Причинок до теорії стіжкових перекроїв.

(Ein Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte).

НАПИСАВ

Др. Микола Чайковський.

§ 1.

Коли стіжкові перекрої будемо вважати ґеометричними місцями всїх точок, для яких відношенє віддалень від постійної точки (огнища) й постійної прямої (провідної лїнії) є постійне, то звідси можна випровадити богато прикмет, спільних всїм стіжковим перекроям. Поминаючи всї ті прикмети, як загально звісні, хочемо в нинїшній нотатцї звернути увагу на дві річи: 1) коли приймемо віддаленє огнища від вершка постійним і піддамо чисельну ексцентричність $\left(\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\right)$ змінам від 0 до ∞, яку частину площі займе громада стіжкових кривих? і 2) як заховують ся провідні лїнїї еліпс, коли ε буде так само зміняти ся, і коли приймемо відношенє огнища від вершка, як попередно, постійним?

Перед тим одначе випровадимо всї величини, потрібні для теорії стіжкових перекроїв.

§. 2.

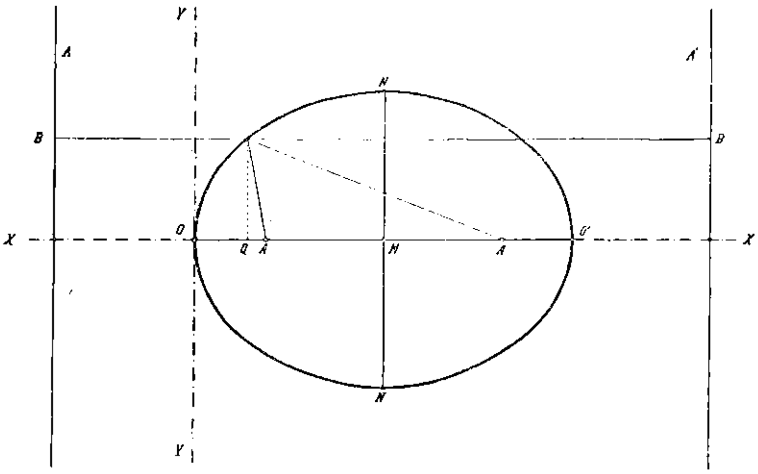
Нехай буде A огнищем, Λ провідною лїнією стіжкових перекроїв; тодї дефініційне рівнанє всїх точок P бажаних кривих є:

$$\frac{AP}{PB} = \varepsilon, \tag{1}$$

де B є точкою, в якій трафляє провідну лінїю нормальна, поведена з P (рис. 1). З того дефініційного рівнаня одержимо аналїтичне рівнанє стіжкових перекроїв

$$y^2 = 2c\,(\varepsilon + 1)\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2, \qquad (2)$$

а саме вершкове рівнанє, бо відносимо його до сорядних, яких осию X є нормальна з огнища до провідної лінїї, а вісь Y переходить через ту точку на оси X, яка ділить віддаленє огнища від провідної лїнїї в відношеню $\varepsilon : 1$. Коли O є вершком кривих, а заразом і початком сорядних, то $c = OA$ — т. зн., се віддаленє огнища від вершка.



На основі рівнаня (2) можемо перевести повну дискусію стіжкових перекроїв, коли будемо вважати ε змінним параметром.

Іменно:

для $\varepsilon = 0$ маємо коло;
„ $\varepsilon < 1$ „ елїпсу;
„ $\varepsilon = 1$ „ параболю;
„ $\varepsilon > 1$ „ гіперболю;
„ $\varepsilon = \infty$ „ пряму лінїю, а саме вісь Y; її рівнанє є: $x = 0$.

Для відємних ε криві є нездефінїовані.

§ 3.

Тепер шукаємо симетрії наших кривих; в тій цїли знаходимо точки пересїчи кривих з осию X; їх є дві: вершок O і вершок O'

в віддаленю $x_0 = \frac{2c}{1-\varepsilon}$; для $\varepsilon < 1$ лежить він на право від O, для $\varepsilon = 1$ є в безконечности, а для $\varepsilon > 1$ по лївій стороні від O, бо тоді є $x_0 < 0$. Назвім $a = \frac{c}{1-\varepsilon}$, тодї $x_0 = 2a$ називаєть ся великою або головною осию кривої.

Творячи похідну рівнаня (2), одержимо

$$yy' = c(\varepsilon + 1) + (\varepsilon^2 - 1)x;$$

вона стає зером для $x = \frac{c}{1-\varepsilon} = a$. В тій точцї досягає крива maximum або minimum. Віддалене обох екстремів називає ся побічною (або малою) осию кривої; означім її $2b$, тодї є

$$b = c\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Для $\varepsilon = 1$ є $b = \infty$, для $\varepsilon > 1$ є воно мниме.

Точку пересїчи обох осий M називаємо осередком кривої. Віддалене осередка від вершка є

$$a = \frac{c}{1-\varepsilon},$$

віддалене від огнища є

$$AM = a - c = \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon} = a\varepsilon.$$

Воно має назву лїнїйної ексцентричиности; означуємо його буквою e: $e = a\varepsilon.$

Звідси легко випровадити звісне рівнане:

$$a^2 - b^2 = e^2.$$

Для мнимого b маємо, розумієть ся, $a^2 + b^2 = e^2$.

§ 4.

Точка A', яка лежить на головній оси симетрично з A до M, є рівно-ж огнищем, а пряма Λ', симетрична до M супроти Λ, є також провідною лїнїєю кривої. Се легко провірити дуже простим рахунком. Коли назвемо B' точку, в якій пряма нормальна з P до Λ' трафляє пряму Λ', одержимо рівно-ж дефінїційне рівнане кривої

$$\frac{PA'}{PB'} = \varepsilon \tag{3}$$

З рівнань (1) і (3) слїдує

$$PA + PA' = \varepsilon \,.\, (PB + PB') = \varepsilon \,.\, CC';$$

величина CC' є віддаленем обох провідних ліній:

$$CC' = 2CM = 2(CO + OM),$$

а що $\qquad CO = \frac{c}{\varepsilon}$, то $CO + OM = \frac{c}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$,

отже $\qquad CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{2a}{\varepsilon}$, проте $\varepsilon \,.\, CC' = 2a$;

коли положимо: $r_1 = PA$, $r_2 = PA'$, одержимо:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{4}$$

Отсе звичайна дефініція еліпси. — Її можемо приміняти рівно-ж і до гіперболї, тільки з тим застереженем, що коли точки A' і B' лежать по відемній стороні оси Y, то величини PA' і PB' треба брати з відемним знаком, отже рівнане (3) треба відоймити від (1). Се дасть:

$$r_1 - r_2 = \varepsilon \,.\, CC' = 2a. \tag{5}$$

Осями симетрії кривих є обі оси; осередком симетрії осередок кривої. Параболя має тільки одну вісь симетрії, а саме вісь X (головну вісь). Її осередок симетрії лежить в безконечности.

§ 5.

Приходимо тепер до першого питаня, яке ми поставили на вступі, іменно, як заховує ся громада кривих (2) на площі, коли c буде постійне, а ε приймемо за змінний параметер*).

Для $\varepsilon = 0$ маємо коло о лучи c з осередком в A; віддалене провідної лїнїї є $CO = \infty$; так само й друга провідна лінія є в безконечности.

Для $\varepsilon < 1$ одержуємо еліпсу; її видовжене зростає зі зростом параметру ε, бо коли $\varepsilon < \varepsilon_1 < 1$, то $a_1 = \frac{c}{1-\varepsilon_1} > a$. Зі зростом ε віддалюють ся проте точки M, A' і O' постійно, аж для $\varepsilon = 1$ перейдуть в безконечність.

Коли ε перейде границю 1, всї згадані точки появляють ся по лївій стороні Y, бо величини a і ε стають відемні. Вони будуть зближати ся постійно до вершка O, бо коли $\varepsilon_1 > \varepsilon > 1$, то $a_1 = \frac{c}{1-\varepsilon_1} = \frac{-c}{\varepsilon_1 - 1} < a_1$.

Для $\varepsilon = \infty$ одержимо $CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 0$, проте обі провідні лїнїї зійдуть ся; тодї є рівно-ж $CO = 0$, отже вони впадуть на вісь Y. З рівняня (2) одержимо тодї $x = 0$; проте цїла крива перейде в вісь Y.

*) Не мішати з параметром стіжкових перекроїв!

Кожда з кривих буде обширнїйша від попередньої, бо коли приймемо $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, нпр. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \delta$, $(\delta > 0)$, то для того самого x маємо $y_2 > y_1$. Отже коли дві сусїднї криві стикають ся в точцї O, то не можуть вже мати инших спільних точок.

§ 6.

Коли схочемо знайти, яку частину площі покриє громада кривих при тяглій зміні параметру ε, поставмо собі таке питанє: „нехай буде дана точка $P(\xi, \eta)$ на площі; яка є вартість параметру ε тої кривої, що переходить через точку P"?

Вставивши в рівнанє (2) сорядні точки P й розвязавши його з огляду на ε, одержимо:

$$\varepsilon = -\frac{c}{\xi} + \frac{1}{\xi}\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2}. \qquad (6)$$

Знак „—" при корінї є виключений, бо ми приймаємо параметер ε заєдно додатнїй. Звідси слїдує, що мусить бути сповнена одна вимога для ξ і η:

$$\sqrt{(\xi - c)^2 + \eta^2} \leqq c, \qquad (7)$$

бо тільки тодї зможе бути $\varepsilon \geqq 0$. Нерівність (7) висказує, що тільки тодї через точку P може переходити одна крива з громади (2), коли P лежить не на полї кола о лучи c й осередку в огнищи A. Через кожду иншу точку переходить одна і тільки одна крива з громади (2), бо ε має тільки одну можливу вартість.

Звідси слїдує, що **громада стіжкових кривих, даних рівнанєм (2) зі змінним параметром ε, покриває цїлу площу з виїмком вершкового кола о лучи c** з осередком в огнищи A.

Для відємних ε наші криві, як сказано, нездефініовані.

§ 7.

Щоби розслїджувати зміну положеня провідних лїній з параметром, зведім рівнанє (2) до **осередочного виду** (можливе се, розуміється, тільки при еліпсї й гіперболї).

При еліпсї пересуваємо початок сорядних о a на право; тому скорочуємо сорядну x о a:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x + y^2 = c^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, \qquad (8)$$

або в звичайній формі

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,;$$

при гіперболї відбуваєть ся отсе пересуненє о таку саму величину на лїво, отже сорядна x буде продовжена о a; се дасть:

$$(\varepsilon^2 - 1)\, x^2 - y^2 = c^2 \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}, \tag{9}$$

отже звичайна форма рівнаня гіперболї буде:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Віддаленє обох провідних лїнїй є в обох разах

$$d = CC' = \frac{2c}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

зглядно

$$d = \frac{2c}{\varepsilon(\varepsilon - 1)};$$

коли-ж тут не будемо вважати на знак, можемо приймити перший взорець.

Для $\varepsilon = 0$ є $d = \infty$; для $0 < \varepsilon < 1$ приймає воно скінчені вартости, а для $\varepsilon = 1$ стає опять ∞. Опісля, коли $\varepsilon > 1$, опадає воно від ∞ до 0. — Звідси слїдує, що коли ε зростає від 0 до 1, d перебігає спершу спадаючий ряд, а опісля знов зростає.

Знайдїм долїшню границю того ряду. Коли положимо

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(1 - \varepsilon),$$

маємо:

$$\varphi'(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon;$$

$\varphi'(\varepsilon)$ стає зером для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а що $\varphi''(\varepsilon) = -2 < 0$, то $\varphi(\varepsilon)$ є для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ maximum, отже тодї d є minimum. Отже долїшньою границею вартостий d є

$$d_{\min.} = 8c;$$

обі провідні лїнїї елїпси не можуть нїколи зблизити ся до себе більше, як на $8c$.

§ 8.

Положім $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta_1$ $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$; тодї є

$$d_1 = d_2 = \frac{2c}{\frac{1}{4} - \delta^2}.$$

Дві елїпси, яких вершки однаково віддалені від огнищ і яких чисельні ексцентричности є симетрично розложені супроти числа $\frac{1}{2}$, мають ті самі провідні лїнїї. Такі дві елїпси о тих самих провідних лїнїях назвемо приналежними елїпсами супроти δ (zugehörige Ellipsen in bezug auf δ).

Рівнаня кождої пари приналежних елїпс є такі:

$$\left(\frac{x}{\frac{2c}{1-2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}}}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{x}{\frac{2c}{1+2\delta}}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}}\right)^2=1. \qquad (10)$$

Тут є:

$$a_1=\frac{2c}{1-2\delta},\quad a_2=\frac{2c}{1+2\delta};$$
$$b_1=c\sqrt{\frac{3+2\delta}{1-2\delta}},\quad b_2=c\sqrt{\frac{3-2\delta}{1+2\delta}}. \qquad (10a)$$

Для $\delta=0$ зливають ся обі елїпси в одну:

$$\left(\frac{x}{2c}\right)^2+\left(\frac{y}{c\sqrt{3}}\right)^2=1. \qquad (11)$$

Отсе одинока елїпса, ідентична зі своєю приналежною; вона приналежна до $\delta=0$. Її назвемо головною елїпсою (Hauptellipse).

Коли пів-оси головної елїпси назвемо a, b, а пів-оси пари приналежних елїпс a_1, b_1 і a_2, b_2, одержимо такі релядії:

$$a_1>a>a_2;\quad b_1>b>b_2,$$

т. зн. з пари двох приналежних елїпс одна лежить на зовнї, а друга містить ся внутрі головної елїпси.

Для $\delta=\frac{1}{2}$ маємо: $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=0$, отже $d=\infty$; перше рівнанє (10) тратить своє значінє, бо обі пів-оси стають ∞, а друге стає $x^2+y^2=c^2$, т. зн.

Екстремом приналежних елїпс є така пара, що перша елїпса стає безконечно велика, т. є. оба її огнища, вершки й провідні лїнії відсувають ся безконечно далеко, (стає параболею о безконечно далекім вершку), а друга елїпса стає виїмковим колом о лучи c, з есередком M.

Для приналежних елїпс замітні такі релядії:

$$a_1+a_2=\frac{4c}{1-4\delta^2}=\frac{1}{2}d;$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};\quad \frac{e_1}{e_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2.$$

§ 9.

Коли-б ми хотїли перевести той сам дослїд над гіперболею, побачимо, що для $\varepsilon > 1$ істнує minimum d тільки для $\varepsilon = \infty$; є воно $d = 0$. До нього належить тільки одно ε, отже до кождої пари провідних лїнїй належить одна і тільки одна гіпербола.

§ 10.

Конструкція пар приналежних елїпс.

Провідні лїнїї елїпси знаходимо, ведучи стичні до елїпси в кінцях її параметрів, т. є. в точках нормально над огнищами. Вони перетинають ся з осею X в точках, куди переходять провідні лїнїї. — Стичні-ж до елїпси перетинають вісь X в тих самих точках, що стичні до кола з осередком M і лучем a (велика пів-вісь елїпси), ведені з точок нормально над дотичними точками елїпс. Проте конструкція провідних лїнїй елїпси є дуже легка.

Нехай a_1 і a_2 означують великі пів-оси одної пари приналежних елїпс; тодї є дані також і обі елїпси, а з рівнань (10а) можемо знайти c і δ, отже всьо, що потрібне до визначеня елїпси. — Для приналежних елїпс істнує реляция

$$a_1 + a_2 = \tfrac{1}{2}d;$$

отже коли зачеркнемо з M співосередні кола лучами a_1 і a_2 і відміримо на оси X відтинок $CM = a_1 + a_2$, то точка C подасть, куди переходить провідна лїнія. З C ведемо стичні до обох кіл; мети точок стичности на вісь X визначать положенє огнищ обох елїпс (рис. 2).

Що сконструовані так елїпси є справдї приналежні, можемо доказати так: 1) мусимо виказати, що обі елїпси мають спільні провідні лїнїї; 2) мусимо доказати, що обі мають однакове віддаленє вершків від огнищ.

1) Слїдує безпосередно з конструкції; прямі $\varLambda$ і $\varLambda'$ є справдї провідними лїніями обох елїпс, бо D_1C і D_2C є стичними до кіл над великими осями елїпс, а точки стичности лежать прямо над огнищами елїпс.

2) Маємо доказати, що $O_1A_1 = O_2A_2$. З ΔMCD_1 і MCD_2 слїдує:

$$a_1^2 = A_1M^2 + A_1D_1^2; \quad a_2^2 = A_2M^2 + A_2D_2^2,$$

а також:

$$A_1D_1^2 = CA_1 \,.\, A_1M; \quad A_2D_2^2 = CA_2 \,.\, A_2M.$$

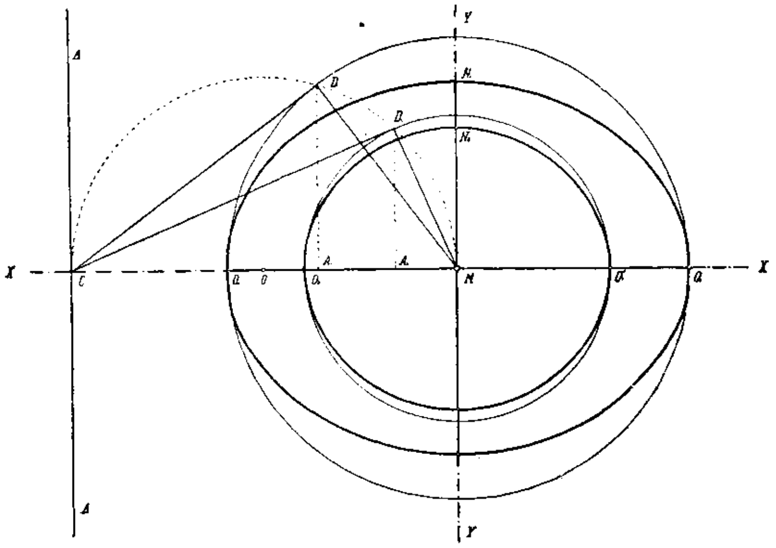
Тут є:

$$CA_1 = CM - A_1M = (a_1 + a_2) - A_1M;$$
$$CA_2 = CM - A_2M = (a_1 + a_2) - A_2M,$$

(бо $CM = a_1 + a_2$), отже дальше

$$A_1D_1^{\,2} = [(a_1 + a_2) - A_1M] \,.\, A_1M;$$
$$A_2D_2^{\,2} = [(a_1 + a_2) - A_2M] \,.\, A_2M,$$

проте: $$A_1M = \frac{a_1^{\,2}}{a_1 + a_2}; \quad A_2M = \frac{a_2^{\,2}}{a_1 + a_2}.$$



Бажані відтинки є:

$$O_1A_1 = a_1 - A_1M \quad \text{і} \quad O_2A_2 = a_2 - A_2M,$$

отже $$O_1A_1 = O_2A_2 = \frac{a_1a_2}{a_1 + a_2} = c,$$ як се слідує рівно-ж з (10a).

Для конструкції головної еліпси ($a_1 = a_2$) рисуємо точку C в віддаленю $2a_1 (= a_1 + a_2)$ від M.

Тернопіль, 30. XI. 1911.

RÈSUMÈ.

Hier werden die Kegelschnitte als geometrische Örter derjenigen Punkte definiert, für die das Verhältnis der Abstände von einem fixen Punkt A (Brennpunkt) und einer fixen Linie $\varLambda$ (Leitlinie) einen konstanten Wert ε hat.

Wenn der Abstand des Brennpunktes vom Scheitelpunkt O der Kurven mit c bezeichnet wird, dann lautet die Scheitelgleichung der Schaar sämtlicher Kegelschnitte:

$$y^2 = 2c(\varepsilon + 1)\,x + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2,$$

worin c der veränderliche Parameter*) ist, den man von 0 bis $+\infty$ stetig variieren lässt; für negative Werte desselben sind die Kurven nicht mehr definiert.

Der Gegenstand des vorstehenden Beitrags ist: 1) zu zeigen, welcher Teil der Ebene durch die ganze Kurvenschaar bedeckt wird, und 2) zu untersuchen, wie sich die Ellipsen verhalten, sobald man ihre Leitlinien hin und her verschiebt.

Die erste Frage ergibt die Antwort, dass durch alle diejenigen Punkte der Ebene Kurven der genannten Schaar gehen können, die nicht innerhalb des „Ausnahmskreises" liegen, d. h. des Kreises vom Radius c um den Brennpunkt A. Den Extremen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \infty$ entsprechen der Ausnahmskreis als Grenzlage aller Ellipsen, und die Y-Achse als Grenzlage aller Hyperbeln.

Zur Behandlung der zweiten Frage wird die Scheitelgleichung der Ellipse in eine Mittelpunktsgleichung transformiert:

$$(1 - \varepsilon^2)\, x^2 + y^2 = c^2 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon};$$

ferner wird c als konstant beibehalten und beim Variieren des Parameters ε sollen alle Ellipsen konzentrisch bleiben. Es zeigt sich alsdann, dass für $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ den zwei Ellipsen, die durch $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \delta$ und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} - \delta$ $(0 \leqq \delta \leqq \frac{1}{2})$ bestimmt sind, je ein gemeinsames Leitlinienpaar zukommt; für solches Ellipsenpaar wird die Bezeichnung „einander zugehörige Ellipsen in bezug auf δ" gewählt. Für $\delta = 0$ ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; dann bekommen wir nur eine einzige, sich selbst zugehörige Ellipse. Sie mag „Hauptellipse" heissen; bei ihr ist der Abstand der beiden Leitlinien ein Minimum, u. z. $= 8c$.

Für $\delta = \frac{1}{2}$ kommen wir auf ein Extrempaar; die eine Ellipse ist unendlich gross, die andere der Ausnahmskreis um M.

Zuletzt wird die Konstruktion der zugehörigen Ellipsenpaare angegeben; auf der X-Achse wird ein Punkt C bestimmt, dessen Abstand von M gleich der Summe ist der grossen Halbachsen beider Ellipsen; er gibt die Lage der Leitlinie A an, denn es ist der halbe Abstand beider Leitlinien $\frac{1}{2}d = a_1 + a_2$. Dann werden um M zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2 geschlagen, an welche dann von C aus Tangenten zu legen sind. Die Projektionen der Beruhrüngspunkte auf die X-Achse sind die Brennpunkte beider zugehörigen Ellipsen.

---

*) Nicht zu verwechseln mit dem „Parameter eines Kegelschnitts"!