Др Микола Чайковський.

(Рава руська).

Як упорядкувати множину вимірних десяточних чисел?

(Dr Mykola Čajkovskyj: Wie kann man die Menge der rationalen Dezimalzahlen anordnen?)

Ґеорґ Кантор доказав, що множина звичайних, вимірних дробів є відчислима; порядкує він її так, що збирає в ґрупи всї дроби, яких сума чисельника і знаменника однакова, $s = m + n$, а потім укладає серед кождої ґрупи поодинокі дроби в такій черзї:

$$\frac{s-1}{1},\quad \frac{s-2}{2},\quad \frac{s-3}{3},\ldots,\quad \frac{s-k}{k},\ldots,\quad \frac{1}{s-1}.$$

Отсе впорядковане має ту недостачу, що кождий дріб виступає у множині безліч разів, раз у незведимій формі $\frac{m}{n}$, коли $(m, n) = 1$, а потім у кождій ґрупі λs як $\frac{\lambda m}{\lambda n}$

При порядкованю множини вимірних десяточних чисел легко можна оминути ту недогідність, яка тут іще більше заваджала би, бо-ж коли ми дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{\lambda m}{\lambda n}$ ще таки можемо вважати двома ріжними числами, то не можемо того сказати нпр. про числа 0.1 і 0.10, 0.100 і т. д.

В отсїй замітцї переведемо доказ, що **множина всїх десяточних чисел є відчислима**, а уладимо його так, щоби можна було порядкове місце кождого елементу представити як функцію його цифр.

1. До тої цїли всї десяточні числа — отже і цїлі числа і десяточні дроби (т. зв. „чисті числа“ і „чисті дроби“) і врештї

цілі числа з десяточними місцями („мішані числа“) — ділимо на ґрупи відповідно до скількости цифер; під a-цифровим числом будемо розуміти або a-цифрове ціле число або a-цифровий „чистий дріб“ або „мішане“ число, що має перед точкою її по точці разом a цифер.

Дальше серед одної ґрупи ділимо числа на кляси так, що до кляси з характеристикою (p, q) належать усї числа, які мають p цілих і q десяточних місць; отже до першої кляси (a, o), належать „чисті“ числа, до останної (o, a), „чисті“ дроби, а до прочих $a-1$ кляс усї „мішані“ числа.

Супроти того упорядкованя поодиноких ґруп і кляс буде таке:

I. (1, 0): числа 1—9; (0,1): дроби 0·1—0·9;

II. (2, 0): числа 10—99; (1, 1): числа 1·1 до 9·9 (з виключенєм чисел цілих, т. є. форми a·0, бо ті належать до (1, 0); (0, 2): дроби 0·01—0·99;

III. (3, 0): числа 100—999; (2, 1): число 10·1 до 99·9; (1, 2): числа 1·00 до 9·99 (в обох разах виключені числа форми $a\,\beta$·0 і a·β0); (0, 3): дроби 0·001—0·999;

2. Тепер треба нам означити місце даного числа у його клясї.

а). Коли се ціле число, n-цифрове, x, то воно займає місце о $10^{n-1}-1$ менче ніж його величина, бо його кляса (n, o) зачинаєть ся від 10^{n-1}, а всї менчі числа, у скількости 10^{n-1}, належать до попереднїх ґруп, отже

$$N_{n,\,o}\,(x) = x - (10^{n-1} - 1). \qquad (1).$$

Кляса (n, o) містить у собі $9.\,10^{n-1}$ елєментів, бо зачинаєть ся числом 10^{n-1}, а кінчаєть ся на $10^{n}-1$.

б). Коли n-цифрове число x є „чистим“ дробом, тодї його місце є:

$$N_{n,\,o}\,(x) = (x) - E\frac{(x)}{10}, \qquad (2).$$

де (x) означає ціле число, яке одержимо, коли в дробі x скасуємо десяточну точку, а Ex — символь Лєжандра — означує найбільше ціле число, що містить ся у дробі $a \gtrless 1$.

Формулку (2). легко доказати. Іменно, коли випишемо всї дроби з n цифрами, починаючи з 0·00... 01, то до кляси (o, n) будуть належати тільки ті, що не закінчені нулею, отже всї дроби з кінцевою нулею треба викинути, а є їх як раз стільки, скільки десяток містить ся у числї (x).

Кляса (o, n) містить у собі, так само як і (n, o), $9 . 10^{n-1}$ елементів.

в). Коли ж урешті n-цифрове мішане число x має $n-r$ цілих, а q дробових місць, то

$$N_{n-r,\,r}(x) = (x) - E\frac{(x)}{10} - (10^{n-1}-1). \qquad (3).$$

Тут іменно треба — в порівнаню до кляси (o, n) виключити число всїх попереднїх ґруп. А саме, кожду з кляс $(n-r, r)$ одержимо, коли в усїх числах кляси (o, n) точку пересунемо о r місць на право. Через те числа, що їх перші цифри були нулями, мати муть менчу скількість цифер, бо при пересуненю точки на право мати ме значінє тільки одна нуля, що стоїть перед точкою; так нпр. переходячи з $(0, 3)$ до $(2, 1)$ і $(1, 2)$ мусимо відкинути числа, що повстали з дробів $0{\cdot}001 - 0{\cdot}099$, а є їх усїх $99 = 10^2 - 1$.

Взагалї усунемо тут стільки елементів, скільки їх містить ся у клясах від $(0, 1)$ до $(0, n-1)$ вкл., т. є $10^{n-1} - 1$.

Кожда з мішаних n-цифрових кляс містить у собі 9^n елементів.

Формулки (1) — (3) можемо легко зібрати в одну при помочи функції $\vartheta(a)$, яку схарактеризуємо так:

$$\vartheta(o) = o, \; \vartheta(a) = -1 \text{ для } a > o;$$

тодї буде загально;

$$N_{n-r,\,r}(x) = (x) + \vartheta(r).\, E\frac{(x)}{10} + \vartheta(n-r).(10^{n-1}-1). \qquad (I).$$

3. Знаючи місце кождого елементу в нутрі його кляси, можемо легко обчислити місце даного числа у цілій множинї.

Нехай число x належить до кляси (p, q), т. є має p цифер перед точкою і q по точцї. Тодї для означеня його місця у множинї мусимо знати:

а) скількість елементів, що містять ся у всїх попереднїх $p+q-1$ ґрупах разом;

б) скількість елементів кляс, які стоять у дотичній ґрупі перед даною клясою: $(p+q, o)$, $(p+q-1, 1), \ldots, (p+1, q-1)$;

в) місце числа x у клясї (p, q).

Сума тих трьох чисел дасть бажане місце числа x у множинї; назначимо його $\mathfrak{N}$ (x).

а) Для означеня скількости елементів попереднїх ґруп зважмо, що в кождій k-цифровій ґрупі є $(k+1)$ кляс; з того дві скрайні — одна відповідає чистим числам, друга чистим дробам — мають по $9 . 10^{k-1}$ елементів, а $(k-1)$ прочих, що відповідають мішаним числам, по 9^k елементів. Загалом отже k-цифрова ґрупа має

$$T_k = 2.\,9.\,10^{k-1} + (k-1).\,9^k$$

елементів, а всі ґрупи разом, від 1-ої до k— тої включно:

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} T_k = 2.\,9.\,\sum_{\lambda=o}^{m-1} 10^{\lambda} + 9^2.\,\sum_{\lambda=o}^{m-1} \lambda.\,9^{\lambda-1}$$

елементів. Перша сума є $\frac{10^m-1}{9}$, друга $\frac{(8m-9).\,9^{m-1}+1}{8^2}$, *)

отже загалом:

$$S_m = 2\,(10^m - 1) + \frac{9^2}{8^2}\,[(8m-9).\,9^{m-1}+1].^{**)} \qquad (4).$$

б). Коли число x не належить до кляси (m, o), мусимо обчислити скількість місць усіх попередніх кляс аж до $(m-r+1, r-1)$ вкл., де $r-1 \leq m$. Тоді до S_m треба дочислити

$$\Sigma_{m-r,\,r} = 9.\,10^{m-1} + (r-1).\,9^m; \qquad (5).$$

коли x є чистим дробом, мати мемо додати

$$\Sigma_{o,\,m} = 9.\,10^{m-1} + m.\,9^m: \qquad (5a).$$

коли воно ціле, отся сума відпаде, отже треба покласти для $r = o$

$$\Sigma_{m,\,o} = 0 \qquad (5б).$$

Щоби ті три формулки зєдинити, приймім, що

$$\Sigma_{m-r,\,r} = 9.\,10^{m-1} - (r-1).\,9^m.\,\vartheta(r), \qquad (II).$$

де $\vartheta(r)$ здефініоване рівнанями:

$$\vartheta(o) = \left(\frac{10}{9}\right)^{m-1},\ \vartheta(a) = -1 \text{ для } a > o.$$

Загалом є отже:

$$\Re(x) = S_{p+q-1} + \Sigma_{p,\,q} + N_{p,\,q}(x). \qquad (6).$$

Формулка (4), (I) і (II) подають величини S, N і Σ однозначно, отже наша множина впорядкована однозначно і то так, що місце кождого елементу в ній подане як функція його цифер.

*) Ряд $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\,x^{n-1}$ є похідною ряду $\sigma_n = x + x^2 + \ldots + x^n$, отже його сума похідною суми $\sigma_n = \frac{x(x^n-1)}{x-1}$, т. є:

$$S_n = \frac{(nx - n - 1)\,x^n + 1}{(x-1)^2}$$

**) Сума у скобці є подільна на 8^2, бо $9^\lambda \equiv 8\lambda + 1 \pmod{8^2}$, отже $(8m-9).\,9^{m-1} + 1 \equiv O \pmod{8^2}$; отже S_m є дійсно ціле число.

Табелька чисел T_m і S_m:

m	T_m	S_m
1	18	18
2	261	279
3	3.258	3.537
4	37.683	41.220
5	416.196	457.416
6	2,095.245	2,542.661