Др. Василь Стасюк.

Єще про узасаднене ґеометрії Лобачевського.

Dr. Wassyl Stassjuk: Noch über die Begründung der Lobatschefskij-schen Geometrie).

В супереч аксійомови Евкліда Лобачевський принимає, що через точку можна повести більш як одну пряму, що не перетинає даної прямої. Виходячи з того нового заложеня випровадив він цілу нову геометрію, яку названо його іменем ґеометрією Лобачевського або також ґеометрією гіперболїчною.

Очевидно, колиб аксійом Евклїда міг бути доказаний при помочи инших аксійомів, Лобачевський міг би був попасти в суперечности. Тим часом так не сталось. Лобачевський не найшов ніяких суперечностий, а так само і прочі ґеометри, що по нім продовжали його дїло.

Заходить питанє, чи не найде ся єще яка суперечність. Що се неможливе, виказав Кляйн через випроваджене метового означеня мір чисто метовим методом т. є независимо від евклїдової ґеометрії.

В сій праці подано на се також ґеометричний та більш елементарний доказ, послугуючи ся самою геометрією Лобачевського.

А саме через мет площі на граничну кулю дістаємо на кулї відоме представлене ґеометрії в евклїдовій площі при помочи метового означеня мір. При помочи сего мету получено ґеометрію Лобачевського (в площі) з евклїдовою геометрією (на граничній кулї) і ми є в можности впрост при помочи конструкції кождій фіґурі на площі Лобачевського найти відповідну на граничній кулї і на відворот. Через се маємо доказане, що в ґеометрії Лобачевського неможливі суперечности, бо тоді мусїлиб

бути такі суперечности і у відповідній фіґурі на граничній кулі, отже в евклідовій ґеометрії, а се неможливе. Тим самим і аксійом Евкліда независимий від прочих аксійомів.

В сій праці переведено доказ для площі при помочи простору о трох вимірах. Очевидно сї виводи дають ся узагальнити і те саме може бути доказане і для простору о n вимірах (R_n) при помочи простору о ($n+1$) вимірах (R_{n+1}).

I. Деякі твердження ґеометрії Лобачевського.

Насамперед для вигоди подамо деякі твердження ґеометрії Лобачевського[1].

1. Твердження про граничне коло.

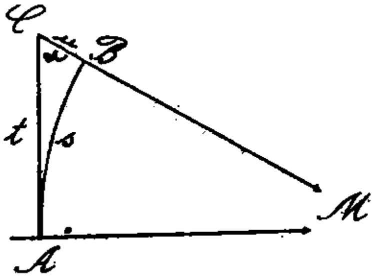

Рис. 1.

З точки C побіч прямої AM поведено 2 прямі, а саме $CA \perp AM$ і $CM \parallel AM$. Крива $AB = s$ є дугою граничною кола о осях AM і CM. Впровадьмо еще означеня $AC = t$, $BC = u$, $\alpha = \sphericalangle MCA$, то буде

$$(1)\ ch\, t = e^{u}$$

$$(2)\ sin\, \alpha = e^{-u}$$

$$(3)\ s = th\, t = cos\, \alpha$$

2. Тригонометричні взірці для прямокутних трикутників. Нехай буде ABC прямокутним трикутником з кутами α, β, $\gamma = 90^0$ і протилежними боками a, b і c.

---

[1] **Деякі з сих тверджень подані в:** Lobatschefskij, Zwei Geometrische Abhandlungen, Leipzig 1898 і в: Haussdorff: Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie (Berichte der sächs. Ges. der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse Bd. 51. J. 1899). А всї ті твердження подані в: Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert Bd. XLIX.

Твердження тригонометричні будуть тоді звучати:

$$(4) \quad ch\, c = ch\, a \,.\, ch\, b$$

$$(5) \begin{cases} cos\, \alpha = sin\, \beta \,.\, ch\, a \\ cos\, \beta = sin\, \alpha \,.\, ch\, b \end{cases}$$

$$(6) \quad ch\, c = ctg\, \alpha \,.\, ctg\, \beta$$

$$(7) \begin{cases} sh\, a = sin\, \alpha \,.\, sh\, c \\ sh\, b = sin\, \beta \,.\, sh\, c \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} th\, a = sh\, b \,.\, tg\, \alpha \\ th\, b = sh\, a \,.\, tg\, \beta \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} th\, a = th\, c \,.\, cos\, \beta \\ th\, b = th\, c \,.\, cos\, \alpha \end{cases}$$

3. Сорядні Вейєрштрасса.

А) сорядні точки

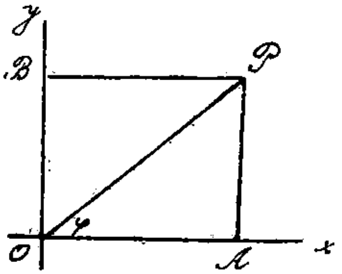

Рис. 2.

Довільну точку P лучимо з початком O прямокутного укладу сорядних Oxy прямою OP, а опріч сього ведемо прямі $PA \perp Ox$ і $PB \perp Oy$. Дальше нехай буде: $\varphi = \sphericalangle POA$.

Під сорядними Вейєрштрасса. точки P розуміємо величини:

$$(10) \begin{cases} x = sh\, PB = sh\, OP \,.\, cos\, \varphi \\ y = sh\, PA = sh\, OP \,.\, sin\, \varphi \\ p = ch\, OP. \end{cases}$$

Між сими сорядними заходить рівнання:

$$(11) \quad p^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Сорядними точки P уважаємо також усї прочі вартости, що є пропорціональні до величини x, y, p; значить усї такі уклади, що ріжнять ся тільки чинником, є сорядними тої самої точки.

Коли б точка P була точкою безконечно далекою на лучи OP, то тоді сорядні x, y, p після взірця (10) стануть безконечно великі. Однак взаїмне їх відношеннє дає ся виразити величинами скінченими.

Для кождої точки без огляду на те, чи она безконечно далека, чи ні, є:

$$x : y : p = th\ OP . \cos\varphi : th\ OP . \sin\varphi : 1$$

та для точок безконечно далеких $OP = \infty$, отже

$$th\ OP = 1.$$

Тим самим для точок безконечно далеких будемо мати:

$$(10\,а)\quad x : y : p = \cos\varphi : \sin\varphi : 1$$

а ті сорядні є получені рівнанєм

$$(11\,а)\quad p^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Навпаки, коли маємо дані 3 сорядні x', y', p', то є 3 можливости:

а) $p'^2 - x'^2 - y'^2 > 0$
б) $p'^2 - x'^2 - y'^2 = 0$
в) $p'^2 - x'^2 - y'^2 \quad 0.$

В першім випадку сорядні дають ся спровадити до таких величин, що сповняють рівнання (11). В тій цїли треба тільки кожду з них поділити через спільний чинник $\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}$. Тоді одержимо:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}},\quad y = \frac{y'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}},\quad p = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 - x'^2 - y'^2}}.$$

А на підставі рівнаня (10) легко буде найти точку P, означену тими сорядними.

У другім випадку рівнаннє б) є ідентичне з рівнанєм (11 а). x', y', p' є отже сорядними безконечно далекої точки. Напрям сеї точки дає ся сейчас означити на підставі рівнань (10 а).

У випадку в) величини x, y, p, пропорціональні до x', y', p', які сповняють рівнаннє (11), є уявні. Нехай буде:

$$\bar{x} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 \quad p'^2}},\quad y = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 - p'^2}},\quad \bar{p} = \frac{p'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 - p'^2}},$$

то

$$x = i\,.\,x,\quad y = i\,.\,\bar{y},\quad p = i\,.\,p.$$

І тоді

$$p^2 - x^2 - y^2 = x^2 + \bar{y}^2 - p^2 = 1.$$

А що x, y, p є величини уявні, проте нема дійсної точки о таких сорядних. Однак каже ся і в сїм випадку, що ті три сорядні означують точку, а називаємо її ідеальною точкою.

Б) сорядні прямої.

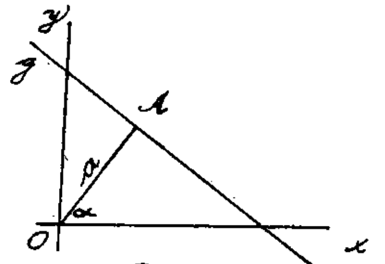

Рис. 3.

Коли $\alpha = \sphericalangle AOx$, $a = OA$, де $OA \perp g$, то тоді під сорядними Вейєрштрасса прямої g розуміємо величини:

$$(12) \begin{cases} u = ch\, a \,.\, cos\, \alpha \\ v = ch\, a \,.\, sin\, \alpha \\ w = sh\, a. \end{cases}$$

Ті сорядні є получені рівнанєм

$$(13) \quad u^2 + v^2 - w^2 = 1$$

Сорядними тої самої прямої будуть також кожді прочі три величини, що від u, v, w ріжнять ся тільки сталим чинником.

Для $a = \infty$ се є для прямих безконечно далеких усї вартости сорядних після взору (12) стають безконечно великі. Та їх взаїмне відношенє дає ся виразити в скінчених числах.

Для кождої прямої маємо:

$$u : v : w = cth\, a \,.\, cos\, \alpha : cth\, a \,.\, sin\, \alpha : 1$$

А що для безконечно далеких прямих $a = \infty$, отже $cth\, a = 1$, проте буде

$$(12\,а) \quad u \;\; v : w = cos\, \alpha : sin\, \alpha : 1.$$

З того слідує

$$(13\,а) \quad u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

На відворот, коли маємо дані 3 довільні числа u', v', w' як сорядні прямої, то є три можливости:

а) $u'^2 + v'^2 - w'^2 > 0$
б) $u'^2 + v'^2 - w'^2 = 0$
в) $u'^2 + v'^2 - w'^2 < 0$

і анальоґічно, як при сорядних точок, даними сорядними є визначені тоді прямі

а) дійсні,
б) безконечно далекі,
в) ідеальні.

4. Рівнання прямої. Дана пряма переходить через дану точку, коли їх сорядні є получені отсим подвійно-лінійним рівнанєм

$$(14) \quad u x + v y - w p = 0.$$

5. Відданенє двох точок $P_1 (x_1, y_1, p_1)$ і $P_2 (x_2, y_2, p_2)$ виражує ся взором

$$(15) \quad ch\, P_1 P_2 = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2,$$

при чім між сорядними обох точок заходять рівнання (11).

6. Кут двох перетинаючих ся прямих $g_1 (u_1, v_1, w_1)$ і $g_2 (u_2, v_2, w_2)$, яких сорядні сповняють рівнання (13), є даний рівнанєм

$$(16) \quad cos\, (g_1 g_2) = u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2.$$

Очевидно $\sphericalangle g_1 g_2$ буде мати дійсну вартість тільки тоді, коли для $cos\, g_1 g_2$ дістанемо таке виражене, що

$$| cos\, g_1 g_2 | < 1$$

Коли се условє не є сповнене, то обі прямі не перетинають ся.

7. Рух в площі виражує ся отсим лінійним підставленєм

$$(17) \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} p \\ y_1 = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} p \\ p_1 = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} p, \end{cases}$$

де між сочинниками заходять рівнання:

$$(18) \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{13}^2 = 1 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{23}^2 = 1 \\ -\alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} - \alpha_{13} \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{23} \alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{31} \alpha_{11} + \alpha_{32} \alpha_{12} - \alpha_{33} \alpha_{13} = 0 \end{cases}$$

II. Мет площі на граничну кулю.

1. Сорядні відповідних точок.

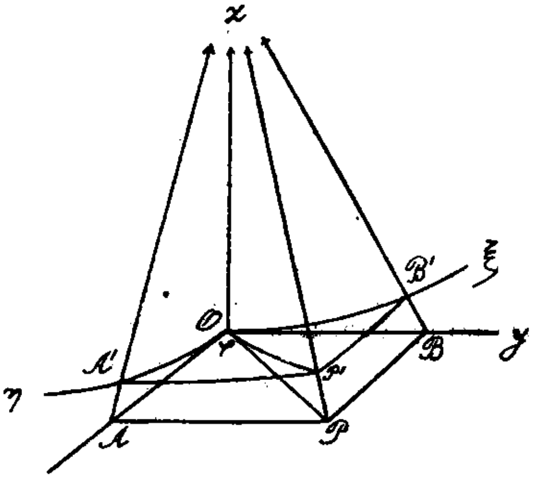

Рис. 4.

На даній площі принимаємо прямокутний уклад сорядних Oxy. З довільної точки P, що лежить на тій площі, ведемо прямі $PA \perp Ox$ і $PB \perp Oy$, а також OP. Означім еще через φ кут $\sphericalangle AOP$, то рівнання (10) дадуть нам сорядні точки P.

Через точку O ведемо граничну кулю (о безконечно великім лучи), осию якої є пряма $Oz \perp Oxy$. Ся гранична куля буде дотикати площу xy в точці O.

Дальше поведім з P, A і B рівнобіжні до Oz, то они перетнуть граничну кулю в точках P', A' і B'. Тим самим площі OAz, OPz, OBz, APz і BPz перетнуть граничну кулю в граничних колах OA', OP', OB', $A'P'$ і $B'P'$. В сей спосіб одержимо на граничній кулї чотирокутник $OA'P'B'$, якого усї боки є граничними колами.

Як відомо, геометрія на граничній кулї є геометрією Евкліда, при чім на місце прямої приходить граничне коло¹). Тим самим в трикутниках на граничній кулї сума кутів виносить 180°.

Отже в чотирокутнику $A'P'B'O$ сума кутів мусить бути 360°. А що після конструкції $\sphericalangle O = \sphericalangle A' = \sphericalangle B' = 90^0$, проте

---

¹) Lobatschefskij, o. c., ст. 12 і 193. Liebmann, o. c., ст. 59—62.

також $\sphericalangle P' = 90^0$. Значить чотирокутник $A'P'B'O$ є прямокутником.

Приймім тепер на граничній кулї уклад сорядних прямокутних, в якім

OA' є осию $O\xi$,
а OB' $O\eta$.

Очевидно, що $\sphericalangle A'OP' = \varphi$, бо граничні кола $O\xi$ і OP' є стичними прямих OA і OP. В сім укладі точка P' буде мати такі сорядні

$$\xi = OA' = OP' \ cos \ \varphi$$
$$\eta = OB' = OP' . sin \ \varphi.$$

Сї сорядні дають ся дуже легко виразити через сорядні точки P. Після взірця (3) будемо мати

$$OP' = th \ OP$$

Підставивши сю вартість в попередних рівнанях, одержимо

$$\xi = th \ OP . cos \ \varphi$$
$$\eta = th \ OP . sin \ \varphi.$$

З другої сторони після взорів (10) маємо

$$\frac{x}{p} = th \ OP . cos \ \varphi$$

$$\frac{y}{p} = th \ OP . sin \ \varphi$$

Отже

$$(19) \quad \xi = \frac{x}{p}, \quad \eta = \frac{y}{p}$$

або в иншій формі

$$(19a) \quad x : y : p = \xi : \eta : 1$$

З сего бачимо, що величини x, y, p є однородними сорядними прямокутними точки P'. На будуче будемо уживати тільки тих сорядних і тому можемо сказати, що відповідні точки на площі і на граничній кулї мають ті самі сорядні.

2. Рівнання відповідних кривих на площі і на граничній кулї є ті самі, бо кожда пара відповідних точок має ті самі сорядні. З окрема пряма в площі і відповідне граничне коло будуть мати те саме рівнання.

3. **Відповідні точки.** Ми бачили, що точка о сорядних x, y, p є дійсна, безконечно далека згл. ідеальна після того, чи

$$p^2 - x^2 - y^2 \quad 0, \; = 0 \text{ згл. } < 0.$$

На граничній кулї сї нерівности вказують, що відповідна точка лежить внутр. на, згл. зовнї кола

$$(20) \quad x^2 + y^2 - p^2 = 0.$$

Коло представлене сим рівнанєм називаємо основним колом. І можемо сказати, що точкам дійсним, безконечно далеким згл. ідеальним на площі відповідають точки внутр, на, згл. зовні основного кола і на відворот.

4. **Віддаленє двох точок.** Пригляньмо ся тепер, яке значінє буде мати віддаленє двох точок на площі для відповідних точок на граничній кулї. Після взору (15) віддаленє двох точок $P_1 (x_1, y_1, p_1)$ і $P_2 (x_2, y_2, p_2)$ виражує ся рівнанєм

$$ch\, d = p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 ,$$

де $d = P_1 P_2$. Відповідні точки на граничній кулї P'_1 і P'_2 мають сорядні

$$P'_1 \; (x_1, y_1, p_1) \text{ і } P'_2 \; (x_2, y_2, p_2).$$

Кожда наша точка на граничнім колї $P'_1 P'_2$ має сорядні

$$x_1 + \lambda x_2, \; y_1 + \lambda y_2, \; p_1 + \lambda p_2.$$

Точки пересїчи граничного кола $P'_1 P'_2$ з основним колом (20) означім через D_1 і D_2 і шукаймо, як велике є подвійне відношенє $(P'_1 \; P'_2 \; D_1 \; D_2)$. Для тих точок пересїчи очевидно мусить бути

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - (p_1 + \lambda p_2)^2 = 0$$

або

$$(p_1{}^2 - x_1{}^2 - y_1{}^2) + 2\,(p_1 p_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) \,.\, \lambda + (p_2{}^2 - x_2{}^2 - y_2{}^2) \,.\, \lambda^2 = 0,$$

а узглянивши рівняня (10) і (15), одержимо

$$\lambda^2 + 2\,\lambda \,.\, ch\, d + 1 = 0.$$

Рівнанє се дає корінї

$$\lambda_1 = -e^{d} \text{ і } \lambda_2 = -e^{-d}.$$

Тим самим

$$(P'_1 \; P'_2 \; D_1 \; D_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2d},$$

а

$$(21) \quad d = \tfrac{1}{2} \, ln \, (P'_1 \; P'_2 \; D_1 \; D_2).$$

5. **Кут двох прямих.** Нехай будуть на площі дані дві перетинаючі ся прямі

$$g_1 (u_1, v_1, w_1) \text{ і } g_2 (u_2, v_2, w_2).$$

Кут $\alpha = \sphericalangle g_1 g_2$ на підставі взору (16) буде виражений рівнанєм

$$\cos \alpha = u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2.$$

Після уваги в горі в уступі 2. відповідні граничні кола g'_1 і g'_2 мають ті самі рівнаня, що прямі g_1 і g_2 на площі т. є

$$(g'_1) \; u_1 x + v_1 y - w_1 p = 0$$
$$(g'_2) \; u_2 x + v_2 y - w_2 p = 0$$

Тим самим сорядні однородні граничних кіл g'_1 і g'_2 будуть такі

$$g'_1 . (u_1, v_1, - w_1) \text{ і } g'_2 (u_2, v_2, - w_2).$$

Кожде инше граничне коло, що переходить через точку пересічи кіл g'_1 і g'_2 має сорядні

$$u_1 + \lambda u_2, \; v_1 + \lambda v_2, \; -(w_1 + \lambda w_2).$$

Шукаймо тепер λ для таких граничних кіл d_1 і d_2, що є стичними основного кола (20), якого рівнанє в лінійних сорядних звучить

$$u^2 + v^2 - w^2 = 0$$

Для таких λ буде

$$(u_1 + \lambda u_2)^2 + (v_1 + \lambda v_2)^2 - (w_1 + \lambda w_2)^2 = 0$$

або

$$(u_1^2 + v_1^2 - w_1^2) + 2 (u_1 u_2 + v_1 v_2 - w_1 w_2) \lambda + (u_2^2 + v_2^2 - w_2^2) \lambda^2 = 0$$

після взорів (13) і (16) се рівнанє зводить ся до

$$1 + 2 \lambda . \cos \alpha + \lambda^2 = 0,$$

а звідси

$$\lambda_1 = - e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = - e^{-i\alpha}$$

А з того слїдує

$$(g'_1 \, g'_2 \, d_1 \, d_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2 i \alpha}$$

або

$$(22) \quad \alpha = \frac{1}{2i} \ln (g'_1 \, g'_2 \, d_1 \, d_2).$$

6. **Рух в площі** означує ся рівнанями (17) і (18). Тими самими рівнанями означує ся на граничній кулї ті метові трансформації, при яких основне коло остає без зміни.

7. **Мет на граничну кулю метовим означенєм мір.** З повисшого бачимо, що кидаючи площу на граничну кулю одержуємо представленє ґеометрії Лобачевського при помочи метового означеня мір. При тім основною кривою другого степеня є коло о рівнаню (20)

$$x^2 + y^2 - p^2 = 0,$$

стала для означеня довжини $c = \frac{1}{2}$, а для означеня кутів $c' = \frac{1}{2i}$[1]. При помочи нашого мету ми є в можности до кождого твердженя ґеометрії Лобачевського найти відповідне твердженнє на граничній кулї, отже в евклїдовій ґеометрії і на відворот. Тому можемо бути певні, що нїколи не знайде ся противорічність в ґеометрії Лобачевського, бо тодї мусїлаб бути суперечність і в евклїдовій ґеометрії.

---

[1] Klein: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Annalen IV. 1871, ст. 573—625 і VI. 1873, ст. 112—145.

INHALT.

In dieser Arbeit zeigt der Verfasser, dass die Projektion der Geometrie in der Lobatschefskij-schen Ebene auf eine Grenzkugel mit Hilfe der Axen der letzteren die projektive Massbestimmung ist. Auf solche Weise wurde die Lobatschefskij-sche Geometrie in der Ebene mit der euklidischen auf der Grenzfläche verbunden und man ist in der Lage mit Hilfe dieses Wurfes zu jeder Figur in der Lobatschefskij-schen Ebene die entsprechende auf der Grenzfläche d. h. in der euklidischen Geometrie zu finden. Daraus folgt, dass in der Lobatschefskij-schen Geometrie keine Widersprüche möglich sind, weil dann auch in der entsprechenden Figur auf der Grenzkugel d. i. in der euklidischen Geometrie Widersprüche vorkommen müssten und das ist unmöglich.