П'^2$ і $П'_1{}^2$. Тим чотиром стіжкам відповідають в системі Σ чотири криві II-го степеня, після яких перетинає ся сама зі собою розвивна поверхня $П^r{}_4$; ті криві мусять отже лежати на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох поверхний $П^2$ і $П_1{}^2$.

Тим способом доходимо до знаного твердження:

„Крива власної пересїчи розвивної поверхнї описаної на двох поверхнях II-го степеня складає ся з чотирох кривих II-го степ., що лежать на стїнах спільного чотиростїнника бігунового обох тих поверхний."

6г) Повисші розумовання доказують, що бігуновий дуалїзм в просторі є загальною методою трансформацийною всїх сполучень і метових свійств ґеометричних утворів, до яких належать всї начеркові свійства тих утворів і сполучення взаїмного положеня їх елементів, що є зависимі від відношення подвійного подїлу.

Коли ми хочемо троха розширити обсяг примінення тої методи до сполучень метричних, приймаємо за поверхню провідну бігунового дуалїзму кулю або парабольоїд, — подібно як то робилисьмо на площі, де принималисьмо за провідну бігунового дуалїзму коло або параболю.

7а) Нетрудно запримітити, що бігунова площа довільної точки, в віднесеню до кулї K, є прямовісна до проміру тої кулї, який переходить через сесю точку. З того відтак слїдує, що дві прямі бігуново зі собою спряжені, в віднесеню до кулї, є до себе прямовісні і кожда з них лежить на діяметральній площі, прямовісній до другої.

Коли возьмемо під розвагу дві площі $П$ і $П_1$, то бігуни P і P' тих площ, з огляду на кулю K, лежать на промірах прямовісних до тих площ, отже замикають они кут, який є сповненем до 180^0 кута, замкненого даними площами. Подібно кут, який замикають дві перетинаючі ся прямі m і n, є сповненем кута, замкненого діяметральними площами, які переходять через прямі m' і n' бігуново спряжені з m і n.

З сего заключаємо, що:

„Коли дві просторні фіґури є зі собою бігуново спряжені, в віднесеню до кулї K, а між величинами кутів одної з них заходить певне получене, то подібне получене заходить між кутами, утвореними около осередка провідної кулї (K) промірами або площами діяметральними, яких напрями переходять через бігуни стїн зглядно бігунові боків перших кутів.“

7б) Нехай буде дана провідна куля K і иньша довільна куля K_1.

Кожда площа, що переходять через осередок обох куль, перетинає першу з них після кола k, а другу після кола k_1 — так, що бігунова кола k_1, в віднесеню до k, є кривою II-го степеня, яка має огнище в осередку кола k, а за провідну, приналежну до сего огнища, бігунову осередка кола k_1, з огляду на коло k[1]).

Ввиду сего зі симетричности обох куль слїдує, що:

„Кулї K_1 відповідає бігуново, з огляду на иньшу кулю K, оборотова поверхня II-го степеня (S), яка посїдає одно огнище в осередку провідної кулї K і має за провідну площу сего огнища бігунову площу осередка кулї K_1. — Поверхня S є елїпсоїдом, гіперболоїдом двоповолоковим або парабольоїдом еліптичним, — залежить від сего, чи осередок провідної кулї лежить на вні, в утрі або на самій поверхнї даної кулї K_1.“

З повисшого твердженя слїдує, що:

„Розличні свійства кутів у куль можна перемінити на свійства кутів, приналежних до спільного огнища оборотових поверхний II-го степеня.“

Трансформация метричних сполучень при помочи парабольоїда яко провідної поверхнї бігунового дуалїзму полягає на слїдуючім свійстві:

„Бігунові площі двох довільних точок, з огляду на парабольоїд, визначують на єго оси довжину, яка є рівна величинї прямокутного мета на ту вісь довжини, що сполучує дані точки.“

[Доказ сего свійства і єго інтерпретация є анальоґічні до тих, які знаходять ся в I-ій части ст. 12, проте їх полишаю].

II.

1. Часто два системи в просторі Σ і Σ', бігуново зі собою спряжені, з огляду на поверхню II го ст. $F^{(2)}$, уважаємо за один,

[1]) Порівнай I. часть ст. 11.

називаючи его „**бігуновим системом**“ (Σ) провідної поверхні $F^{(2)}$.

Хочу в отсїм роздїлї доказати, що основні свійства сего бігунового системy (Σ), які представилисьмо в попереднім роздїлї, істнують независимо від его провідної поверхнї $F^{(2)}$.

В тій цїли возьмім під увагу в системі бігуновім Σ, визначенім, з огляду на поверхню II-го степеня $F^{(2)}$, певний чотиростїнник $ABCD$, який посїдає те свійство, що его вершки є бігунами протилежних стїн, а взаїмно стїни є бігуновими площами протилежних вершків, — а крім сего довільну точку E і еї бігунову площу ε — і усуньмо на хвилю з нашої уяви провідну $F^{(2)}$ того системy.

Пари протилежних гран сего чотиростїнника є спряженими бігуновими, пари вершків лежачих на тих гранах — є спряженими бігунами, — а пари стїн переходячих через них, є бігуново спряженими площами даного бігунового системy. Отже вершки A, B даного чотиростїнника, які лежать на грани $AB \equiv s$, становлять одну пару відповідних точок інволюцийного ряду спряжених бігунів, який то ряд приналежить в данім системі Σ до прямої $\cdot s \cdot$. Коли хочемо визначити другу пару точок тої інволюциї, то мусимо пошукати точок пересїчи прямої s з площею ε і площею $[s_1, E]$, яка сполучує бігун E площі ε з прямою $s_1 \equiv CD$. Сими двома парами точок є інволюцийний ряд спряжених бігунів на прямій s докладно визначений.

Тим самим способом, незалежно від поверхнї $F^{(2)}$, дадуть ся визначити інволюциї спряжених бігунів на иньших гранах чотиростїнника $ABCD$, а тим самим інволюцийні вязки бігуново-спряжених площ, яких осями є ті грани, а відтак бігунові системи на его стїнах і бігунові снопи (жмути) в его вершках.

Коли хочемо в той сам спосіб, без помочи провідної поверхнї $F^{(2)}$, визначити бігун довільної площі Π, мусимо повести прямі a і d, після яких та площа перетинає дві протилежні стїни $BCD \equiv \alpha$, $BCA \equiv \delta$ даного чотиростїнника. Коли прямим тим (a, d) відповідають в бігунових системах плоских на площах α і δ бігуни A_1 і D_1, то прямі, які сполучують ті точки відповідно з бігунами площ α і δ [с. е. з точками A і D], є бігуново спряжені відповідно з прямими a, d в бігуновім системі Σ. А позаяк прямі a, d лежать на однії площі Π, проте прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{DD_1}$ лежать рівнож на однії площі і перетинають ся в точцї P, яка є бігуном даної площі Π. Бо через сю точку, як легко запримітити, переходять всї пари прямих, бігуново спряжених в системі Σ з прямими, після яких дана площа Π перетинає всї противлежні стїни чотиростінника $ABCD$.

При помочи відворотної конструкциї дасть ся визначити для довільної точки P єї бігунова площа, а відтак для довільної прямої g — з нею бігуново спряжена пряма g_1 — враз з приналежною до неї інволюцєю спряжених бігунів зглядно бігуново спряжених площ, отже цїлий бігуновий систем Σ.

Проте з повисших розумовань слїдує:

„Бігуновий систем (Σ) в просторі буде визначений, коли в довільно принятім чотиростїннику ($ABCD$) взаїмно спряжемо вершки з противлежними стїнами — яко бігуни і бігунові площі, — а крім сего приймемо довільну точку (E) і площу (ε) за бігун і відповідаючу єму бігунову площу.“

2. Чотиростїнник $ABCD$ названо „бігуновим чотиростїнником“ даного бігунового системи (Σ); інволюциї спряжених бігунів на его гранах [як рівнож інволюциї бігуново-спряжених площ, переходячих через ті грани] — є зависимим від принятя точки E і его бігунової площі є. — Коли примінимо до бігунових системів плоских на стїнах того чотиростїнника твердженя з I части на стороні 16 і 17, то буде можна легко запримітити, що слїдує:

1⁰ „Коли на одній парі противлежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є рівноіменні, то мусять бути рівноіменні ті інволюциї і на двох иньших парах противлежних гран. А именно можуть они тодї бути: а) на всїх парах противлежних гран — еліптичні, в) на одній парі еліптичні, а на двох иньших — гіперболічні.“

2⁰ „Коли на одній парі противлежних гран бігунового чотиростїнника інволюциї спряжених бігунів є ріжноіменні, тодї мусять они бути ріжноіменні і на иньших парах противлежних гран, так, що маємо взагалї три інволюциї еліптичні і три гіперболічні.“

Хотїлибисьмо однак доказати, що:

„Всї бігунові чотиростїнники, які виступають в певнім бігуновім системі, можуть бути тілько одного з повисших родів.“

I дійсно, нехай прямі s, s_1 будуть одною парою, а прямі t, t_1 другою довільною парою спряжених бігунових в данім бігуновім системі Σ; то з довільної точки P в просторі можна повести тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі s і s_1 — в точках A і A_1, — як рівнож тілько одну таку пряму, що перетинає рівночасно обі прямі t і t_1 — в точках B і B_1. Коли відтак точки A', A'_1; B', B'_1 будуть відповідно спряжені з точками A, A_1; B' B_1 в інволюциях спряжених бігунів, які приналежать до прямих

s, s_1; t, t_1 в данім бігуновім системі Σ, тоді прямі $\overline{AA_1}$ і $\overline{A'A'_1}$, $\overline{BB_1}$ і $\overline{B'B'_1}$ є зі собою бігуново спряжені, а точки AA_1 $A'A'_1$ є вершками одного бігунового чотиростінника, а точки BB_1 $B'B'_1$ другого. Позаяк прямі $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ лежать на одній площі, проте прямі $\overline{A'A'_1}$, $\overline{B'B'_1}$ мусять рівнож лежати на одній площі (Π), а їх точка пересїчи (P') є бігуном площі Π', на якій лежать попередні прямі $[\overline{AA_1}, \overline{BB_1}]$, подібно як точка P є бігуном площі Π', визначеної прямими $\overline{A'A'_1}, \overline{B'B'_1}$. З сего слїдує, що грана $[\Pi\Pi^1] \equiv r_1$ тих площ є бігуново спряжена з прямою $\overline{PP'} \equiv r$, яка сполучує точки P і P'; ті отже прямі (r, r_1) перетинають так бігуново спряжені $\overline{AA_1}$ і $\overline{A'A'_1}$, — як рівнож бігуново спряжені $\overline{BB_1}$ і $\overline{B'B'_1}$. Нетрудно однак запримітити, що коли одна пара спряжених бігунових перетинає другу пару спряжених бігунових, тоді ті дві пари становлять протилежні грани бігунового чотиростінника. На підставі отже повисше розважаного свійства бігунового чотиростінника мусять інволюциї на прямих $\overline{AA_1}$ і $\overline{BB_1}$ посїдати такий сам характер як на s і s_1, отже як і на спряжених бігунових r і r_1; так само інволюциї на прямих t, t_1; $\overline{BB_1}$, $\overline{B'B'_1}$ посїдають такий сам характер як інволюциї на r і r_1; ввиду сего рід інволюций на спряжених бігунових s, s_1 є згідний з родом тих-же на спряжених бігунових t і t_1. А що прямі s, s_1; t, t_1 є довільно принятими парами бігунових спряжених в данім бігуновім системі, проте бачимо, що:

„Інволюциї спряжених бігунів [зглядно бігуново спряжених площ] на всїх парах бігуново спряжених прямих — є або всї рівноіменні (обі еліптичні або обі гіперболїчні) або всї ріжноіменні одна еліптична, друга гіперболїчна)". — Се властне доказує, що певний бігуновий систем може посїдати бігунові чотиростінники тільки одного з трьох родів, які ми вичислили на сторонї 20 і 21.

Ввиду сего дадуть ся розріжнити три роди бігунових системів в просторі:

„*А*) Бігуновий систем, що посїдає тілько такі бігунові чотиростінники, у яких на одній парі протилежних гран є інволюциї спряжених бігунів елїптичні, а на двох иньших парах гіперболїчні."

„*Б*) Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростінники, у яких кожда пара протилежних гран посїдає ріжні інволюциї спряжених бігунів, одну еліптичну і одну гіперболїчну."

„*В*) Бігуновий систем, що посїдає самі бігунові чотиростїнники, у яких всї грани є основами елїптичних інволюций спряжених бігунів.“

3. Нетрудно буде доказати, що:

„Місцем ґеометричним подвійних точок інволюцийних рядів спряжених бігунів є: в бігуновім системі *А*) поверхня II-го степеня просточертна, в системі *Б*) поверхня II-го ст. кривочертна, а в системі *В*) поверхня II-го ст. мнима.“

„Поверхнї ті посїдають те свійство, що бігунові площі їх точок є площами стичними в тих-же точках; проте поверхнї ті можна уважати за обвідні подвійних площ інволюцийних вязок бігуново спряжених площ.“

Коли іменно в бігуновім системі *А*) возьмемо під розвагу пару прямих бігуново спряжених s і s_1, на яких інволюцийні ряди спряжених бігунів є гіперболічні о подвійних точках F і F' зглядно F_1 і F'_1, то нетрудно буде можна запримітити, що пряма $\overline{FF_1} \equiv l$ є сама зі собою бігуново спряжена [с. з. площі бігунові всїх єї точок переходять через її саму]. Бо іменно бігунова площа точки F переходить через її саму і через пряму s_1, так само бігунова площа точки F_1 переходить через ту точку F_1 і пряму s. Отже грана тих двох площ сходить ся з прямою, яка сполучує точки F і F_1. — З тих самих причин є рівнож самі зі собою спряжені прямі: $\overline{FF'_1} \equiv l_1$, $\overline{F'F_1} \equiv g_1$, $\overline{F'F'_1} \equiv g$.

Дальші прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуновім системі *А*) дадуть ся визначити в слїдуючий спосіб:

Коли довільна пряма s_x перетинає винайдені прямі l і l_1 самі зі собою бігуново спряжені в точках X і Y_1, то бігун Y площі $[Y_1\ l]$ мусить лежати на прямій l і є точкою пересїчи тої прямої з прямою s'_x бігуново спряженою з прямою s_x; так само бігун площі $[y\ l_1]$ сходить ся з точкою Y_1, яка є точкою пересїчи прямої l_1 з прямою s_x. З сего слїдує, що грана тих площ, се є пряма $\overline{YY_1}$ є сама зі собою бігуново спряжена. Коли площа $[l\ Y_1]$ обертає ся около прямої l і описує вязку площ, тодї єї бігун Y описує ряд (Y) на прямій l, який є проєктивний з тою вязкою площ, отже і з рядом (Y_1). З сего слїдує, що пряма $\overline{YY_1}$ сама зі собою бігуново спряжена сполучує відповідні точки проєктивних рядів (Y) і (Y_1), се значить ся: они є гранами відповідних елементів двох проєктивних вязок $[l\ Y_1]$ і $[l_1\ Y]$, творять отже просточертну поверхню

II-го ст. $F^{(2)}$, що малисьмо як-раз для бігунового системуА) доказати.

З повисшого розумованя слїдує рівнож, що та поверхня $F^{(2)}$, є обвіднею подвійних елементів вязок бігуново спряжених площ сего бігунового системү.

Що тичить ся бігунового системү $Б)$, то в нїм кожда пара бігуновоспряжених прямих має ріжні інволюциї бігунів спряжених, а іменно на однїй прямій та інволюция є еліптична, а на другій гіперболїчна, при чім перша з тих прямих є осню інволюцийної вязки гіперболічної бігуново спряжених площ, а друга інволюцийної вязки еліптичної таких-же площ. — З сего слїдує, що так поверхня утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених, як рівнож поверхня обвинена подвійними площами вязок інволюцийних бігуново спряжених площ, — є II-го степеня. Позістає тілько доказати що ті поверхнї є ідентичні і кривочертні.

Нехай отже s_e і s_p будуть парами бігуново спряжених прямих, а F і F' точками подвійними інволюцийного ряду гіперболїчного бігунів спряжених на s_p, то площа $[s_e\, F] \equiv \Pi_r$ є бігуновою точки F, а рівночасно подвійною площею вязки бігуново спряжених площ о оси s_e. Всї прямі, які переходять через F є основами гіперболічно-інволюцийних рядів спряжених бігунів, які мають одну подвійну точку в F, а другу в другій точцї пересїчи з шуканою поверхнею. Прямі бігуново спряжені з сими прямими творять площу Π_t, яка посїдає інволюцийні ряди спряжених бігунів — тілько елїптичні, наслїдком чого площа Π_t, крім точки F, не може посїдати більше дійсних точок спільних з поверхнею, що утворена подвійними точками інволюцийних рядів бігунів спряжених. Ся площа є стичною до згаданої поверхнї в точцї F. — Вязка інволюцийна спряжених бігунових, які переходять через F і лежать на площі Π_t, будучи перспективою еліптично-інволюцийною ряду спряжених бігунів на прямій s_e, є рівнож елїптична, а єї подвійні прямі мнимі представляють прямі, після яких площа Π_t перетинає дану поверхню.

А позаяк так само річ має ся з кождою подвійною точкою (F) гіперболїчно-інволюцийних рядів (s_p) спряжених бігунів і з єї бігуновою площею, проте дійсно, поверхня, утворена через ті подвійні точки є ідентичною з поверхнею, обвиненою подвійними площами інволюцийних вязок бігуново-спряжених площ — і є кривочертна.

В бігуновім системі $В)$ всї точки, котрих бігунові площі через них переходять, — є мнимі; подібно є мнимі всї площі, яких бігуни лежать на них самих. А так як на кождій прямій є такі дві мнимі точки, як рівнож кожда пряма є осию двох таких мнимих площ, тому творять они мниму поверхню II-го степеня.

Нетрудно вичитати рівнож з повисших фіґур, що бігунові системи повисших поверхней є ідентичні з бігуновими системами щойно розслїджуваними, — так, що сї поверхнї є провідними тихже системів.

Замітка: Особлива точка (M) бігунового системy Σ, що є бігуном площі в безконечности, є осередком сего системy; площі і прямі, що переходять через точку M, зовемо дїяметральними площами зглядно промірами того системy.

Дїяметральні площі, які є головними площами бігунової вязки, приналежної до осередка M в тім бігуновім системі Σ, є рівнож головними площами того системy (Σ).

III.

1. На особливу увагу заслугують в бігуновім системі просторнім Σ такі пари бігуново спряжених прямих, що є до себе прямовісні. Загал всїх пар тих прямих носить назву „комплексу осий“ бігунового системy Σ і его провідної поверхнї $F^{(2)}$; комплекс сей відповідає бігуново в даній бігуновім системі Σ — сам собі.

Коли дві прямі e і e_1 бігуново зі собою спряжені в бігуновім системі Σ є до себе прямовісні, тодї через e_1 переходить одна тільки площа ε прямовісна до e, а её бігун E містить ся на e

Пряму e названо „осию спряженою“ з площею ε, точку E её „бігуном“, точку $[e\,\varepsilon]$ её „основою“, а площу ε „нормальною площею спряженою з осию e.“

Кожда вісь e комплексу посїдає тільки один бігун E і одну спряжену з нею площу нормальну ε. Виїмок становлять головні оси бігунового системy Σ, які мають безконечне число бігунів і тількож спряжених нормальних площ. Таксамо кожда площа ε посїдає тільки одну з нею спряжену вісь -e-, через яку переходять всї площі бігуново спряжені з ε і до неї прямовісні; однак для головної площі системy Σ є всї до неї прямовісні прямі — її спряженими осями. — Безконечно далека площа має за спряжені оси всї проміри бігунового системy Σ. — Ввиду сего нетрудно запримітити, що:

„До комплексу осий певного бігунового системy (Σ) і его провідної поверхнї $F^{(2)}$ зачисляємо: головні оси всїх бігунових системів плоских і бігунових вязок того системy Σ, всї нормальні і проміри провідної поверхні $F^{(2)}$, прямі безконечно далекі і всї прямі, що є прямовісні до головних площ або лежать на сих послїдних.“

З сего слїдує між иньшим, що: „Довільна точка P в просторі є бігуном одної оси, а взагалї основою трьох осий, що перетинають ся прямовісно.“

Ті три оси є головними осями бігунової вязки, яка приналежить до точки P в бігуновім системі Σ. Коли точка P лежить на провідній поверхнї $F^{(2)}$, тодї єї нормальна в P є одною з тих трьох осий, а дві иньші є прямими нормальними інволюцийної вязки спряжених стичних поверхнї $F^{(2)}$ в тій точцї P. Єсли та інволюция є прямокутна або єсли бігунова вязка в точцї P є оборотова, і має оборотовий стіжок за провідну, тодї крім нормальної вглядно оси обороту виступає вязка прямих, для яких точка P є основою.

2. Всї площі, бігуново спряжені з певною площею ε і до неї прямовісні, переходять через єї вісь e; в тих площах лежать оси, спряжені з осями, які містять ся на площі ε. А що ті послїдні, як звісно з I части ст. 18, обвивають параболю, а на кождій площі вязки (e) переходить через бігун E площі ε по дві прямі бігуново спряжені і до себе нормальні, проте легко буде можна справдити слїдуюче твердженє:

1° „Оси бігунового системи Σ, який лежить на певній площі ε, обвивають параболю, котра дотикає головних площ того системи. Нормальні площі, спряжені з тими осями, переходять через вісь e, спряжену з площею ε, а їх бігуни лежать на прямій e_1, бігуново спряженій з e, а яка є стичною до сеї параболї. Що найбільше дві з тих осий є нормальними провідної поверхнї $F^{(2)}$, іменно в точках, в яких її e_1 перетинає.“

2° Оси бігунового системи Σ, яка переходять через точку E, творять взагалї рівнобічний стіжок II-го степ., котрий має один промір бігунового системи і по одній нормальній до кождої головної площі того системи. Позаяк що дві з тих осий перетинають ся в точцї E, проте їх бігуни лежать по два на щораз-то иньшій оси. Місцем ґеометричним тих бігунів є проте крива просторна (перехрестна) III-го степеня, якої тятиви є осями, а після якої перетинають ся що два повисші рівнобічні стіжки. Ся крива переходить через точку E, бігуни головних площ і осередок системи і через такі точки провідної поверхнї $F^{(2)}$, в яких нормальні до $F^{(2)}$ переходять через точку E.“

Нетрудно рівнож запримітити, що: „Всї оси, які лежать на діяметральній площі бігунового системи Σ, творять вязку промірів і вязку рівнобіжних прямих; і взаїмно: всї оси, які мають той сам напрям, лежать на одній діяметральній площі системи Σ."

Коли іменно Π є площею діяметральною, тодї єї бігун P лежить в безконечности на промірі з нею спряженім. Прямі рівнобіжні, поведені в площі Π прямовісно до того напряму, є осями бігунового системи Σ, а так само прямі з ними бігуново спряжені, що переходять через P і творять другу діяметральну площу. З сего рівночасно слїдує:

1⁰ „Оси, що переходять через дві точки проміру, є парами рівнобіжні; оба стіжки, до яких они належать, стикають ся вздовж того проміру і переходять через той сам безконечно далекий переріз стіжковий".

2⁰ „Всї параболї, обвинені через оси, які лежать в рівнобіжних площах, є перерізами одного і того самого стіжка, якого творячі є промірами бігунового системи Σ."

3. Кожда пряма, поведена через P на головній площі $-\alpha-$ системи бігунового Σ, є осию того системи, проте стіжок, на якім лежать всї оси, що переходять через точку P, розпадає ся на дві плоскі вязки прямих. Коли отже e_x буде довільною осию, яка перетинає площу $-\alpha-$ в точцї P під кутом острим, тодї друга вісь тої вязки буде лежати на площі, якою мечемо прямовісно ту вісь на площу α. Бо в тій площі лежать крім e_x еще дві оси, а іменно слїд тої площі на площі α і прямовісна до α в точцї P.

Отже:

„Всї оси, які переходять через певну точку P головної площі α, творять дві вязки I-го ряду, з яких одна лежить в α, а друга в площі прямовісній до α. Бігуни сеї послїдної вязки лежать на прямій мрямовісній до α."

Рівночасно маємо твердженє:

„Коли пряма $-n-$ є прямовісна до головної площі α, то всї оси, які перетинають пряму n, творять стіжки II-го ст., котрих вершки знаходять ся на прямій n, а які посїдають з площею α спільну рівнобічну гіперболю."

Іменно, котрийнебудь з повисших стіжків перетинає ся з площею α після рівнобічної гіперболї, яка переходить через точку $[n\ \alpha]$ і осередок бігунового системи Σ, а якої одна асимптота є рівнобіжна, друга прямовісна до иньшої головної площі (β). Однак після попередного твердженя кожда пряма, яка сполучує певну точку тої гіперболї з довільною точкою прямої $-u-$ є осию бігунового системи Σ.

Коли площа ε обертає ся наоколо свого слїду на головній площі α, тодї параболя, обвинена осями, що на нїй находять ся, описує параболїчний валец, прямовісний до площі α; бо кожда стична тої параболї описує около своєї точки пересїчи з площею α вязку осий, якої площа є прямовісна до α. Отже:

„Оси, що перетинають певну пряму g, лежачу на головній площі α, обвивають в загалї параболїчний цилїндер, прямовісний до α. Коли однак пряма g є прямовісна до другої головної площі β, тодї ті оси перетинають пряму g_1, яка лежить на площі β і прямовісну до α.“

4. Повисші розумованя доказують, що:

„Комплекс осий є визначений, скоро є дані его головні площі і одна его вісь (e).“

Однак з твердженя на ст. 19 і 20 слїдує, що через головні площі, довільну точку E на оси e, приняту за бігун довільної площі ε, прямовісної до e, буде бігуновий систем в просторі докладно визначений, який посїдає той сам комплекс осий. А що так точка E як рівнож слїд $[e\,\varepsilon]$ можуть на прямій e заняти безконечно много положень, проте слїдує:

„Істнує ∞^2 бігунових системів співосевих і стілько співосевих поверхний II-го ст., що посїдають той сам комплекс осий.“

5. Нехай в бігуновім системі Σ буде дана довільна площа ε, єї бігун E і з нею спряжена нормальна e (вісь). Коли грану площі ε і площі головної α системі Σ означимо через p, а точку пересїчи оси e з тою площею α через P, то легко буде доказати, що через тую точку (P) переходять всї оси (e) спряжені з площами, переходячими через пряму p. Метаючи іменно з точки P бігуни тих площ і ведучи до них прямовісні, одержимо дві вязки прямих, проєктивні з тою вязкою площ, отже проєктивні зі собою. Однак ті дві вязки прямих мають три прямі спільні, а іменно пряму e, пряму прямовісну до площі α і пряму прямовісну до прямої p, з чого слїдує, що ті дві вязки є ідентичні.

Ся вязка осий, переходячих через точку P, визначує з вязкою площ, спряжених з тими осями і переходячими через пряму p — коло. Отже:

„Основи всїх осий, які перетинають головну площу α в точцї P, лежать на колї, яке переходить через точку P і перетинає прямовісно пряму p, що лежить на площі α, а через яку переходять всї нормальні площі, спряжені з тими-ж осями. Коло то має свій осередок на площі α.“

В подібний спосіб як з прямою p є спряжена точка P — так само з кождою иньшою прямою q на головній площі α є спряжена точка Q тої площі. Нетрудно однак запримітити, що коли пряма q переходить тягло через точку P, то точка Q описує пряму p. Бо в тім случаю вісь спряжена з площею $[e q]$ мусить лежати на площі ε перетинати площу α в точці Q прямої p. З того слїдує, що:

„Кожда площа (ε) і з нею спряжена вісь (e) в бігуновім системі Σ визначують на головній площі (α) того системи пару спряжених елементів (бігунову і бігун) певного бігунового системи плоского (U), якого головні оси сходять ся з головними осями системи Σ."

Криву провідну сего бігунового системи плоского (u) названо „кривою огнищевою", а єї точки „огнищевими точками" просторного бігунового системи Σ і єго провідної поверхнї $F^{(2)}$.

Легко однак запримітити, що з трьох огнищевих кривих бігунового системи Σ дві є завсїгди дїйсні, а одна мнима.

До огнищевих кривих того бігунового системи Σ належить рівнож мниме коло в безконечности. Іменно площа в безконечности перетинає кожду площу ε і з нею спряжену вісь e після пари спряжених елементів бігунового системи плоского, якого мет з довільної точки простору можна доконати при помочи прямовісної бігунової вязки. Отже провідною кривою сего системи є коло мниме в безконечности.

Позаяк ті огнищеві криві є визначені, скоро є даний комплекс осий, проте з твердженя на ст. 33 слїдує, що:

„Бігунові системи, що посїдають той сам комплекс осий, є співогнищеві, а їх провідні поверхнї творять громаду співогнищевих поверхний."

Ввиду сего свійства співогнищевих поверхний слїдують прямо з повисше пізнаних свійств їх комплексу осий.

Про бігунового-зеровий систем.

1. Нехай дані будуть три точки A, B, C просторної кривої III-го степ. (C^3) і в тих точках єї тїсно-стичні площі α, β, γ і єї стичні t_a, t_b, t_c.

Звісно, що:

1^0 Кожда з тих точок є вершком стіжка II-го степ., яким мечемо криву C^3.

2^0. Стичні площі пр. до стіжка $A(c^3)$ вздовж творячих AB або AC переходять відповідно через стичні t_b зглядно t_c кривої c^3 в точках B зглядно A.

З сего слїдує:

3°. Стична площа стіжка $A(c^3)$ вздовж творячої t_a сходить ся з тісно-стичною площею (α) кривої c^3 в точці А.

Коли возьмемо під увагу трестїнник $A(B, C, t_a)$, вписаний в стіжок $A(c^3)$, і означимо площу, яка сполучає точки A, B, C, через ε, тодї при помочи твердженя Pascala легко є доказати, що грана $[\alpha\,\varepsilon]$ площ α і ε і точки $[t_c.\ B\,t_a]$, $[t_b.\ C\,t_a]$ пересїчи стичних t_c, t_b з площами, які сполучують точки B, C зі стичною t_a, лежать на однїй площі ε_1.

З тої самої причини лежить грана $[\beta\,\varepsilon]$ площ β і ε і точки $[t_c.\ A\,t_b]$, $[t_a.\ C\,t_b]$ на однїй площі ε_2, — як рівнож грана $[\gamma\,\varepsilon]$ площ γ і ε — і точки $[t_a.B\,t_c]$, $[t_b.A\,t_c]$ лежать на площі ε_3.

Позаяк однак площі $[A\,t_c]$, $[B\,t_a]$, $[C\,t_b]$ перетинають ся в однїй точцї Q, яка є спільна для всїх трьох площ ε_1, ε_2 і ε_3, а площі $[A\,t_b]$, $[B\,t_c]$, $[C\,t_a]$ перетинають ся в точцї Q_1, яка є рівнож спільна для тих площ ε_1, ε_2, ε_3, проте ті площі $(\varepsilon_1$, ε_2, $\varepsilon_3)$ мусять перетинати ся після одної прямої. Та пряма перетинає площу ε в точцї E, через яку переходять тїсно-стичні площі α, β, γ.

Є то основне твердженє Chasles'a, яке звучить:

„Тїсно-стичні площі α, β, γ в трьох точках A, B, C просторної кривої III-го ст. c^3 перетинають ся в однїй точцї E, яка лежить на площі ε, що сполучує ті точки стичности $[A, B, C]$."

Точка E, в якій перетинають ся три тїсно-стичні площі α, β, γ просторної кривої III-го ст. c^3, названо „бігуном" площі ε, яка сполучує точки A, B, C стичности тих площ. І взаїмно: площу ε названо „бігуновою" точки E, з огляду на криву c^3.

Тому повисше твердженє Chasles'a можна висказати слїдуючо:

„Бігун $[E]$ довільної площі (ε), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на тій-же площі (ε)". І взаїмно:

„Бігунова площа (ε) довільної точки (E), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, переходить через тую-ж точку."

А відтак:

„Бігун тїсно-стичної площі до кривої c^3 сходить ся з точкою стичности тоїж площі."

2. З повисших тверджень слїдує безпосередно:

1°. „Просторна крива III-го ст. c^3 є рівночасно кривою третої кляси, се значить, що з довільної точки (E) дадуть ся повести до кривої c^3 що найбільше три площі тїсно-стичні."

Бо коли-би через E можна було повести чотири площі тїсно-стичні до кривої c^3 в точках A, B, C, D, тодї на площі $(A\,B\,E)$ мусїли-б лежати і точки C, D, що бути не може, бо довільна площа не посїдає з кривою c^3 більше як три спільні точки.

2^0. „Чотири точки просторної кривої III-го ст. c^3 творять один чотиростінник, а їх тісно-стичні площі творять другий чотиростінник. Кождий з тих чотиростінників є в другім вписаний, а рівночасно описаний."

Коли іменно є дані чотири точки A, B, C, D кривої c^3 і тісно-стичні площі в тих точках α, β, γ, δ, тоді угол $[\beta\gamma\delta] \equiv A_1$ чотиростінника $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ мусить лежати на стіні $[B\,C\,D]$ першого чотиростінника $A\,B\,C\,D$, бо точка A_1 є бігуном площі $[B\,C\,D] \equiv \alpha_1$. І взаїмно, площа α переходить через свій бігун A, що є углом чотиростінника $A\,B\,C\,D$. Дійсно отже, вершки першого чотиростінника лежать на стінах другого, а стіни першого переходять через вершки другого.

Означім відтак вершки другого чотиростінника через $[\gamma\delta\,\alpha] \equiv B_1$, $[\delta\,\alpha\,\beta] \equiv C_1$, $[\alpha\,\beta\gamma] \equiv D_2$, тодї прямо з погляду на ті чотиростінники читаємо, що кожда з прямих $[A\,B_1]$. $[B\,A_1]$, $[C\,D_1]$, $[D\,C_1]$ перетинає всї чотири прямі: $[A\,B]$, $[\alpha\,\beta]$, $[C\,D]$, $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що послїдні чотири прямі належать до одного системy творячих певного гіпербольоїда — або що ті прямі мають взглядом себе „гіпербольоїдальне" положенє. — Так само гіперболоїдальне положенє мають чвірки прямих: $[A\,C]$, $[\alpha\,\gamma]$, $[B\,D]$, $[\beta\,\delta]$; $[B\,C]$, $[\beta\,\gamma]$, $[A\,D]$, $[\alpha\,\delta]$.

3. Поведім через довільну точку P дві тісно-стичні площі α, β до просторної кривої III-го степеня c^3, яких точками стичности суть точки A, B; то бігунова площа точки P, з огляду на криву c^3, сполучує точку P з точками стичности A і B, се є $\Pi \equiv [P.AB]$.

Коли через точку P переходить иньша площа Π_1, що перетинає криву c^3 в точках C, D, в яких тісно-стичні площі є γ, δ, тодї бігун P_1 площі Π_1 лежить так на площі Π_1 як рівнож на площах γ і δ, отже є їх спільною точкою: $P_1 \equiv [\Pi_1\ \gamma\ \delta]$.

Позаяк чотири площі Π, Π_1, α, β переходять через ту саму точку P, проте грана $[\Pi\ \Pi_1]$ площ Π і Π_1 перетинає грану $[\alpha\,\beta]$ лощ α, β, а відтак пряму $[A\,B]$, бо лежить з нею в однїй площі, Π, як рівнож пряму $[C,\ D]$, бо лежить з нею на площі Π_1. Однак на підставі свійства, доказаного при кінци попередного уступа мусить та сама пряма $[\Pi\ \Pi_1]$ перетинати і четверту пряму $[\gamma\,\delta]$. З сего заключаємо, що площі Π, Π_1, γ, δ перетинають ся в однїй точцї, с. з. що бігун P_1 площі Π_1 лежить на площі Π.

Отже:

„Коли площа Π_1 переходить через точку P, тодї єї бігун P_1, з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, лежить на бігуновій площі Π точки P, з огляду на ту криву."

З сего слїдує твердженє:

„Бігунові площі всїх точок певної площі, з огляду на просторну криву III го ст. c^3, переходять через сталу точку тої площі, яка є бігуном тої площі, з огляду на криву c^3."

І взаїмно:

„Бігуни всїх площ, які переходять через одну точку, з огляду на криву c^3, лежать на однїй площі, що переходить рівнож через тую точку, а яка є бігуновою тої точки, з огляду на c^3."

4. Нехай будуть данї дві площі Π і Π_1 і їх бігуни P і P_1, з огляду на просторну криву III-го ст., то бігунові площі, з огляду на c^3, всїх точок, які лежать на грани площ Π і Π_1, мусять переходити рівнож через P і P_1, с. є через пряму $[P P_1]$, що сполучає ті точки. І взаїмно, бігунові площі точок, що лежать на прямій $[P P_1]$ переходять через пряму $[\Pi \Pi_1]$. Отже:

„Бігунові площі, з огляду на криву просторну III-го ст. c^3, всїх точок, що лежать на однїй прямій (g), переходять через иньшу пряму (g_1)."

І взаїмно:

„Бугуни всїх площ, що переходять через пряму (g_1), з огляду на криву c^3, лежать на иньшій прямій (g)."

Пару таких прямих g і g_1 названо „прямими бігуново зі собою спряженими", з огляду на просторну криву III го ст. c^3. — Коли отже точка P перебігає пряму g, тодї єго бігунова площа, з огляду на c^3, описує вязку площ, що має за вісь пряму g_1 і є перспективічна з рядом точок (P), — отже з тим рядом проєктивна.

5. Повисші розважаня доказують, що:

„Точки, площі і прямі в просторі — дадуть ся при помочи кривої просторної III го ст. c^3 — в той спосіб спрягчи, що кождій точцї (P) відповідає певна означена площа (Π) [єї бігунова], що переходить через тую точку і взаїмно, кождій площі (Π) відповідає певна означена, на нїй лежача точка (P) [єї бігун], а кождій прямій (s) відповідає иньша пряма (s_1) [пряма бігуново спряжена з s]. — В той спосіб одержимо систем точок, площ і прямих в просторі, який посїдає основні свійства бігунового системү, однак в питомий спосіб змодифіковані. Той систем названо „бігуново-зеровим"; має він просторну криву III-го ст. c^3 за провідну."

„Точка кривої c^3 і єї тїсно-стична площа, тятива тої кривої і грана площ тїсно-стичних в точках, в яких та тятива перетинає криву c^3, відповідають собі бігуново в тім бігуново - зеровім системі."

„Кожда стичва (t) кривої c^3 відповідає сама собі в бігуново-зеровім системі тої кривої.“

Бо дійсно стічній (t), яка сполучує два безпосередно по собі слідуючі точки кривої c^3, відповідає бігуново грана двох тїсно-стичних площ в тих точках, отже та сама пряма.

6. Приймімо в бігуново-зеровім системі просторної кривої c^3 довільну точку Q і через її переходячу площу Π_p.

Бігунова площа Π_q точки Q мусить переходити через тую точку Q і бігун P площі Π_p; проте точки P і Q лежать на грани їх бігунових площ Π_p і Π_q, с. з. що прямі бігуново зі собою спряжені $[\Pi_p . \Pi_q]$ і $[P Q]$ накривають ся. — Прямій g на площі Π_p, що не переходить через точку Q відповідає в тім системі пряма g_1, яка переходить через точку P, однак не лежить на площі Π_q.

Коли точка X описує на прямій ряд точок, тодї его бігунова площа $[g_1 \ X] \equiv \xi$, обертаючи ся около прямої g_1, описує вязку площ, яка є перспективічна з тим рядом. А що з прямою $[Q X] \equiv s$, яка сполучує точки Q і X є бігуново спряжена грана бігунових площ тих точок, т. є. пряма $[\Pi_q \ \xi] \equiv s_1$, проте з повисшого розумованя слїдує свійство:

„Коли певна пряма s, обертаючи ся около точки Q, описує вязку прямих на площі Π_p, що переходить через тую точку Q, тодї пряма s_1 бігуново спряженя з прямою s в бігуново-зеровім системі, визначенім з огляду на c^3, описує вязку прямих на площі Π_q, бігуновій точки Q, — около бігуна P площі Π_p, з огляду на той-же систем. Обі ті вязки є проективні, а грана їх площ $[\Pi_q \ \Pi_p] \equiv [P Q]$ є їх спільною прямою.“

Коли пряма g лежить на площі Π_p і переходить через бігун P тої площі, тодї пряма g_1, бігуново спряжена з -g-, з огляду на бігуново-зеровий систем кривої c^3, мусить переходити через P і лежати на Π_p; однак площа Π' точки P', що лежить на прямій g, переходить через ту точку P' і точку P і перетинає площу Π_p після прямої g_1, бігуново спряженої з g; з того слїдує, що обі прямі g і g_1, накривають ся. Отже:

„Кожда пряма на довільній площі Π_p, яка переходить через бігун тої площі (P), з огляду на просторну криву III-го ст. c^3, є сама зі собою спряжена, з огляду на ту криву.“

З повисших твердженъ слїдує загальна увага о прямих зі собою спряжених в бігуново зеровім системі;

„Дві прямі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі є в загалї перехрестні; коли однак перетинають ся, тодї накривають ся і дають пряму саму зі собою бігуново спряжену або т. з. пряму провідну бігуново-зерового систему."

Коли однак уважати будемо пряму g за місце ґеометричне, описане точкою X, а пряму g_1 бігуново з g спряжену за вісь вязки площ, визначеної бігуновою площею ξ точки X, то повисше доказана проєктивність ряду (X) і вязки (ξ) не буде знищена, коли прямі g і g_1 накривають ся. — Звідси слідує твердженє:

„Пряму саму зі собою бігуново спряжену в бігуново-зеровім системі можна уважати: раз за основу ряду (X), другий раз за вісь вязки площ (ξ) бігунових точок того ряду; ті оба утвори є проєктивні."

7. Нетрудно буде однак доказати, що:

„Кожда пряма l, що перетинає дві прямі бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі — є сама зі собою спряжена в тім системі."

Коли іменно та пряма (l) перетинає бігуново спряжені прямі g і g_1 в точках P і P_1, тоді бігуновою площею точки P є $\Pi \equiv [Pg_1]$, а точки P_1 є $\Pi_1 \equiv [P_1 g]$. Обі ті площі перетинають ся після прямої $[\Pi \Pi_1]$, що є бігуново спряженя з прямою $[PP_1]$, с. є. сама зі собою.

А що бігун якоїнебудь площі, переходячої через пряму l, яка є сама зі собою бігуново спряжена, лежить на тійже прямій, проте маємо твердженє:

„Бігун площі Π, яка перетинає прямі бігуново-спряжені g і g_1 в точках P і P_1, лежить на прямій l, що сполучає ті точки."

І взаїмно:

„Коли через довільну точку P попроваджу таку пряму, котраби перетинала дві прямі g і g_1 бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, тоді через ту пряму мусить переходити рівнож бігунова площа (Π) тої точки P."

З тих твердженъ слідує свійство:

„Коли в бігуново-зеровім системі дані є дві пари спряжених бігунових g і g_1, g_2 і g_3, то пряма l, яка переходить через довільну точку P прямої g і перетинає прямі g_2 і g_3, мусить рівнож перетинати і пряму g_1."

Та пряма l є іменно сама зі собою бігуново спряжена, проте бігунова площа єї точки P переходить через її саму і через пряму g_1. З сего бачимо, що прямі g, g_1, g_2 і g_3 мають зглядом себе гіпербольоїдальне положенє.

Отже:

„Якінебудь дві пари спряжених прямих в бігуново-зеровім системі мають гіпербольоїдальне положене, с. з. они належать до одного системy творячих гіпербольоїда (H^2), якого творячі другого системy є прямими спряженими самими зі собою в тім бігуново-зеровім-системі."

Нехай довільна площа Π перетинає повисший гіпербольоїд $H^{(2)}$ після кривої II-го ст. c^2, а єї творячі g, g_1 ; g_2, g_3 в двох парах точок S і S_1 ; T і T_1, то точка пересічи прямих $[SS_1]$ і $[TT_1] \equiv P$ є бігуном площі Π в данім бігуново-зеровім системі. Кожда пряма, яка переходить через точку P, перетинає криву c^2 в двох точках X і X_1 через які мусять переходити дві творячі x і x_1 гіпербольоїда $H^{(2)}$; ті творячі (x і x_1) є спряженими прямими в данім бігуново-зеровім системі. Коли іменно хочемо для прямої x вишукати єї бігуновy, треба повести через прямі g, g_1, x гіпербольоїд $H^{(2)}$ і визначити таку творячу того самого системy, до якого належать прямі g, g_1, x, якаби перетинала площу Π в точції X_1, лежачій на прямій PX; — тою творячою мусить бути пряма x_1. Тим способом можна одержати безконечне число пар бігуново спряжених прямих (x і x_1) в данім бігуново-зеровім системі, які належать до одного системy творячих гіпербольоїда $H^{(2)}$.

Ті прямі укладають ся парами інволюторично, бо точки X, X_1 на кривій c^2 творять ряд інволюцийний, якого подвійними точками є точки стичности стичних, попроваджених з точки P до кривої c^2. Ті точки є дїйсні, коли P лежить на вні кривої c^2, а мнимі, коли P лежить в нутрі c^2. В першім случаю є в системі прямих x, x, дві прямі самі зі собою бігуново спряжені в бігуново-зеровім системі, а в другім случаю прямі самі зі собою спряжені в системі прямих x, x, — є мнимі.

З сего розумованя слїдує твердженє:

Коли є дані дві прямі самі зі собою спряжені в бігуново-зеровім системі, які не перетинають ся в просторі, тодї є безконечне множество иньших прямих самих зі собою спряжених, що перетинають обі перші; ті послїдні творять один систем творячих одно-поволокового гіпербольоїда. Другий систем творячих того гіпербольоїда, до якого належать обі приняті, самі зі собою спряжені прямі, містить безконечно много пар прямих бігуново спряжених в тім-же бігуново-зеровім системі, а які творять з принятими гармонїчні ґрупи."