Обчислене деяких тригонометричних інтеґралів.

Подав **Др. Володимир Левицький.**

(Dr. Wladimir Lewyćkyj. Berechnung einiger trigonometrischen Integrale).

1. В тій ноті занимаюсь обчисленем тригонометричних інтеґралів типу:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\varphi(x)^{2n} - a^{2n}}, \tag{1}$$

де $\varphi(x)$ є ґоніометрична функція, n число ціле, a якенебудь постійне. Обчислене поведу наперед загально для функції $\varphi(x)$, а опісля по черзї розберу случаї тригонометричних функцій.

Так як:

$$\varphi(x)^{2n} \quad a^{2n} = \prod_{s=1}^{2n} \left((\varphi x) - a e^{\frac{s\pi}{n}} \right),$$

то можемо через розділене на частні дроби написати:

$$\frac{1}{\varphi(x)^{2n} - a^{2n}} = \frac{C_1}{\varphi(x) - a e^{\frac{\pi}{n}}} + \frac{C_2}{\varphi(x) - a e^{\frac{2\pi}{n}}} + \ldots\ldots + \frac{C_{2n}}{\varphi(x) - a e^{2\pi}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{C_\nu}{\varphi(x) - a e^{\frac{\nu\pi}{n}}},$$

а звідси слід:

$$\sum_{\nu=1}^{2n}\left[C\prod\left(\varphi(x)-a\,e^{\frac{s\pi}{n}}\right)\right]=1$$

(s в добутку $= 1, 2, \ldots (\nu-1), (\nu+1) \ldots\ldots 2n$).

Коли розвинемо сю суму, дістанемо рівнанє:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu\Big[\varphi(x)^{2n-1}-\varphi(x)^{2n-2}a\sum e^{s'_\nu\frac{\pi}{\nu}}+\varphi(x)^{2n-3}a^2\sum e^{(s'_\nu+s''_\nu)\frac{\pi}{n}}-\ldots$$

$$\ldots-a^{2n-1}e^{(s'_\nu+s''_\nu+\ldots+s_\nu^{(2n-1)})}\Big]=1.$$

Через порівнанє сочинників при степенях функції $\varphi(x)$ дістанемо ряд рівнань:

$$\left\{\begin{array}{l}
C_1+C_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{2n}=0.\\
a\left(C_1\Sigma e^{s'_1\frac{\pi}{n}}+C_2\Sigma e^{s'_2\frac{\pi}{n}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_{2n}\Sigma e^{s'_{2n}\frac{\pi}{n}}\right)=0.\\
a^2\left(C_1\Sigma e^{(s'_1+s''_1)\frac{\pi}{n}}+C_2\Sigma e^{(s'_2+s''_2)\frac{\pi}{n}}+\ldots+C_{2n}\Sigma e^{(s'_{2n}+s''_{2n})\frac{\pi}{n}}\right)=0. \quad 2)\\
\\
a^{2n-1}\left(C_1e^{(s'_1+s''_1+\ldots+s_1^{(2n-1)})\frac{\pi}{n}}+C_2e^{(s'_2+s''_2+\ldots+s_2^{(2n-1)})\frac{\pi}{n}}+\ldots\ldots\ldots+\right.\\
\left.+C_{2n}e^{(s'_{2n}+s''_{2n}+\ldots+s_{2n}^{(2n-1)})\frac{\pi}{n}}\right)=-1
\end{array}\right.$$

(степені $a, a^2, \ldots a^{2n-2}$ можна в рівнанях пропустити). Звідси дістанемо на частні чисельники форму:

$$C_\nu=\frac{D_\nu}{D},$$

де:

$$D=a^{2n-1}\left|\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1\\
\Sigma e^{s'_1\frac{\pi}{n}} & \ldots\ldots & \Sigma e^{s'_{2n}\frac{\pi}{n}}\\
\Sigma e^{(s'_1+s''_1)\frac{\pi}{n}} & \ldots\ldots & \Sigma e^{(s'_{2n}+s''_{2n})\frac{\pi}{n}}\\
\vdots & \vdots & \\
e^{(s'_1+s''_1\ldots+s_1^{(2n-1)})\frac{\pi}{n}} & \ldots\ldots & e^{(s'_{2n}+s''_{2n}+\ldots+s_{2n}^{(2n-1)})\frac{\pi}{n}}
\end{array}\right|,$$

а D_ν є визначником D, де в місце ν-го пряму вставлено праву сторону рівнань 2) (без a^{2n-1}).

В виду сего дістанемо загальну форму інтеґрала J:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\varphi(x)^{2n}-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\varphi(x)-a_\nu}, \tag{3}$$

де: $\qquad a_\nu=ae^{\frac{\nu\pi}{n}}.$

Пристосуймо сю форму до поодиноких тригонометричних функцій.

2. В случаю $\varphi(x)=\sin x$ дістанемо:

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x-a_\nu}.$$

Коли підставимо $\sin x=y$, дістанемо:

$$J_1=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^1\frac{dy}{(y-a_\nu)\sqrt{1-y^2}};$$

а коли пристосуємо субституцію: $y=\frac{2z}{1+z^2}$, інтеґрал J_1 прийме вид:

$$J_1=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{2C_\nu}{a_\nu}\int_\infty^1\frac{dz}{z^2-\frac{2}{a_\nu}z+1}.$$

А що:

$$z^2-\frac{2}{a_\nu}z+1=\left(z-\frac{1+\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}\right),$$

то інтеґрал:

$$\int_\infty^1\frac{dz}{z^2-\frac{2}{a_\nu}z+1}=\int_\infty^1\frac{\frac{a_\nu}{2\sqrt{1-a_\nu^2}}}{z-\frac{1+\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}}dz-\int_\infty^1\frac{\frac{a_\nu}{2\sqrt{1-a_\nu^2}}}{z-\frac{1-\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}}dz=$$

$$=\Bigg/_{\infty}^{1}\frac{a_\nu}{2\sqrt{1-a_\nu^2}}\log\frac{z-\frac{1+\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}}{z-\frac{1-\sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu}}.$$

В виду сего дістанемо:

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sin^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{C_\nu}{\sqrt{1-a_\nu{}^2}}\Big|_{\infty}^{1} log\frac{a_\nu z-1-\sqrt{1-a_\nu{}^2}}{a_\nu z-1+\sqrt{1-a_\nu{}^2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{C_\nu}{\sqrt{1-a_\nu{}^2}}\, log\,\frac{a_\nu-1-\sqrt{1-a_\nu{}^2}}{a_\nu-1+\sqrt{1-a_\nu{}^2}} \tag{4}$$

3. В случаю $\varphi(x)=cos\,x$ дістанемо:

$$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos\,x-a_\nu}.$$

А що:

$$cos\,x=sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

то:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{cos\,x-a_\nu}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a_\nu}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{sin\,y-a_\nu},$$

коли вставимо $\frac{\pi}{2}-x=y$ і відповідно доберемо границі. Значить ся, на J_2 дістанемо ту саму вартість, що на J_1.

4. В случаю $\varphi(x)=tg\,x$ дістанемо:

$$J_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{tg^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{tg\,x-a_\nu}.$$

Коли ужиємо субституції: $tg\,x=z$, дістанемо:

$$J'_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{tg\,x-a_\nu}=\int_0^{\infty}\frac{dz}{(z-a_\nu)(1+z^2)}.$$

Колиж покладемо:

$$\frac{1}{(z-a_\nu)(1+z^2)}=\frac{A}{z-a_\nu}+\frac{Bz+C}{1+z^2},$$

дістанемо через простий рахунок:

$$A=\frac{1}{1+a_\nu^2},\quad B=-\frac{1}{1+a_\nu^2},\quad C=-\frac{a_\nu}{1+a_\nu^2}.$$

В виду сего:

$$(1+a_\nu^2)\,J'_3=\int_0^\infty\frac{dz}{z-a_\nu}-\int_0^\infty\frac{z\,dz}{1+z^2}-a_\nu\int_0^\infty\frac{dz}{1+z^2},$$

отже:

$$J'_3=\Big|_0^\infty\frac{1}{1+a_\nu^2}\left[\log(z-a_\nu)-\tfrac{1}{2}\log(1+z^2)-a_\nu\,arc\,tg\,z\right]=$$

$$=\Big|_0^\infty\frac{1}{1+a_\nu^2}\left[\log\frac{z-a_\nu}{\sqrt{1+z^2}}-a_\nu\,arc\,tg\,z\right]=\frac{1}{1+a_\nu^2}\left[\frac{-a_\nu\pi}{2}-\log(-a_\nu)\right].$$

З сего слїдує:

$$J_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{tg^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{C_\nu}{1+a_\nu^2}\left[-\log(-a_\nu)-\frac{a_\nu\pi}{2}\right].\tag{5}$$

5. Так як $co\,tg\,x=tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, то:

$$J_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{co\,tg^{2n}x-a^{2n}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{tg^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a^{2n}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{tg^{2n}y-a^{2n}},$$

коли вставимо $\frac{\pi}{2}-x=y$ і відповідні доберемо границї. J_4 має отже таку саму вартість, як J_3.

6. Для $\varphi(x)=sec\,x$ буде:

$$J_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sec^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{sec\,x-a_\nu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x\,dx}{1-a_\nu\,cos\,x}.$$

Через підставленя $cos\,x=y$, **а** опісля $y=\frac{2z}{1+z^2}$ **дістанемо:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\,x\,dx}{1-a_\nu\,cos\,x}=\int_0^1\frac{y\,dy}{(1-a_\nu y)\sqrt{1-y^2}}=-\frac{1}{a_\nu}\int_0^1\frac{(1-a_\nu y)-1}{(1-a_\nu y)\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=-\frac{1}{a_\nu}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{1}{a_\nu}\int_0^1\frac{dy}{(1-a_\nu y)\sqrt{1-y^2}}=\Big|_0^1\frac{1}{a_\nu}\,arc\cos y+$$

$$+\frac{2}{a_\nu}\int_\infty^1\frac{dz}{z^2-2a_\nu z+1}=-\frac{\pi}{2a_\nu}+\frac{2}{a_\nu}\int_\infty^1\frac{dz}{(z-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1})(z-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1})}.$$

Розділім послідний інтеграл на частні дроби, то дістанемо:

$$\int_\infty^1\frac{dz}{(z-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1})(z-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1})}=\int_\infty^1\frac{\frac{1}{2\sqrt{a_\nu^2-1}}}{z-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1}}\,dz-$$

$$-\int_\infty^1\frac{\frac{1}{2\sqrt{a_\nu^2-1}}}{z-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1}}\,dz=\Big|_\infty^1\frac{1}{2\sqrt{a_\nu^2-1}}\log\frac{z-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1}}{z-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a_\nu^2-1}}\log\frac{1-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1}}{1-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1}},$$

отже:

$$J_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sec^{2n}x-a^{2n}}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{C_\nu}{a_\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{a_\nu^2-1}}\log\frac{1-a_\nu-\sqrt{a_\nu^2-1}}{1-a_\nu+\sqrt{a_\nu^2-1}}-\frac{\pi}{2}\right]. \qquad 6)$$

Анальогічне обчислене дістанемо в случаю $\varphi(x)=\operatorname{cosec} x$.

Львів, грудень 1918.

In dieser Note berechnet der Verfasser den allgemeinen Wert des Integrales:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\varphi(x)^{2n}-a^{2n}},$$

n ganz, a constant, im Falle, wenn $\varphi(x)$ eine goniometrische Funktion darstellt.