До теорії евольвент.

Написав

Др. Володимир Левицький.

(Zur Theorie der Evolventen von Dr. Wladimir Lewyckyj).

Наколи евольвента є $f(xy) = 0$ (1), то єї еволюта має — як відомо — рівнаннє $\varphi(\xi\eta) = 0$, яке є вислїдом елімінації з рівнання 1) і рівнань:

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2), \quad \eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \qquad 2)$$

На відворот до рівнання евольвенти дійдем через еліміна-цію ξ і η з рівнань 2) і рівнання $\varphi(\xi\eta) = 0$. Дістанемо тодї ріж-ничкове рівнаннє евольвенти, яке є взагалї тяжке до зінте-ґрованя.

В нинїшній розвідці розслїджую кілька случаїв розвязки ріжничкового рівнання евольвенти, які можуть представити ін-терес і з огляду на інтеґрованє тих рівнань і з огляду на одер-жані типи евольвент.

I.

1. Приймім, що еволюта є прямою лїнією о рівнанню:

$$\eta = a\xi + b \qquad 3),$$

тодї ріжничкове рівнаннє евольвенти є після 2):

$$ax - \frac{ay'}{y''}(1 + y'^2) + b = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) \qquad 4)$$

або:

$$ax = y + \frac{1}{y''}(1 + ay' + y'^2 + ay'^3) - b.$$

Зріжничкуймо се рівнаннє, то дістанемо:

$$a = y' + \frac{1}{y''^2}\left\{y''(2y'y'' + ay'' + 3ay'^2y'') - y'''(1 + y'^2 + ay' + ay'^3)\right\}.$$

Звідси слїдує:

$$ay''^2 = 3y'y''^2 + ay''^2 + 3ay'^2y''^2 - y'''(1 + y'^2)(1 + ay')$$

або через редукцію:

$$3y'y''^2(1 + ay') = y'''(1 + y'^2)(1 + ay').$$

З сего виходить, що або:

$$1 + ay' = 0 \quad 5) \quad \text{або:} \quad 3y'y''^2 = y'''(1 + y'^2). \qquad 6)$$

З рівнання 5) слїдуєть:

$$y' = -\frac{1}{a} \quad \text{т. є.} \quad y = -\frac{x}{a} + c \qquad 7)$$

значить ся евольвента є в сїм случаю прямою, прямовісною до еволюти. Евольвенти творять жмут ∞^1 прямих, рівнобіжних до себе.

Ріжничкове рівнаннє 6) дасть:

$$\frac{3y'y''}{1 + y'^2} = \frac{y'''}{y''}.$$

Через інтеґрованє дістанемо:

$$\log y'' = \frac{3}{2}\log(1 + y'^2) + \log c_1$$

т. є.

$$y'' = c_1 (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

або:

$$y''^2 = c_1^2(1 + y'^2)^3. \qquad 8)$$

Щоби зінтеґрувати се рівнаннє, покладім:

$$y' = tg\varphi, \qquad y'' = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{cos^2\varphi},$$

отже:

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}{cos^4\varphi} = \frac{c_1^2}{cos^6\varphi}.$$

З відси:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\frac{c_1}{cos\,\varphi},$$

отже:

$$\pm sin\,\varphi = c_1 x + c_2.$$

А що:

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}, \quad \text{т. є.} \quad tg\varphi = \frac{\pm(c_1x+c_2)}{\sqrt{1-(c_1x+c_2)^2}},$$

то дістанемо:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{c_1x+c_2}{\sqrt{1-(c_1x+c_2)^2}}.$$

Інтеґрал сего рівнання дає:

$$y = \mp\frac{1}{c_1}\sqrt{1-(c_1x+c_2)^2} + c_3,$$

отже рівнаннє евольвенти буде:

$$(c_1y - c_1c_3)^2 + (c_1x+c_2)^2 = 1. \qquad 9)$$

Є се рівнаннє кола. Наколи вставимо в рівнаннє 4) вартости на y, y', y'', дістанемо між постійними звязь:

$$c_1c_3 = bc_1 - ac_2,$$

з чого слідує, що рівнаннє 9) має в дійсности лиш дві постійні, отже рівнаннє 9) представляє жмут ∞^2 колес.

2. Пошукаймо евольвенти для осий сорядних.

Для оси $\eta\eta$ еволюта є $\xi = 0$, а тоді після 2) ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) = 0.$$

Через зріжничкованє дістанемо;

$$1 = \frac{y''(y''+3y'^2y'') - y'''(1+y'^2)y'}{y''^2}$$

або:

$$y'(3y'y''^2 - y''' - y'''y'^2) = 0.$$

Звідси слідує або:

$y' = 0$, т. є. $y = Const$ (прямі рівнобіжні до оси xx)

або:

$$3y'y''^2 - y'''(1+y'^2) = 0.$$

Се є рівнаннє 6), отже і в сїм случаю дістанемо жмут ∞^2 евольвент, що є колами.

Для оси $\xi\xi$ еволюта є $\eta = 0$, а ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$y + \frac{1}{y''}(1+y'^2) = 0$$

або:

$$yy'' + 1 + y'^2 = 0. \qquad 10)$$

Через зріжничковане дістанемо:

$$3y'y'' + yy''' = 0,$$

т. є.

$$\frac{3y'}{y} + \frac{y'''}{y''} = 0.$$

З відси слїдує:

$$3\,log\,y + log\,y'' = log\,c_1 \qquad 11)$$

або:

$$y^3 y'' = c_1.$$

А що після 10)

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}, \text{ то:}$$

$$y^2(1 + y'^2) = -c_1$$

або:

$$(yy')^2 = -(y^2 + c_1)$$

$$yy' = \pm i\sqrt{y^2 + c_1}.$$

Покладім: $y^2 + c_1 = t^2$, $y = \pm\sqrt{t^2 - c_1}$, $y' = \pm\dfrac{t\dfrac{dt}{dx}}{\sqrt{t^2 - c_1}}$,

то дістанемо:

$$yy' = t\frac{dt}{dx} \text{ або:}$$

$$\pm it = t\frac{dt}{dx}, \quad \text{т. є.} \quad \frac{dt}{dx} = \pm i$$

$$t = \pm ix + c_2,$$

отже:

$$y = \pm\sqrt{(c_2 \pm ix)^2 - c_1}$$

а звідси:

$$x^2 + y^2 \mp 2c_2 ix = c_2^2 - c_1.$$

Се є жмут мнимих колес. Щоби они були дійсні, мусїло би бути $c_2 = 0$. Тодї однак:

$$x^2 + y^2 = -c_1.$$

Се є також мниме коло, бо c_1 не може бути відємне, так як тодї в рівнанню 11) $log\,c_1$ бувби числом мнимим. c_1 не може бути й 0 ($x^2 + y^2 = 0$ — початок сорядних), бо тодї

$$log\,c_1 = -\infty.$$

II.

Приймім тепер, що еволюта є гіперболею о рівнанню, віднесенім до асимптот, т. є.:

$$\xi\eta = c.$$

Тоді з рівнання 2) слідуєть:

$$\left[x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right]\left[y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)\right] = c$$

або:

$$x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = \frac{c\,y''}{1 + y'^2 + y\,y''}.$$

Через зріжничкованє дістанемо:

$$1 - \frac{y''(y'' + 3y'^2 y'') - y'''(1 + y'^2)y'}{y''^2} =$$

$$= \frac{cy'''(1 + y'^2 + y\,y'') - c\,y''(3\,y'y'' + y\,y''')}{(1 + y'^2 + y\,y'')^2}$$

або по упорядкованню:

$$\frac{y'''\,y'(1 + y'^2)}{y''^2} - 3\,y'^2 - \frac{c\,y'''(1 + y'^2)}{(1 + y'^2 + y\,y'')^2} = -\frac{3\,c\,y'y''^2}{(1 + y'^2 + y\,y'')^2}$$

с. є.:

$$y'''(1+y'^2)\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1 + y'^2 + y\,y'')^2}\right] = 3\,y'\left[y' - \frac{c\,y''^2}{(1 + y'^2+y\,y'')^2}\right]$$

або:

$$y'''(1+y'^2)\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right] = 3\,y'\,y''^2\left[\frac{y'}{y''^2} - \frac{c}{(1+y'^2+y\,y'')^2}\right].$$

Звідси дістанемо два ріжничкові рівнання:

$$y'''(1 + y'^2) - 3\,y'\,y''^2 = 0 \qquad 12)$$

с. є.:

$$3\,y'\,y''^2 = y'''(1 + y'^2)$$

і:

$$\frac{y'}{y''^2} = \frac{c}{(1 + y'^2 + y\,y'')^2} \qquad 13)$$

Рівнаннє 12) є вже нам звісне; оно дає жмут ∞^2 еволь-вент, що є **колами**.

Розслідім тепер рівнаннє 13); напишім его в виді:

$$y' = \frac{c\,y''^2}{(1 + y\,y'' + y'^2)^2}.$$

А що:

$$(1 + y y'' + y'^2) = \frac{d}{dx}(x + y y'),$$

то дістанемо:

$$\left[\frac{d}{dx}(x + y y')\right]^2 = \frac{c y''^2}{y'}$$

або:

$$\frac{d}{dx}(x + y y') = \frac{a y''}{\sqrt{y'}} \qquad 14)$$

де:

$$a = \pm \sqrt{c}.$$

А що:

$$\frac{y''}{\sqrt{y'}} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{y'}),$$

то дістанемо:

$$\frac{d}{dx}(x + y y') = a \frac{d}{dx}(2\sqrt{y'}),$$

а по зінтеґрованю:

$$x + y y' = 2 a \sqrt{y'} + b \qquad 15)$$

де b є постійна інтеґрації.

Щоби розвязати рівнаннє 15), напишім єго в формі:

$$y = -\frac{x}{y'} + \left(\frac{b}{y'} + \frac{2a}{\sqrt{y'}}\right) = -\frac{x}{p} + \left(\frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}}\right),$$

де:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Положім:

$$-\frac{1}{p} = \varphi(p), \quad \frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}} = \psi(p),$$

то рівнаннє 15) прийме вид:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \qquad 16)$$

Є се рiжничкове рiвнаннє Lagrange'a.

Зріжничкуймо єго що до x, то дістанемо:

$$p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}.$$

Звідси:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p) \,.\, x}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

А що:
$$\varphi'(p) = p^{-2}, \quad \psi'(p) = -bp^{-2} - ap^{-\frac{3}{2}},$$
$$p - \varphi(p) = p + \frac{1}{p} = \frac{p^2+1}{p},$$
то дістанемо:
$$\frac{dx}{dp} = \frac{px}{p^2(p^2+1)} - \frac{p}{p^2+1}\left(\frac{b}{p^2} + \frac{a}{p^{3/2}}\right)$$
або:
$$\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p(p^2+1)} - \frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}$$
т. є.:
$$\frac{dx}{dp} = I(p) . x + Z(p), \qquad 17)$$
де:
$$I(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}, \quad Z(p) = -\frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}.$$

Рівнанне 17) є рівнанне лінїйного типу, отже після форми Euler'а єго інтеґрал має вид:
$$x = Ce^{-\int I(p)\,dp} - e^{-\int I(p)\,dp} \int Z(p)\, e^{\int I(p)\,dp}\, dp, \qquad 18)$$
де C є постійна інтеґрованя.

Інтеґрал:
$$\int I(p)\,dp = \int \frac{dp}{p(p^2+1)} = \int \frac{dp}{p} - \int \frac{p\,dp}{p^2+1} =$$
$$= \log c_1 + \log p - \frac{1}{2} \log (p^2+1) = \log \frac{c_1 p}{\sqrt{(p^2+1)}}$$
(c_1 постійна інтеґрованя); в виду того:
$$e^{-\int I(p)\,dp} = \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}.$$

Інтеґрал:
$$\int Z(p)\, e^{\int I(p)\,dp}\, dp = -\int \frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)} \; \frac{c_1 p}{\sqrt{p^2+1}}\, dp =$$
$$= -c_1 \int \frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}\, dp =$$

$$= -bc_1\int\frac{dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}} - ac_1\int\frac{p^{\frac{1}{2}}dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}.$$

Інтеґрал:

$$I_1 = \int\frac{dp}{(p^2+1)\sqrt{p^2+1}}$$ перейде через субституцію:

$$p = tg\varphi,\quad dp = \frac{d\varphi}{cos^2\varphi},\quad p^2+1 = sec^2\varphi = \frac{1}{cos^2\varphi}$$

на інтеґрал:

$$I_1 = \int cos\,\varphi\, d\varphi = sin\,\varphi + c_2 = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} + c_2 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + c_2.$$

Інтеґрал:

$$I_2 = \int\frac{\sqrt{p}\,dp}{\sqrt{(p^2+1)^3}} = \int p^{\frac{1}{2}}(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}\,dp$$

переходить через підставлене $p = q^2$ на інтеґрал:

$$I_2 = 2\int q^2(1+q^4)^{-\frac{3}{2}}\,dq.$$

Є се біноміяльний інтеґрал Eulera.

А що ані сума виложників: $\frac{m+1}{n}$, ані $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$, де $m=2$, $n=4$, $\frac{p}{q} = -\frac{3}{2}$, не є числом цілим, тому після дослідів Чебишева не можна звести сего інтеґрала до вимірної форми.

Щоби розслідити характер сего інтеґрала, вставмо: $p = tg\varphi$, $dp = \frac{d\varphi}{cos^2\varphi}$, тоді:

$$I_2 = \int\frac{\sqrt{tg\,\varphi}}{sec^3\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \int(sin\,\varphi\, cos\,\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{sin\,2\varphi}\,d\varphi.$$

А коли вставимо: $sin\,2\varphi = z$, дістанемо:

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{z}{1-z^2}}\,dz.$$

Підставмо тепер $z = \frac{1}{s}$, то в легкий спосіб дістанемо:

$$I_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{s^3 - s}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3 - 4s}}.$$

Напишім I_2 в виді:

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

то бачимо, що I_3 є **еліптичним інтеґралом** третого рода в формі Weierstrass'a, де g_2 і g_3 є незмінниками функції $s = p(u)$. Притім $g_2 = 4$, $g_3 = 0$. А що:

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2), \qquad g_3 = 4e_1\, e_2\, e_3,$$

де $\qquad e_1 = p(\omega), \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p(\omega')$

(ω і ω' півперіоди функції p), то в виду сего:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2$$

$$e_1\, e_2\, e_3 = 0.$$

Приймім, що $e_3 = 0$, тоді: $e_2 = \sqrt{2 - e_1^2}$, а тоді модул Jacobi виносить:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\sqrt{2 - e_1^2}}{e_1}.$$

і можна інтеґрал I_2 перемінити через відповідне перетворенє на еліптичний інтеґрал Legendre'a або Jacobi. Се однак не входить в обсяг теперішних наших розслїдів.

Так як:

$$s = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1 + tg^2\varphi}{2\, tg\varphi} = \frac{1 + p^2}{2p},$$

то:

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, F\left(\frac{1 + p^2}{2p}\right).$$

В виду сего формула 18) прийме вид:

$$x = C\frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p} - \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}\left[-bc_1\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - bc_1c_2 + \frac{ac_1}{\sqrt{2}}\, F\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)\right]$$

або:

$$x = \frac{\sqrt{p^2+1}}{c_1 p}\left\{\frac{b\, c_1 p}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ac_1}{\sqrt{2}}\, F\left(\frac{1+p^2}{2p}\right) + C_1\right\} \qquad 19)$$

де: $C_1 = C + b\, c_1\, c_2$.

Скомбінуймо сю форму з формулою 16), т. є.

$$y = -\frac{x}{p} + \frac{b}{p} + \frac{2a}{\sqrt{p}},$$

то з послїдного рівнання вийде:

$$p = \frac{2a^2 + (b-x)y \pm 2a\sqrt{a^2 + (b-x)y}}{y^2},$$

а коли се вставимо в рівнаннє 19), дістанемо на рівнаннє евольвенти загальну форму:

$$G(x, y, b, c, C_1) = 0. \qquad 20)$$

Се є жмут ∞^3 евольвент для гіперболї $\xi\eta = c$. Як з повисших розслїдів видно, є се переступні криві з огляду на еліптичний інтеґрал.

Очивидно для иньших кривих вийдуть ріжничкові рівнання евольвент єще більше скомплїковані, а їх розвязка буде взагалї дуже тяжка до переведення.

III.

Возьмім загальне рівнаннє еволюти у видї:

$$\eta = \Phi(\xi),$$

де:

$$\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2), \quad \xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2),$$

тодї ріжничкове рівнаннє евольвенти є:

$$y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = \Phi\left[x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right].$$

Зріжничкуймо се рівнаннє, то дістанемо:

$$y' + \frac{2y'y''^2 - y'''(1 + y'^2)}{y''^2} =$$

$$= \Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right] . \left\{1 - \frac{y''^2(1+y'^2) + 2y'^2y''^2 - y'''y'(1+y'^2)}{y''^2}\right\},$$

або по впорядкованню:

$$3y'y''^2 - y'''(1+y'^2) = -\Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2)\right] . y'\{3y'y''^2 - y'''y'(1+y'^2)\}.$$

З відси слїдує, що дістанемо слїдуючі ріжничкові рівнання евольвент:

$$3y'y''^2 - y'''(1 + y'^2) \qquad 1)$$

$$\Phi'\left[x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2)\right]y' = -1 \qquad 2)$$

Друге рівнаннє є характеристичне для даної кривої $\eta = \Phi(\xi)$, перше для всїх кривих.

Перше рівнаннє, написане в видї:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3y'y''}{1 + y'^2}$$

є вже нам звісне зі ст. 66 і воно висловлює слїдуюче твердженнє:

До кождої еволюти належать два жмути евольвент, оден жмут спеціяльний для кождої кривої, другий жмут колес, зн. між всїми евольвентами якоїнебудь кривої лїнії находить ся все жмут колес, той сам для всїх кривих.

Львів, в січни 1922.

Resumé

In dieser Abhandlung behandle ich einige Fälle der Lösung der Differentialgleichung einer Evolvente.

I. Ist die Evolute eine Gerade, dann bilden die Evolventen entweder eine Schar der parallelen Geraden oder eine Kreiseschar. Die zur xx-Achse gehörigen Evolventen bilden eine Schar der imaginären Kreise.

II. Ist die Evolute eine Hyperbel von der Form $xy = c$, dann bekommen wir zwei Evolventenscharen; eine bildet eine Kreiseschar, die zweite ist durch die Differentialgleichung:

$$x + yy' = 2a\sqrt{y'} + b$$

($a = \pm\sqrt{c}$, b eine Constante) charakterisiert. Die obige Differentialgleichung ist eine Gleichung Lagrange'schen-typus und lässt sich in die Euler'sche Formel:

$$x = Ce^{-\int I(p)\,dp} - e^{-\int I(p)\,dp} \cdot \int Z(p)\,e^{\int I(p)\,dp}\,dp$$

überführen, wobei:

$$I(p) = \frac{1}{p\,(p^2+1)}, \quad Z(p) = -\frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p\,(p^2+1)}, \quad p = y'$$

bedeuten.

Da das Integral

$$\int Z(p)\,e^{\int I(p)\,dp}\,dp = -\frac{b\,c_1\,p}{\sqrt{1+p^2}} - b\,c_1\,c_2 + \frac{ac_1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3-4s}}$$

(c_1 c_2 constante Grössen) gleich ist, wobei $s = \wp(u)$ (Weierstrassche Funktion) bedeutet, also elliptische Transzendenten enthält, so bekommt man für zweite Evolventenschar einer Hyperbel eine Schar von transzendenten Kurven, die der Gleichung:

$$G\,(x\,y\,b\,c_1\,C_1) = 0$$

(c_1 C_1 constant) Genüge leisten.

III. Lehrsatz: Jede zur beliebigen Evolute gehörige Evolventenschar besteht im allgemeinen aus zwei Scharen, u. zw. einer speziellen Kurvenschar, die für gegebene Evolute charakteristisch ist, und einer allgemeinen Kreiseschar, die für alle Evoluten dieselbe ist.