АНАЛОГ ФОРМУЛИ СИЛЬВЕСТРА-КЕЛЛІ ДЛЯ ІНВАРІАНТІВ ТЕРНАРНОЇ ФОРМИ

©2009 р. *Леонід БЕДРАТЮК*

Хмельницький національний університет

Редакція отримала статтю 16 січня 2009 р

Знайдено явну формулу для числа $\nu_d(n)$ лінійно незалежних однорідних інваріантів степеня n тернарної форми порядку d. Справедлива наступна формула

$$\nu_d(n) = c_d(n,0,0) + c_d(n,3,0) + c_d(n,0,3) - 2\,c_d(n,1,1) - c_d(n,2,2),$$

тут $c_d(n,i,j)$ – число невід'ємних цілих розв'язків системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} r\,\alpha_{r,s} = \frac{n\,d}{3} - \frac{i-j}{3}, \\ \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} s\,\alpha_{r,s} = \frac{n\,d}{3} - \frac{i+2\,j}{3}, \\ \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} \alpha_{r,s} = n. \end{array} \right.$$

1. Розглянемо кільце многочленів $\mathbb{C}[X_d] := \mathbb{C}[t, x_1, x_2, \ldots, x_d]$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Породжуючі елементи $\begin{pmatrix} 0,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}$ комплексної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ діють на кільці $\mathbb{C}[X_d]$ відповідно диференціюваннями D_1, D_2 :

$$\begin{aligned} D_1 &:= t\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\,x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + d\,x_{d-1}\frac{\partial}{\partial x_d}, \\ D_2 &:= d\,x_1\frac{\partial}{\partial t} + (d-1)\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_d\frac{\partial}{\partial x_{d-1}}. \end{aligned}$$

Множина $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2} = \{f \in \mathbb{C}[X_d] | D_1(f) = D_2(f) = 0\}$ утворює скінченно породжене кільце, яке в термінології класичної теорії інваріантів називається кільцем інваріантів бінарної форми порядку d. Задачу явного опису кільця інваріантів $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2}$ було вперше поставлено ще Булем в 1843 році, і в загальному випадку вона залишається нерозв'язаною до цього часу. Зокрема, невідома навіть кількість однорідних породжуючих (поліноміально незалежних) елементів кільця $\mathbb{C}[X_d]^{\mathfrak{sl}_2}$ для $d > 8$. В зв'язку з цим, гідною уваги є формула Сильвестра-Келлі, яка виражає кількість лінійно незалежних інваріантів степеня n для бінарної форми довільного порядку d. Ця кількість рівна різниці $\omega_d(n, \dfrac{d\,n}{2}) - \omega_d(n, \dfrac{d\,n}{2} - 1)$, де $\omega_d(n, i)$ - кількість цілих додатних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + d\,\alpha_d = \dfrac{d\,n - i}{2}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n. \end{cases}$$

Сильвестр у праці [3], узагальнюючи ідеї Келлі [2], вперше анонсував цю формулу, щоправда без доведення. Більше того, він вважав, що цю формулу не доведуть ще довгий час – "I am about to demonstrate a theorem which has been waiting proof for the last quarter of of a century and upwards... and I accomplished with scarcely an effort a task which I had believed lay outside the range of human power."Проте, доведення цієї формули можна знайти вже в лекціях Гільберта [4] з теорії інваріантів, які він прочитав 1897 року в Ґеттінґені. Сильвестр, використовуючи свою формулу, обчислив ряди Пуанкаре алгебр інваріантів бінарної форми для $d \leq 8$, а також дав оцінку кількості породжуючих елементів цих алгебр.

Тому виглядає доцільним отримати узагальнення формули Сильвестра-Келлі і на випадок інваріантів тернарних форм. Дамо означення кільця інваріантів тернарної форми. Розглянемо векторний $\mathbb{C}$-простір T_d тернарних форм степеня d :

$$u(x, y, z) = \sum_{i+j \leq d} \frac{d!}{i!j!(d-(i+j))!} a_{i,j}\, x^{d-(i+j)} y^i z^j,$$

де $a_{i,j} \in \mathbb{C}$. Координатне кільце $\mathbb{C}[A_d]$ простору T_d ототожнимо з ізоморфним йому кільцем многочленів A_d від $\dfrac{1}{2}(d+1)(d+2)$ змінних $a_{0,0}, a_{1,0}, \ldots, a_{0,d}$. Стандартна дія групи SL_3 підстановками на T_d індукує дію групи SL_3 (алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$) і на кільці A_d. Відповідне кільце інваріантів $A_d^{SL_3} = A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ називається кільцем інваріантів тернарної форми порядку d. Кільце $A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ є градуйованим кільцем:

$$A_d^{\mathfrak{sl}_3} = (A_d^{\mathfrak{sl}_3})_0 + (A_d^{\mathfrak{sl}_3})_1 + \cdots + (A_d^{\mathfrak{sl}_3})_n + \cdots ,$$

тут $(A_d^{\mathfrak{sl}_3})_n$ – векторний простір породжений однорідними інваріантами степеня n.

Про структуру кільця $A_d^{\mathfrak{sl}_3}$ відомо дуже мало. Відомо, що воно є скінченно породженим і для невеликих d знайдені мінімальні системи породжуючих елементів. Зокрема, для $d \leq 3$ породжуючі кільця інваріантів були обчислені ще Ґорданом [5], а для $d = 4$ мінімальна система із 331 породжуючих обчислена в докторській дисертації Е. Нетер [6].

Метою даної роботи є обчислення вимірності простору $(R_d^{\mathfrak{sl}_3})_n$, тобто кількості однорідних лінійно незалежних інваріантів степеня n для тернарної форми порядку d. Використовуючи апарат теорії зображень алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$, ми отримуємо формулу, яка є узагальненням відомої класичної формули Сильвестра-Келлі на випадок тернарної форми. Також, подаємо просте доведення класичної формули Сильвестра-Келлі.

2. На початку дамо коротке і елементарне доведення формули Сильвестра-Келлі для інваріантів бінарної форми. Ідею цього доведення ми використаємо пізніше для отримання аналогічного результату для інваріантів тернарної форми.

Нехай $V \cong \mathbb{C}^2$ – стандартне двовимірне зображення алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$. Всяке незвідне зображення $V_d = \langle v_0, v_1, ..., v_d \rangle$, $\dim V_d = d+1$, є симетричним d-степенем стандартного зображення $V = V_1$, тобто $V_d = S^d(V)$, $V_0 \cong \mathbb{C}$. Базисні елементи $\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ алгебри $\mathfrak{sl}_2$ діють на V_d диференціюваннями D_1, D_2, E за правилом :

$$D_1(v_i) = i\, v_{i-1}, D_2(v_i) = (d-i)\, v_{i+1}, E(v_i) = (d-2\,i)\, v_i.$$

Дія $\mathfrak{sl}_2$ природним чином продовжується з V_d на симетричну алгебру $S(V_d)$. Алгебра I_d,

$$I_d = S(V_d)^{\mathfrak{sl}_2} = \{v \in S(V_d) | D_1(v) = 0, D_2(v) = 0\},$$

називається алгеброю інваріантів бінарної форми порядку d.

Алгебра $S(V_d)$ є градуйованою:

$$S(V_d) = S^0(V_d) + S^1(V_d) + \cdots + S^n(V_d) + \cdots ,$$

причому, кожна компонента $S^n(V_d)$ також є цілком звідним зображенням алгебри $\mathfrak{sl}_2$ і має місце розклад

$$S^n(V_d) \cong \gamma_d(n,0)V_0 + \gamma_d(n,1)V_1 + \cdots + \gamma_d(n, d\,n)V_{d\,n}, \qquad (*)$$

тут $\gamma_d(n,i)$ – кратність, з якою компонента V_i входить у розклад $S^n(V_d)$. Зокрема, кратність $\gamma_d(n,0)$ тривіального зображення V_0 рівна числу однорідних лінійно незалежних інваріантів степеня n бінарної форми порядку d.

Власне значення довільного вагового вектора зображення W відносно картанівської підалгебри породженої елементом E називається вагою зображення W. Множину всіх ваг зображення W позначимо Λ_W, зокрема, $\Lambda_{V_d} = \{-d, -d+2, \dots, d\}$.

Характером $\mathrm{Char}(W)$ зображення W називається формальна сума

$$\mathrm{Char}(W) = \sum_{i \in \Lambda_W} n_W(i) q^i,$$

де $n_W(i)$ позначає кратність ваги i, тобто розмірність підпростору в W, породженого векторами ваги i. Кратність кожної ваги зображення V_d рівна одиниці, тому

$$\mathrm{Char}(V_d) = q^{-d} + q^{-d+2} + \cdots + q^d = \frac{q^{d+1} - q^{-(d+1)}}{q - q^{-1}}.$$

Характер $\mathrm{Char}(S^n(V_d))$ зображення $S^n(V_d)$ рівний $H_d(q^{-d}, q^{-d+2}, \dots, q^d)$, див. [7], де $H_d(x_0, x_1, \dots, x_d)$ є повним симетричним многочленом

$$H_d(x_0, x_1, \dots, x_d) = \sum_{|\alpha|=n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}, |\alpha| = \sum_i \alpha_i.$$

Поклавши $x_i = p^{d-2\,i}$, $i = 0, \dots, d$, і зібравши коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо вираз для характера $\mathrm{Char}(S^n(V_d))$:

$$\mathrm{Char}(S^n(V_d)) = \sum_{|\alpha|=n} (p^d)^{\alpha_0} (p^{d-2\cdot 1})^{\alpha_1} \dots (p^{d-2\,d})^{\alpha_d} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=n} p^{d\,n - 2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + d\,\alpha_d)} = \sum_{i=0}^{d\,n} \omega_d(n, i) p^{d\,n - 2\,i},$$

тут $\omega_d(n, i)$ є числом цілих невід'ємних розв'язків рівняння $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + d\,\alpha_d = \dfrac{d\,n - i}{2}$ при умові $|\alpha| = n$. Зокрема, коефіцієнт біля q^0 (кратність нульової ваги) рівний $\omega_d(n, \frac{d\,n}{2})$, а коефіцієнт біля q^2 рівний $\omega_d(n, \frac{d\,n}{2} - 1)$.

З іншого боку, в силу розкладу $(*)$, має місце рівність характерів

$$\mathrm{Char}(S^n(V_d)) = \gamma_d(n, 0) \mathrm{Char}(V_0) + \cdots + \gamma_d(n, d\,n) \mathrm{Char}(V_{d\,n}).$$

Звідси легко отримується доведення теореми Сильвестра-Келлі.

Теорема 1 (Сильвестр-Келлі)**.**

$$\gamma_d(n,0)=\omega_d(n,\frac{d\,n}{2})-\omega_d(n,\frac{d\,n}{2}-1).$$

Доведення. Нульова вага входить в кожне незвідне зображення V_i, $i=0,\ldots,d$ з одиничною кратністю, тому

$$\omega_d(n,\frac{d\,n}{2})=\gamma_d(n,0)+\gamma_d(n,1)+\cdots+\gamma_d(n,d\,n).$$

Вага 2 входить у кожне незвідне зображення (крім нульового) V_i, $i=1,\ldots,d$, також з одиничною кратністю, тому

$$\omega_d(n,\frac{d\,n}{2}-1)=\gamma_d(n,1)+\gamma_d(n,2)+\cdots+\gamma_d(n,d\,n).$$

Звідси

$$\omega_d(n,\frac{d\,n}{2})-\omega_d(n,\frac{d\,n}{2}-1)=\gamma_d(n,0),$$

що і потрібно було довести. $\square$

Для довільного многочлена $f\in\mathbb{C}[q,q^{-1}]$ позначимо через $[p^i]f$ його коефіцієнт біля p^i. Можна показати, див. [4], що

$$\gamma_d(n,0)=\left[q^{\frac{n\,d}{2}}\right]\left((1-q)\left[\begin{array}{c}d\\n\end{array}\right]_q\right),$$

тут $\left[\begin{array}{c}d\\n\end{array}\right]_q$ – q-біноміальний коєфіцієнт (многочлен Ґаусса):

$$\left[\begin{array}{c}d\\n\end{array}\right]_q:=\frac{(1-q^{d+1})(1-q^{d+2})\ldots(1-q^{d+n})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}.$$

3. В комплексній алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_3$ позначимо через $E_{i\,j}$ матричні одиниці, тобто такі матриці, у яких на перетині i-го рядка і j-го стовпчика знаходиться одиниця, а на всіх інших місцях знаходяться нулі. Матриці $H_1:=E_{1\,1}-E_{2\,2}$, $H_2:=E_{2\,2}-E_{3\,3}$, породжують картанівську підалгебру в $\mathfrak{sl}_3$. Можна показати, див. [8], що матриці H_1,H_2 діють на A_d як наступні лінійні диференціальні оператори:

$$H_1(a_{i,j})=(n-(2i+j))a_{i,j},H_2(a_{i,j})=(i-j)a_{i,j}.$$

Пряма перевірка показує, що кожен моном $a^\alpha := a_{0,0}^{\alpha_{0,0}} a_{1,0}^{\alpha_{1,0}} \cdots a_{0,d}^{\alpha_{0,d}}$, степеня n є власним вектором лінійних операторів H_1, H_2 із власними значеннями відповідно $n\,d - (2\omega_1(\alpha) + \omega_2(\alpha))$ та $\omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha)$, де $\omega_1(\alpha) = \sum_i i\,\alpha_{i,j}$, $\omega_2(\alpha) = \sum_j j\,\alpha_{i,j}$, $|\alpha| := \sum_{i,j} \alpha_{i,j} = n$. Набір цілих чисел

$$(n\,d - (2\omega_1(\alpha) + \omega_2(\alpha)), \omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha)),$$

називається вагою зображення A_d. Добре відомо, див. [9], що множина ваг довільного зображення алгебри Лі є лінійно впорядкованою множиною і максимальні елементи відносно цього впорядкування (старші ваги) з точністю до ізоморфізму визначають це зображення. Незвідне зображення з старшою вагою $\lambda = (m_1, m_2)$ позначимо через Γ_λ, множину його ваг позначимо через Λ_λ, а множину його додатніх ваг позначимо через Λ_λ^+. Легко бачити, що мають місце ізоморфізми зображень $\mathbb{C}^3 \cong \Gamma_{1,0}$, $A_d \cong (S^d(\Gamma_{1,0}))^* \cong \Gamma_{0,d}$, деталі див. у [7].

Нагадаємо означення формального характеру зображення алгебри Лі $\mathfrak{sl}_3$. Нехай Λ – ґратка ваг всіх скінченновимірних зображень $\mathfrak{sl}_3$, а $\mathbb{Z}(\Lambda)$ її групове кільце. $\mathbb{Z}(\Lambda)$ є вільним $\mathbb{Z}$-модулем з базисними елементам $e(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, причому $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$, $e(0) = 1$. Нехай Λ_λ – множина всіх ваг зображення Γ_λ. Тоді формальний характер $\mathrm{Char}(\Gamma_\lambda)$ визначається, див. [9], як елемент $\sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} n_\lambda(\mu) e(\mu) \in \mathbb{Z}(\Lambda)$, тут $n_\lambda(\mu)$ – кратність ваги μ в зображенні Γ_λ. Наприклад, для старшої ваги $\lambda = (1,1)$ маємо

$$\Lambda_{(1,1)} = \{(1,1), (-1,2), (1,-2), (0,0), (-2,1), (-1,-1)\},$$

причому кратності всіх ваг рівні одиниці, крім нульової ваги, для якої кратність рівна двійці. Тоді

$$\mathrm{Char}(\Gamma_{(1,1)}) = e(1,1) + e(-1,2) + e(1,-2) + 2\,e(0,0) + e(-2,1) + e(-1,-1).$$

Базисні елементи $a_{i,j}$ простору A_d мають вагу $(d - (2\,i + j), i - j)$, $i + j \leq d$, кратності 1, тому

$$\mathrm{Char}(\Gamma_{0,d}) = \sum_{i+j \leq d} e(d - (2\,i + j), i - j).$$

Характер симетричного степеня $S^n(\Gamma_{0,\,d})$ зображення $\Gamma_{0,\,d}$ є повним симетричним многочленом степеня n від $e(d - (2\,i + j), i - j)$, $i + j \leq d$, див. [7], тому

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d})) = \sum_{|\alpha| = n} e(0,0)^{\alpha_{0,0}} e(1,0)^{\alpha_{1,0}} \cdots e(0,d)^{\alpha_{d,0}}, |\alpha| = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}.$$

Після нескладних спрощень отримаємо

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d})) = \sum_{|\alpha|=n} e(n\,d - 2\,\omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha), \omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha)) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in\Lambda_{(nd,0)}} c_d(n,i,j)(n)e(i,j),$$

тут $c_d(n,i,j)$ є число невід'ємних розвязків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2\omega_1(\alpha) + \omega_2(\alpha) = d\,n - i, \\ \omega_1(\alpha) - \omega_2(\alpha) = j, \\ |\alpha| = n, \end{cases}$$

або, після спрощення

$$\begin{cases} \omega_1(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3} - \dfrac{i-j}{3}, \\ \omega_2(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3} - \dfrac{i+2j}{3}, \\ |\alpha| = n. \end{cases}$$

При $i = j = 0$ отримаємо $\omega_1(\alpha) = \omega_2(\alpha)$ і $n\,d = 3\omega_1(\alpha)$, тобто має місце співвідношеня $n\,d = 0 \mod 3$. Додавши перші два рівняння отримаємо, що $i - j = 0 \mod 3$, звідки і $i + 2\,j = 0 \mod 3$. Отже, $\frac{d\,n}{3}$, $\frac{i-j}{3}$, $\frac{i+2j}{3}$ – цілі числа.

На кожному зображенні Γ_λ визначимо число

$$E_\lambda = n_\lambda(0,0) + n_\lambda(3,0) + n_\lambda(0,3) - 2\,n_\lambda(1,1) - n_\lambda(2,2).$$

При цьому будемо вважати $n_\lambda(i,j) = 0$, якщо $(i,j) \notin \Lambda_\lambda$. Наступна теорема відіграє ключову роль в подальших обчисленнях.

Теорема 2.

$$E_\lambda = \begin{cases} 1, \lambda = (0,0), \\ 0, \lambda \neq (0,0). \end{cases}$$

Доведення. Вагова діаграма $\Gamma_{(i,j)}$, $i, j \neq 0$ геометрично зображується на площині у вигляді концентричних опуклих шестикутників, які вироджуються у трикутник, або у точку, див. [7], [9]. На кожній з сторін зовнішнього шестикутника міститься i ваг або j ваг. Відповідно, кратності ваг зображення $\Gamma_{(i,j)}$ зростають на одиницю на кожному концентричному шестикутнику вагової діаграми і є константами на внутрішньому трикутнику. Якщо i, або j рівні нулю, то вагова діаграма утворює трикутник, а кратність кожної ваги рівна одиниці.

Для доведення теореми достатньо розглянути три випадки: $i-j=0$, $|i-j|>3$ і $|i-j|=3$. Для $\lambda=(0,0)$ твердження очевидне, оскільки кратності всіх ваг з Λ_λ рівні нулю, крім кратності $n_\lambda(0,0)$, яка рівна 1.

Нехай $\lambda=(m,m)$, $m>0$. Тоді $n_\lambda(0,0)=m+1$, і легко бачити, що $n_\lambda(1,1)=m$, і $n_\lambda(3,0)=n_\lambda(2,2)=n_\lambda(0,3)=m-1$. Звідси

$$E_\lambda{=}m+1+m-1+m-1-2\,m-(m-1)=0.$$

Нехай $\lambda=(m,k)$, $|m-k|>3$. Тоді всі кратності $n_\lambda(0,0)$, $n_\lambda(3,0)$, $n_\lambda(1,1)$, $n_\lambda(2,2)$, $n_\lambda(0,3)$ рівні $\min(m,k)+1$, і, отже $E_\lambda=0$.

Нехай $\lambda=(m,k)$, $m-k=3$. Тоді $n_\lambda(0,0)=n_\lambda(3,0)=n_\lambda(1,1)=k+1$ і $n_\lambda(2,2)=n_\lambda(0,3)=k$, звідки $E_\lambda=0$.

Якщо ж $\lambda=(m,k)$, $k-m=3$ то $n_\lambda(0,0)=n_\lambda(0,3)=n_\lambda(1,1)=m+1$ і $n_\lambda(2,2)=n_\lambda(3,0)=m$, звідки $E_\lambda=0$.

Теорему доведено. □

Тепер ми можемо довести основне твердження цієї статті.

Теорема 3. *Число $\nu_d(n)$ лінійно незалежних однорідних інваріантів тернарної форми порядку d і степеня n рівне*

$$\nu_d(n)=c_d(n,0,0)+c_d(n,3,0)+c_d(n,0,3)-2\,c_d(n,1,1)-c_d(n,2,2).$$

Доведення. Число $\nu_d(n)$ рівне кратності $\gamma_d(0,0)$ тривіального зображення $\Gamma_{0,0}$ з яким воно входить в симетричний степінь $S^n(\Gamma_{0,\,d})$. Нехай має місце розклад

$$S^n(\Gamma_{0,d})=\gamma_d(0,0)\Gamma_{0,0}+\cdots+\gamma_d(0,n\,d)\Gamma_{0,n\,d}=\sum_{\lambda\in\Lambda^+_{(0,n\,d)}}\Gamma_\lambda.$$

Отже,

$$\mathrm{Char}(S^n(\Gamma_{0,d}))=\gamma_d(0,0)\mathrm{Char}(\Gamma_{0,0})+\cdots+\gamma_d(0,n\,d)\mathrm{Char}(\Gamma_{0,n\,d}).$$

Тому,

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda_{(0,n\,d)}}c_d(n,i,j)(n)e(i,j)=\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)\mathrm{Char}(\Gamma_\lambda)=$$
$$=\sum_{(i,j)\in\Lambda_{(0,n\,d)}}\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)n_\lambda(i,j)e(i,j).$$

Звідси знаходимо $c_d(n,i,j)=\sum_\lambda\gamma_d(\lambda)n_\lambda(i,j)$. Використавши попередню теорему, отримаємо

$$c_n(n,0,0)+c_d(n,3,0)+c_d(n,0,3)-2\,c_d(n,1,1)-c_d(n,2,2)=$$

$$= \sum_{\lambda} \gamma_d(\lambda) E_\lambda = \gamma_d(0,0).$$

Врахувавши рівність $\gamma_d(0,0) = \nu_d(n)$, отримаємо необхідний результат. $\square$

4. Виведемо формулу для практичного обчислення $\nu_d(n)$.

З простих комбінаторних міркувань випливає, що число $c_d(n,0,0)$ невід'ємних цілих розвязків системи рівнянь

$$\begin{cases} \omega_1(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3}, \\ \omega_2(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3}, \\ |\alpha| = n \end{cases}$$

дорівнює коефіцієнту біля $t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}}$ у розкладі наступного добутку в ряд

$$R_d = \prod_{k+l \leq d} \frac{1}{1 - t p^k q^l}.$$

Позначимо це так – $c_d(n,0,0) = \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}} \right] (R_d)$.

Число $c_d(n,3,0)$ невід'ємних цілих розвязків системи рівнянь

$$\begin{cases} \omega_1(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3} - 1, \\ \omega_2(\alpha) = \dfrac{d\,n}{3} - 1, \\ |\alpha| = n \end{cases}$$

рівне $\left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}-1} \right] (R_d) = \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}} \right] (p\,q R_d)$. Тут ми використали очевидну формальну властивість $[x^{i-1}] f(x) = [x^i](x f(x))$, яка справедлива для довільного формального ряду $f(x)$. Аналогічними міркуваннями знайдемо

$$\begin{aligned} c_d(n,0,3) &= \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}} \right] \left(\frac{q^2}{p} R_d \right), \\ c_d(n,1,1) &= \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}} \right] \Big(q R_d \Big), \\ c_d(n,2,2) &= \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}} \right] \Big(q^2 R_d \Big). \end{aligned}$$

Отже, має місце формула

$$\nu_d(n) = \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] \left((1 + p\,q + \frac{q^2}{p} - 2\,q - q^2) R_d\right).$$

Назвемо pq-біноміальним коефіцієнтом такий вираз

$$\binom{n}{k}_{pq} := \frac{(p^{n+1} - q^{n+1}) \dots (p^{n+k} - q^{n+k})}{(p-q)(p^2 - q^2) \dots (p^k - q^k)}.$$

Можна показати, що функції $G_m := \left(\prod\limits_{k+l=m} (1 - tp^k q^l)\right)^{-1}$ є породжуючими функціями для pq-біноміальних коефіцієнтів:

$$G_m = \prod_{k+l=m} ((1 - tp^k q^l)^{-1} = 1 + \binom{m}{1}_{pq} t + \binom{m}{2}_{pq} t^2 + \cdots$$

Тому

$$R_d = G_0 G_1 \cdots G_d = \sum_n \left(\sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_d \leq n} \binom{1}{i_1}_{pq} \binom{2}{i_2}_{pq} \cdots \binom{d}{i_d}_{pq} \right) t^n.$$

Отже, число $\nu_d(n)$ лінійно незалежних інваріантів степеня n тернарної форми порядку d обчислюється за формулою

$$\nu_d(n) = \left[t^n (pq)^{\frac{d\,n}{3}}\right] \left(\left(1 + p\,q + \frac{q^2}{p} - 2\,q - q^2\right) \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_d \leq n} \binom{1}{i_1}_{pq} \cdots \binom{d}{i_d}_{pq} \right).$$

Наведемо декілька перших членів ряду Пуанкаре

$$P_d(T) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_d(n) T^n,$$

для кільця інваріантів тернарної форми порядків 3,4,5,6,7:

$$P_3(T) = 1 + T^4 + T^6 + T^8 + T^{10} + 2\,T^{12} + T^{14} + 2\,T^{16} + 2\,T^{18} + 2\,T^{20} + 2\,T^{22} + 3\,T^{24} + ..$$
$$P_4(T) = 1 + T^3 + 2\,T^6 + 4\,T^9 + 7\,T^{12} + 11\,T^{15} + 19\,T^{18} + 29\,T^{21} + 44\,T^{24} + 67\,T^{27} + ..$$
$$P_5(T) = 1 + 2\,T^6 + T^9 + 19\,T^{12} + 24\,T^{15} + 178\,T^{18} + 383\,T^{21} + 1470\,T^{24} + 3331\,T^{27} + \dots$$
$$P_6(T) = 1 + T^3 + T^4 + T^5 + 4\,T^6 + 5\,T^7 + 8\,T^8 + 17\,T^9 + 28\,T^{10} + 48\,T^{11} + 99\,T^{12} + ..$$
$$P_7(T) = 1 + 3\,T^6 + 13\,T^9 + 421\,T^{12} + 4992\,T^{15} + 60303\,T^{18} + 548966\,T^{21} + ..$$

У випадку $d = 4$ ряд Пуанкаре повністю співпадає з рядом, який отримується з відомої явної формули Шіоди для $P_4(T)$, див. [10]. Для $d > 4$ результати є новими.

[1] *Boole G.* Exposition of a general theory of linear transformations, parts I, II.// Cambridge Math. J. – 1843. – **III**. – PP.1-20, 106-119.

[2] *Cayley A.* A Second Memoir upon Quantic // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1856. – **146**. – P.101-126.

[3] *Sylvester J.J.* Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorems of invariants // Phil. Magazine. – 1878. – P.178-188.

[4] *Hilbert D.* Theory of algebraic invariants, Lectures. – Cambridge University Press, 1993.

[5] *Gordan P.* Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen // Clebsch Ann. I. – 1869. – P.57-89.

[6] *Noether E.* Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form // J. für Math. – 1908. – **134**. – P.23-90.

[7] *Fulton W., Harris J.* Representation theory: a first course. – Springer-Verlag New-York, Inc.. – 1991.

[8] *Бедратюк Л.П.* Теорема Робертса для тернарних форм // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. – 2007. – **349**. – С.1-13.

[9] *Humphreys J.* Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. – Springer-Verlag New-York, Inc., 1978.

[10] *Shioda T.* On the graded ring of invariants of binary octavics // Am. J. Math. – 1967.– **89**. – P.1022–1046.

ANALOGUE OF THE SYLVESTER-CAYLEY FORMULA FOR INVARIANTS OF THE TERNARY FORM

Leonid BEDRATYUK

Khmelnytsky National University

The number $\nu_d(n)$ of linearly independed homogeneous invariants of degree n for the ternary form of degree d is found. The following formula holds

$$\nu_d(n) = c_d(n,0,0) + c_d(n,3,0) + c_d(n,0,3) - 2\,c_d(n,1,1) - c_d(n,2,2),$$

here $c_d(n,i,j)$ is the number of nonnegative integer solutions of the system of equations

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} r\,\alpha_{r,s} = \frac{n\,d}{3} - \frac{i-j}{3}, \\ \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} s\,\alpha_{r,s} = \frac{n\,d}{3} - \frac{i+2\,j}{3}, \\ \displaystyle\sum_{0\le r+s\le d} \alpha_{r,s} = n. \end{cases}$$