М. Кравчук (Київ).

Про існування похідних у функцій дійсного змінного.

1. Нехай поблизу точки $x = 0$, нпр. на однім із інтервалів

$$(1) \qquad (0, +\alpha),\ (-\beta, 0),\ (-\beta, +\alpha)$$

функцію $y = f(x)$ можна представити в формі

$$(2) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad + a_k x^k + a(x) \,.\, x^{k+r} \qquad (r > 0),$$

де $a(x)$ є обмежена функція від x. Тоді, як легко бачити з (2), існує (і не залежить від λ) число

$$(3) \qquad \overset{[l]}{y}(0) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta^l y(\lambda \Delta x)}{\Delta^l x} = \lim_{h=0} \frac{f(\overline{l+\lambda} h) - l f(\overline{l-1+\lambda} h) + \ldots + (-1)^l f(\lambda h)}{h^l},$$

як що λ є обмежене число і $l \leqq k$. Очевидно тут за λ і за h треба брати такі числа, щоби при досить малім h числа

$$(l - i + \lambda) h \qquad (i = 0, 1, \ldots, l)$$

належали до інтервалу (1).

2. Нехай тепер якась функція $y = f(x)$ має на інтервалі (1) таку властивість, що величина

$$\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}} = \frac{f(x + \overline{k+1}\, h) - (k-1) f(x + k h) + \ldots + (-1)^{k+1} f(x)}{h^{k+1}}$$

є обмежена. Тоді будуть обмежені й функції

$$(4) \qquad y,\ \frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2},\ \ldots,\ \frac{\Delta^k y}{\Delta x_k}.$$

Справді, впровадивши зазначення

$$\frac{x}{n} = \Delta x,\ f(0) = y_0,$$

$$\Delta y_i = f\left(\frac{i+1}{n} x\right) - f\left(\frac{i}{n} x\right),$$

$$\Delta^2 y_i = f\left(\frac{i+2}{n} x\right) - 2 f\left(\frac{i+1}{n} x\right) + f\left(\frac{i}{n} x\right),$$

де n є ціле додатне число, візьмімо тотожність:

$$(5)\qquad y = y_0 + x\,\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x(x-\Delta x)}{1\,.\,2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \quad +$$

$$+\frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-\overline{k-1}\,\Delta x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\,\frac{\Delta_k y_0}{\Delta x_k} + R_k(x,\,\Delta x),$$

де

$$(6)\quad R_k(x,\Delta x) = \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x)(x-\overline{i+2}\Delta x)\ldots(x-\overline{i+k}\Delta x)}{1\quad 2\quad 3\quad .\,k}\,\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\Delta x$$

Її легко перевірити переходом від k до $k+1$, перетворивши (6) так:

$$R_k\,(x,\,\Delta x) = \frac{(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-k\Delta x)}{1\quad 2\quad .\,k}\,.\,\frac{\Delta^{k+1}y_0}{\Delta x^{k+1}}\,\Delta x +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-k}\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x)\ldots(x-\overline{i+k}\Delta x)}{1\quad 2\quad k}\left(\frac{\Delta^{k+1}y_0}{\Delta x^{k+1}} + \sum_{j=0}^{i-1}\frac{\Delta^{k+2}y_j}{\Delta x^{k+1}}\right)\Delta x =$$

$$+\left[\frac{(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots(x-k\Delta x)}{1\quad 2\quad k} + \sum_{i=1}^{n-k}\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x)\ldots(x-\overline{i+k}\Delta x}{1\,.\,2\quad k}\right]\frac{\Delta^{k+1}y_0}{\Delta x^{k+1}}\,\Delta x +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-k}\left[\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x)\ldots(x-\overline{i+k}\Delta x)}{1\quad 2\quad k}\quad\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\Delta^{k+2}y_j}{\Delta x^{k+1}}\right]\Delta x =$$

$$= \frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-k\Delta x)}{1\quad 2\quad (k+1)}\,.\,\frac{\Delta^{k+1}y_0}{\Delta x^{k+1}} + R_{k+1}\,(x,\,\Delta x)$$

Давши тепер у формулі (5) змінному x $k+1$ ріжних вартостей

$$x_j\qquad (j = 0,\ 1,\quad .,\ k),$$

таких, що числа

$$\frac{x_j}{\Delta x} = n_j\qquad (j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k)$$

є цілі додатні, дістанемо $k+1$ лінійних рівнань

$$(7)\quad y(x_j) = y_0 + x_j\,\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x_j(x_j-\Delta x)}{1\,.\,2}\,\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \quad +$$

$$+\frac{x_j(x_j-\Delta x)\ \ldots\ (x_j-\overline{k+1}\Delta x)}{1\quad 2\quad k}\,\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} + R_k\,(x_j,\,\Delta x)$$

що до величин

$$(8)\qquad y_0,\ \frac{\Delta y_0}{\Delta x},\quad .,\ \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k}$$

Коли числа x_j взяти так, щоб абсолютні вартости ріжниць між ними були більші від якогось сталого числа, то побачимо, розвязавши систему (7), що числа (8) є обмежені. З цих міркувань випливає, розуміється, й обмеженість величин (4).

Зауважмо тут, що для обмежености чисел (8) досить, щоб була обмежена величина (6).

3. Коли тепер вести Δx до 0 так, щоб число $R_k(x, \Delta x)$ ішло до певної границі, то й числа (8) ітимуть до певних скінчених границь a_0, a_1, ., 1 . 2 ka_k, і з (5) дістанемо:

(9) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \lim R_k(x, \Delta x),$$

що дає (2) з $r = 1$, коли $\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}}$ є величина обмежена, та й при деяких загальніших умовах, що їх буде виявлено далі.

Звідси висновок: обмеженість виразу $\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}}$ є достатня умова для існування k перших суцільних похідних типу (3) у функції $y = f(x)$ на інтервалі (1).

4. Тепер можна довести, що при цих самих умовах функція $y = f(x)$ має й звичайні похідні

$$y^{(l)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

на тім інтервалі. Для доводу візьмімо функцію

$$F(x) = \int_0^x \int_0^x \quad \int_0^x y^{[l]}(x)\, dx^l$$

З огляду на обмеженість функції $\frac{\Delta^l y}{\Delta x_l}$ маємо*):

$$F(x) = \lim_{\Delta x = 0} \int_0^x \int_0^x \quad \int_0^x \frac{\Delta^l y}{\Delta x^l}\, dx^l = \lim_{h=0} \frac{1}{h^l} \int_x^{x+h} \int_x^{x+h} \quad \int_x^{x+h} f(x)\, dx^l + \varrho(x),$$

де $\varrho(x)$ є многочлен ступеня не старшого за $l-1$; отже

$$F(x) = f(x) + \varrho(x)$$

А що $F(x)$ очевидно має похідні першу, другу, . ., l-ту, то має їх і наша функція $y = f(x)$.

5. Коли на інтервалі (1) вираз $\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}}$ одностайно йде до нуля, то, як бачимо з (9) та (6), функція $y = f(x)$ є многочлен ступеня не старшого за k. Це твердження взагальнює відому Schwarz'ову теорему про функцію, що справджує умову

(10) $$\lim_{h+0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = 0.$$

---

*) Пор. нпр. de la Vallée Poussin. Intégrale de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, 1916, стор. 44.

Вимога одностайности тут є істотна, як показує нпр. випадок рівности

$$lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = lim \frac{f(x+3h)-3f(x+h)+3f(x-h)-f(x-3h)}{h^3} = 0,$$

що її справджує функція $y = |x|$ на інтервалі $(-1, +1)$; вона неминуча й для Schwarz'ового випадку: $k = 1$, коли взяти в (10) за чисельник вираз $f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ замість $f(x+h) - - 2f(x) + f(x-h)$, як показує той самий приклад.

6. Спосіб досліду, що тут подано, є придатний, з відповідними змінами, також і для функцій кількох змінних. Не беручи справи загально, розвяжімо тим часом питання: коли у функції $f(x, y, \ldots)$ змінні розділяються, тобто коли її можна представити в формі

$$f(x, y, \ldots) = \varphi(x) + \psi(y) + \ldots ?$$

Досить розібрати випадок функції двох змінних:

$$z = f(x, y).$$

Зазначмо:

$$\frac{x}{m} = \Delta x, \quad \frac{y}{n} = \delta y$$

$$z_{ij} = f(i\Delta x, j\Delta y) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Delta z_{ij} = z_{i+1,j} - z_{ij}$$

$$\delta z_{ij} = z_{i,j+1} - z_{ij}$$

$$\Delta\delta z_{ij} = \delta\Delta z_{ij} = z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j} - z_{i,j+1} + z_{ij}$$

Тоді

$$\begin{aligned} (10)\quad z = z_{00} &+ \Delta z_{00} + \Delta z_{10} + \qquad + \Delta z_{m-1,0} + \\ &+ \delta z_{00} + \delta\Delta z_{00} + \delta\Delta z_{10} + \qquad + \delta\Delta z_{m-1,0} + \\ &+ \delta z_{01} + \delta\Delta z_{01} + \delta\Delta z_{11} + \qquad + \delta\Delta z_{m-1,1} + \\ & \\ &+ \delta z_{0,n-1} + \delta\Delta z_{0,n-1} + \delta\Delta z_{1,n-1} + \qquad + \delta\Delta z_{m-1,n-1}, \end{aligned}$$

що можна написати й так:

$$(11)\qquad U = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = \sum_{i=0,\ j=0}^{i=m-1,\ j=n-1} \delta\Delta z_{ij}$$

Нехай $\frac{\delta\Delta z}{\Delta x\delta y}$ є величина обмежена в обсягу $(0, x; 0, y)$, отже нехай

$$\left|\frac{\delta\Delta z}{\Delta x\delta y}\right| < K,$$

де K є стале число; тоді з (11) дістанемо:

$$|f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)| < K . |xy|.$$

Маємо вислід: коли $\frac{\delta\Delta z}{\Delta x \delta z}$ одностайно йде до нуля в якомусь обсягу змінних x, y, то змінні в функції $z = f(x, y)$ у тім обсягу розділяються. Цей критерій розділу змінних не вимагає існування похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. Із (10) легко дістаємо:

$$z = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0) + n[\delta\Delta z_{00} + \delta\Delta z_{10} + \ldots + \delta\Delta z_{m-1,0}] +$$
$$+ (n-1)[\delta^2\Delta z_{00} + \delta^2\Delta z_{10} + \ldots + \delta^2\Delta z_{m-1,0}] +$$
$$+ (n-2)[\delta^2\Delta z_{01} + \delta^2\Delta z_{11} + \ldots + \delta^2\Delta z_{m-1,1}] +$$

$$+ 1 . [\delta^2\Delta z_{0,\, n-2} + \delta^2\Delta z_{1,\, n-2} + \ldots + \delta^2\Delta z_{m-1,\, n-2}] =$$
$$= f(x,0)+f(0,y)-f(0,0)+mn\,\delta\Delta z_{00}+(m-1)n\,\delta\Delta^2 z_{00}+\ldots+1 . n\,\delta\Delta^2 z_{m-2,0}+$$
$$+ m(n-1)\delta^2\Delta z_{00}+(m-1)(n-1)\delta^2\Delta^2 z_{00}+\ldots+1 . (n-1)\delta^2\Delta^2 z_{m-2,0}+$$
$$+ m(n-2)\delta^2\Delta z_{01}+(m-1)(n-2)\delta^2\Delta^2 z_{01}+\ldots+1 . (n-2)\delta^2\Delta^2 z_{m-2,1}+$$

$$+ m . 1\,\delta^2\Delta z_{0,\, n-2}+(m-1) . 1\,\delta^2\Delta^2 z_{0,\, n-2}+\ldots+1 . 1 . \delta^2\Delta^2 z_{m-2,\, n-2}$$

або:

$$z = f(0, y) + f(x, 0) - f(0, 0) + xy\,\frac{\delta\Delta z_{00}}{\Delta x \delta y} + \tag{12}$$
$$+ y\sum_{i=1}^{m-1}(x - \Delta i x)\frac{\delta\Delta^2 z_{i-1,0}}{\Delta x^2 \delta y}\Delta x + x\sum_{j=1}^{n-1}(y - j\delta y)\,\frac{\delta^2\Delta z_{0,\, j-1}}{\Delta x \delta y^2}\,\delta y +$$
$$+ \sum_{i=1,\, j=1}^{i=m-1,\, j=n-1}(x - i\Delta x)\,(y - j\delta y)\,\frac{\delta^2\Delta^2 z_{i-1,\, j-1}}{\Delta x_2 \delta y^2}\Delta x \delta y .$$

З останньої рівности, коли припустимо, що величини

$$\frac{\delta\Delta^2 f(x, 0)}{\Delta x^2 \delta y}, \quad \frac{\delta^2\Delta f(0, y)}{\Delta x\, \delta y^2} \quad \text{та} \quad \frac{\delta^2\Delta^2 f(x, y)}{\Delta x^2\, \delta y^2} \tag{13}$$

є обмежені, дістанемо, тими самими міркуваннями, що й для функцій одного змінного, що функція $z = f(x, y)$ має в обсягу $(0, x;\ 0, y)$ другу похідну типу $\lim \frac{\delta\Delta z}{\Delta x \delta y}$.

Правдиве є й загальніше твердження: коли $\frac{\delta\Delta^2 z}{\Delta x^2 \delta y}$ та $\frac{\delta^2\Delta z}{\Delta x \delta y^2}$

є обмежені на межі якогось обсягу, а $\frac{\delta^2\Delta_2 z}{\Delta x^2\delta y^2}$ — у цілім обсягу, то скрізь у тім обсягу існує похідна $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, хоч може не бути похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

8. Рівність (12) можна переписати так:

$$(14)\qquad U(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) =$$

$$= xy\frac{\delta\Delta z_{00}}{\Delta x\delta y} + y\sum_{i=1}^{m-1}(x - i\Delta x)\frac{\delta\Delta^2 z_{i-1,\,0}}{\Delta x^2 xy}\Delta x + \sum_{i=1,\,j=1}^{i=m-1,\,j=n-1}(y - j\Delta y)\frac{\delta^2\Delta z_{i-1,\,j-1}}{\Delta x\delta y^2}\Delta x\delta y =$$

$$= xy\frac{\delta\Delta z_{00}}{\Delta x\delta y} + x\sum_{j=1}^{n-1}(y - j\delta y)\frac{\delta^2\Delta z_{0,\,j-1}}{\Delta x\delta y^2}\delta y + \sum_{i=1,\,j=1}^{i=m-1,\,j=n-1}(x - i\Delta x)\frac{\delta^2\Delta z_{i-1,\,j-1}}{\Delta x^2\delta y}\Delta x\delta y.$$

Отож для існування звичайної похідної $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ у функції

$$U = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, x) + f(0, 0)$$

в якомусь обсягу досить, щоб величини

$$\frac{\delta\Delta^2 U}{\Delta x^2\delta y} \text{ та } \frac{\delta^2\Delta U}{\Delta x\delta y^2}$$

були обмежені в тім обсягу. Цей вислід можна поширити й на старші похідні.

9. Переходимо до загального розбору умов існування старших похідних у функцій кількох змінних.

Нехай функцію $z(x, y)$ від двох дійсних змінних можна поблизу точки (α, β) представити так:

$$(15)\quad z(x, y) = z(\alpha, \beta) + a_{10}(\alpha, \beta)(x - \alpha) + \ldots + a_{k0}(\alpha, \beta)\frac{(x-\alpha)^k}{k!} +$$

$$+ A_x(\alpha, x; y)(x-\alpha)^{k+r} + a_{01}(\alpha, \beta)(y-\beta) + a_{11}(\alpha, \beta)(x-\alpha)(y-\beta) + \ldots$$

$$+ a_{k1}(\alpha, \beta)\frac{(x-\alpha)^k}{k!}(y-\beta) +$$

$$+ a_{0l}(\alpha, \beta)\frac{(y-\beta)^l}{l!} + a_{1l}(\alpha, \beta)(x-\alpha)\frac{(y-\beta)^l}{l!} + \ldots +$$

$$+ a_{kl}(\alpha, \beta)\frac{(x-\alpha)^k}{k!}\;\frac{(y-\beta)^l}{l!} +$$

$$+ A_y(x; \beta, y)(y-\beta)^{l+s} \qquad + A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)(x-\alpha)^{k+t}(y-\beta)^{l+u}$$

$$(r > 0,\ s > 0,\ t + u > 0),$$

де функції

(16) $\qquad A_x(\alpha, x; y),\ A_y(x; \beta, y),\ A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)$

та

(17) $\qquad a_{ij}(\alpha, \beta) \qquad (i = 0, 1, \ldots, k; j = 0, 1, \ldots, l)$

є обмежені.

Із (15) взявши $\beta = y$, а потім $\alpha = x$, виводимо:

$$(18) \qquad z(x, y) = z(\alpha, y) + a_{10}(\alpha, y)(x-\alpha) + \ldots + \\ + a_{k0}(\alpha, y)\frac{(x-\alpha)^k}{k!} + A_x(\alpha, x; y)(x-\alpha)^{k+r}$$

$$(19) \qquad z(x, y) = z(x, \beta) + a_{01}(x, \beta)(y-\beta) + \ldots + \\ + a_{0l}(x, \beta)\frac{(y-\beta)^l}{l!} + A_y(x; \beta, y)(y-\beta)^{l+s}$$

Віднявши далі (18) та (19) від (15), дістанемо:

$$(20) \qquad U(x, y, \alpha, \beta) = z(x, y) - z(\alpha, y) - z(x, \beta) + z(\alpha, \beta) + \\ + \sum_{i=1}^{k}\Big(a_{i0}(\alpha, \beta) - a_{i0}(\alpha, y)\Big)\frac{(x-\alpha)^i}{i!} + \sum_{j=0}^{l}\Big(a_{0j}(\alpha\ \beta) - a_{0j}(x, \beta)\Big)\frac{(y-\beta)^j}{j!} = \\ = -\sum_{i=1,\ j=1}^{i=k,\ j=l} a_{ij}(\alpha, \beta)\frac{(x-\alpha)^i}{i!}\frac{(y-\beta)^j}{j!} + A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)(x-\alpha)^{k+i}(y-\beta)^{l+u}.$$

Очевидно, функція z є суцільна що до обох змінних x та y. Ми доведемо тепер суцільність функцій $a_{ij}(\alpha, \beta)$.

Замінивши в рівностях (18) та (19) x на $x+g$, α на $\alpha+g$, y на $y+h$ і β на $\beta+h$, дістанемо:

$$(21) \qquad z(x+g, y+h) = z(\alpha+g, y+h) + a_{10}(\alpha+g, y+h)(x-\alpha) + \ldots + \\ + a_{k0}(\alpha+g, y+h)\frac{(x-\alpha)^k}{k!} + A_x(\alpha+g, x+g; y+h)(x-\alpha)^{k+r}$$

$$(22) \qquad y(x+g, y+h) = z(x+g, \beta+h = a_{01}(x=g, \beta+h)(y-\beta) + \ldots + \\ + a_{l0}(x+g, \beta+h)\frac{(y-\beta)^l}{l!} + A_y(x+g; \beta+h, y+h)(y-\beta)_{l+}$$

Віднявши (18) від (21) та (19) від (22), легко приходимо до рівностей:

$$(23) \qquad \frac{1}{j!}\Big((a_{i0}(\alpha+g, y+h) - a_{i0}(\alpha, y)\Big) = \Big\{\frac{z(x+g, y+h) - z(x, y)}{(x-\alpha)^i} - \\ - \frac{z(\alpha+g, y+h) - z(\alpha, y)}{(x-\alpha)^i} - \frac{a_{10}(\alpha+g, y+h) - a_{10}(\alpha, y)}{(x-\alpha)^{i-1}} - \ldots \\ \ldots - \frac{a_{i-1,\,0}(\alpha+g, y+h) - a_{0,\,j-1}(x, \beta)}{(i-1)!\,(x-\alpha)}\Big\} - \\ - \Big\{\frac{a_{i+1,\,0}(\alpha+g, y+h) - a_{i+1,\,0}(\alpha, y)}{(i+1)!}(x-\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + \Big(A_x(\alpha+g,\, x+g,\, y+h) - A_x(\alpha,\, x;\, y)\Big)\,(x-\alpha)^{k-i+r}\Big\}$$

$$(24)\qquad \frac{1}{j!}\Big(a_{0j}(x+g,\, \beta+h) - a_{0j}(x,\, \beta)\Big) = \Big\{\frac{z(x+g,\, y+h)-z(x,\, y)}{(y-\beta)^j} -$$

$$-\frac{z(x+g,\, \beta+h) - z(x,\beta)}{(y-\beta)^j} - \frac{a_{10}(x+g,\, \beta+h - a_{10}(x,\beta)}{(y-\beta)^{j-1}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a_{0,j-1}(x+g,\, \beta+h) - a_{0,j-1}(x.\, \beta)}{(j-1)!\,(y-\beta)}\Big\} -$$

$$-\Big\{\frac{a_{0,j+1}(x+g,\, \beta+h) - a_{0,j+1}(x,\, \beta)}{(j+1)!}\,(y-\beta) + \ldots$$

$$\ldots + \Big(A_y(x+g;\, \beta+h,\, y+h) - A_y(x;\, \beta,\, y)\Big)(y-\beta)^{l-j+s}\Big\}$$

Припустімо, що функції

$$(25)\qquad a_{10}(\alpha,\beta),\ldots,\ a_{i-1,0}(\alpha,\beta);\ a_{01}(\alpha,\beta),\ldots,\ a_{0,j-1}(\alpha,\beta)$$

суцільні, і візьмімо числа $|x-\alpha|$ та $|y-\beta|$ такі малі (але обмежені знизу), щоб було

$$\Big|\frac{a_{i+1,0}(\alpha+g,\, y+h) - a_{i+1,0}(\alpha,\, y)}{(i+1)!}(x-\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + \Big(A_x(\alpha+g,x+g;\, y+h) - A_x(\alpha,x;\, y)\Big)(x-\alpha)_{k-i+r}\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Big|\frac{a_{0,j+1}(x+g,\, \beta+h) - a_{0,j+1}(x,\beta)}{(j+1)!}(y-\beta) + \ldots$$

$$\ldots + \Big(A_y(x+g;\, \beta+h,\, y+h) - A_y(x;\, \beta, y)\Big)(y-\beta)^{l-j+s}\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

де ε є довільно мале число (це можливо з огляду на обмеженість функцій (16) та (17)). Далі доберімо g та h так, щоб справдилися нерівности:

$$\Big|\frac{z(x+g,\, y+h) - z(x,y)}{(x-\alpha)^i} - \frac{z(\alpha+g, y+h) - z(\alpha,y)}{(x-\alpha)^i} -$$

$$-\frac{a_{10}(\alpha+g,y+h)-a_{10}(\alpha,y)}{(x-\alpha)^{i-1}} - \ldots - \frac{a_{i-1,0}(\alpha+g,y+h)-a_{i-1,0}(\alpha,y)}{(i-1)!\,(x-\alpha)}\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Big|\frac{z(x+g,\, y+h) - z(x,y)}{(y-\beta)^j} - \frac{z(x+g,\beta+h) - z(x,\beta)}{(y-\beta)^j} -$$

$$-\frac{a_{01}(x+g,\beta+h)-a_{01}(x,\beta)}{(y-\beta)^{j-1}} - \ldots - \frac{a_{0,j-1}(x+g,\beta+h)-a_{0,j-1}(x,\beta)}{(j-1)!\,(y-\beta)}\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

що можливо з огляду на суцільність функцій z та (25). А тоді з (23) та (25) випливає суцільність функцій a_{i0} та a_{0j} і заразом функції $u(x, y, \alpha, \beta)$: досить узяти за i ступнево числа 1, 2, ..., k, а за j числа 1, 2, ..., l.

Нехай далі серед функцій

$$\begin{array}{lll} a_{11}(\alpha, \beta) & & a_{k1}(\alpha, \beta) \\ & & \\ a_{1j}(\alpha, \beta) \ldots a_{i-1,j}(\alpha, \beta) & a_{ij}(\alpha, \beta) \ldots & a_{kj}(\alpha, \beta) \\ & & \\ a_{1l}(\alpha, \beta) & & a_{kl}(\alpha, \beta) \end{array}$$

ті, що їх обведено лінією, є суцільні. Доведімо суцільність функції $a_{ij}(\alpha, \beta)$; цим буде доведено, що всі функнії (17) суцільні.

Заступивши в (20) x через $x+g$, y через $y+h$, α через $\alpha+g$, β через $\beta+h$, дістанемо:

$$u(x+g, y+h, \alpha+g, \beta+h) = \tag{26}$$

$$= \sum_{i=1,\, j=1}^{i=k,\, j=l} a_{ij}(\alpha+g, \beta+h) \frac{(x-\alpha)^i}{i!} \frac{(y-\beta)^j}{j!} +$$

$$+ A_{xy}(\alpha+g, x+g; \beta+h, y+h)(x-\alpha)^{k+t}(y-\beta)^{l+u}$$

Віднявши (20) від (26), легко прийдемо до рівности:

$$\frac{1}{i!\,j!}\Big(a_{ij}(\alpha+g, \beta+h) - a_{ij}(\alpha, \beta)\Big) =$$

$$= \Bigg[\frac{u(x+g, y+h, \alpha+g, \beta+h) - u(x, y, \alpha, \beta)}{(x-\alpha)^i (y-\beta)^j} -$$

$$- \frac{a_{11}(\alpha+g, \beta+h) - a_{11}(\alpha, \beta)}{(x-\alpha)^{i-1}(y-\beta)^{j-1}} - \ldots - \frac{a_{i-1,j}(\alpha+g, \beta+h) - a_{ij}(\alpha, \beta)}{(i-1)!\,j!\,(x-\alpha)}\Bigg] -$$

$$- \Bigg\{\frac{a_{i+1,j}(\alpha+g, \beta+h) - a_{ij}(\alpha, \beta)}{(i+1)!\,j!}(x-\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a_{kl}(\alpha+g, \beta+h) - a_{kl}(\alpha, \beta)}{k!\,l!}(x-\alpha)^{k-i}(y-\beta)^{l-j} +$$

$$+ \Big(A_{xy}(\alpha+g, x+g; \beta+h, y+h) - A_{xy}(\alpha, x; \beta, y)\Big)(x-\alpha^{k-i+t}(y-\beta^{l-j+u}\Bigg\}$$

Очевидно, знов можна дібрати ріжниці $x-\alpha$ та $y-\beta$ так, щоб вираз у дужках { } був довільно малий, а потім узяти g та h такі малі, щоб довільно малий став вираз у дужках [ ]; це й доводить суцільність функції $a_{ij}(\alpha, \beta)$.

10. Із (15) маємо очевидно

(27) $$a_{ij}(\alpha,\beta) = \lim_{\Delta=0,\,\delta\beta=0} \frac{\Delta^i\delta^j z(\alpha,\beta)}{\Delta\alpha^i\delta\beta^j} \qquad (i \leq k,\ j \leq l)\,,$$

де

(28) $$\Delta z(\alpha,\beta) = z(\alpha+\Delta\alpha,\beta)-z(\alpha,\beta),\ldots;\ \delta z(\alpha,\beta) = z(\alpha,\beta+\delta\beta)-z(\alpha,\beta),\ldots$$

Отже всі частки $\frac{\Delta^i\delta^i z}{\Delta x^i \delta y^i}$ $(i \leq k, j \leq l)$ є обмежені. А що функції (28) суцільні, то з (27) дістаємо:

$$\int_0^\beta \cdots \int_0^\beta a_{ij}(\alpha,\beta)\,d\beta^j = \lim_{\Delta\alpha=0,\,\delta\beta=0} \int_0^\beta \cdots \int_0^\beta \frac{\Delta^i\delta^j z}{\Delta\alpha^i\delta\beta^j}\,d\beta^j =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha-0} \frac{\Delta^i z(\alpha,\beta)}{\Delta\alpha^i} + \varphi_1\beta^{j-1} + \varphi_2\beta^{j-2} + \ldots + \varphi_j\,,$$

де φ_p є якісь функції від α. Дальша інтеґрація дасть:

$$\int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha \int_0^\beta \cdots \int_0^\beta a_{ij}(\alpha,\beta)\,d\beta^j d\alpha^i =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha=0} \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha \frac{\Delta^i z(\alpha,\beta)}{\Delta\alpha^i}\,d\alpha^i + \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha (\varphi_1\beta^{j-1} + \ldots + \varphi_j)\,d\alpha^i =$$

$$= z(\alpha,\beta) + \Psi_1\beta^{j-1} + \Psi_2\beta^{j-2} + \ldots + \Psi_j + \Theta_1\alpha^{i-1} + \Theta_2\alpha^{i-2} + \ldots + \Theta_i\,,$$

де

$$\Psi_p = \int_0^\alpha \cdots \int_0^\alpha \varphi_q\,d\alpha^i\,,$$

а Θ_q — якісь функції від β. Звідси висновок:

$$a_{ij}(\alpha,\beta) = \frac{\partial^{i+j} z(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^i\partial\beta^j} \qquad (i = 1,\ldots,k;\ j = 1,\ldots,l)$$

Отож функція $z(x,y)$ має всі похідні

$$\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} \qquad (i = 1,\ldots,k;\ j = 1,\ldots,l)\,,$$

при тім ці похідні всі суцільні, отже їхні вартості не залежать від порядку диференціяції.

11. Нехай тепер маємо якусь функцію

$$z = f(x,y)$$

від двох дійсних змінних, що має в обсягу S усі відношення:

$$(29)\qquad \frac{\Delta^{k+1}z}{\Delta x_{k+1}},\quad \frac{\delta^{l+1}z}{\delta y^{l+1}},\quad \frac{\Delta^{k+1}\delta^{l+1}z}{\Delta x^{k+1}\delta y^{l+1}}$$

обмежені.

Подібно до того, як у п. 2, маємо тотожності:

$$(30)\qquad z = f(x,y) = f(0,y) + x\,\frac{\Delta f(0,y)}{\Delta x} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-\overline{k-1}\Delta x)}{k!}\cdot\frac{\Delta^k f(0,y)}{\Delta x^k} + R_k^x(f)$$

$$(31)\qquad u = \varphi(x,y) = \varphi(x,0) + y\,\frac{\delta\varphi(x,0)}{\delta y} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y(y-\delta y)\ldots(y-\overline{l-1}\delta y)}{l!}\cdot\frac{\delta^l\varphi(x,0)}{\delta y^l} + R_l^y(\varphi),$$

де

$$\Delta x = \frac{x}{n},\ \delta y = \frac{y}{m};\ \Delta f(0,y) = f(\Delta x, y) - f(0,y),\ldots;$$

$$\delta\varphi(x,0) = \varphi(x,\delta y) - \varphi(x,0),\ldots;$$

$$R_k^x(f) = \sum_{i=0}^{n-k}\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x)\ldots(x-\overline{i+k}\Delta x)}{k!}\quad\frac{\Delta^{k+1}f(i\Delta x,y)}{\Delta x^{k+1}}\,\Delta x;$$

$$R_l^y(f) = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{y(y-\delta y)\ldots(y-\overline{l-1}\delta y)}{l!}\cdot\frac{\delta^{l+1}\varphi(x,i\delta y)}{\delta y^{l+1}}\,\delta y.$$

Нехай

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - R_k^x(f);$$

тоді (31) перетвориться на

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{i=0,\,j=0}^{i=k,\,j=l}\frac{x(x-\Delta x)\ldots(x-\overline{i-1}\Delta x)y(y-\delta y)\ldots(y-\overline{j-1}\delta y)}{i!\,j!}$$

$$\frac{\Delta^i\delta^j f(0,0)}{\Delta x^i\delta y^j} + R_k^x(f) + R_l^y(f) - R_l^y\big(R_k^x(f)\big)$$

Звідси, подібно до того, як у пп. 3 та 4, приходимо до висновку:

Коли відношення (29) є обмежені в обсягу S, то функція Z має в тому обсягу похідну $\frac{\partial^{k+l}z}{\partial x^k\partial y^l}$ і ця похідна є суцільна.

Розуміється, тут замісць вимоги (29) можна булоб поставити слабші вимоги (як у пп. 7 та 8); ми на цьому не спиняємося, так само, як на випадку функцій від більшого числа змінних.

12. Із (6), з допомогою нерівности Cauchy, виводимо:

$$\left|R_k(x, \Delta x)\right|^2 \leqq \sum_{i=0}^{n-k} \left[\frac{(x-\overline{i+1}\Delta x) \ldots (x-\overline{i+k}\Delta x)}{1 \,.\, 2 \ldots k} \right]^2 \Delta x$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}}\right)^2 \Delta x \leqq \frac{x^{2k+2}}{(1 \,.\, 2 \ldots k)^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}}\right)^2,$$

звідки

$$\left|R_k(x, \Delta x)\right| \leqq \frac{|x|^{k+1}}{1 \,.\, 2 \ldots k} \quad \delta_{k+1},$$

де

$$\delta_l = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-l+1} \left(\frac{\Delta^l y_i}{\Delta x^l}\right)^2}.$$

Отож достатня умова існування похідної $\left(\frac{dy^k}{dx^k}\right)_0$ є обмеженість величини δ_{k+1} на інтервалі (1), або середнього квадрату величини $\frac{\Delta^{k+1} y}{\Delta x^{k+1}}$.

Так само, застосовуючи відому Hölder'ову нерівність, покажемо, що достатня умова існування k-ої похідної в точці $x = 0$ є обмеженість величини

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right]^{\frac{p}{p+1}},$$

де p є довільне додатне число.

Подібнож узагальнюються й висліди §-ів 5—8.