ПРОСТОРИ ОПЕРАТОРІВ З ОБМЕЖЕНИМ ПРОЕКЦІЙНИМ СЛІДОМ

©*2009 р. Ярослав ГРУШКА*

Інститут Математики НАН України,
вул. Терещенківська 3, м. Київ, 01601 Україна, e-mail:
grushka@imath.kiev.ua

Редакція отримала статтю 21 липня 2008 р

В багатьох роботах, присвячених дослідженню багаточастинкових квантових систем еволюція описується з допомогою групи операторів, що діє в просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів *з обмеженим слідом* над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ [1]–[3]. Проте цього простору виявляється недостатньо, зокрема, для розв'язання задач, постановка яких природна в класі операторів з трансляційно-інваріантним ядром, оскільки такі оператори не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Саме тому в [3] ставиться питання про необхідність вивчення груп операторів в більш загальних операторних просторах, ніж $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Мета даної роботи — побудова і дослідження таких (більш загальних) просторів операторів.

1 Трансляційно інваріантні оператори. Теорема про слід трансляційно інваріантного оператора

Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — комплексний сепарабельний гільбертовий простір. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ будемо позначати простір лінійних неперервних операторів над $\mathfrak{H}$, а через $\mathbb{O}$ і $\mathbb{I}$ — нульовий та одиничний оператори простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ відповідно. Для оператора $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ через $\mathbf{Tr}(A)$ будемо позначати *слід* оператора A.

Нехай B — самоспряжений (взагалі кажучи – необмежений) оператор в $\mathfrak{H}$. Через $\sigma_p(B)$ будемо позначати *точковий спектр* оператора B, а через $U(\tau)$ — C_0-групу унітарних операторів $U(\tau) = e^{i\tau B}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ є ***трансляційно інваріантним*** відносно B, якщо він комутує з розкладом одиниці оператора B (що рівносильно $AU(\tau) = U(\tau)A$, $\tau \in \mathbb{R}$).

Основними прикладами трансляційно інваріантних операторів є лінійні неперервні оператори, в просторі $\mathfrak{H} = L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$, які породжуються ***трансляційно інваріантним ядром***, тобто

$$(A_{\mathcal{K}}x)\left(\vec{t}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s})x(\vec{s})d\vec{s}, \quad \vec{t} \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathfrak{H},$$

де ядро $\mathcal{K} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ задовольняє умову

$$\mathcal{K}(\vec{t} + h, \vec{s} + h) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s}) \quad \vec{t}, \vec{s} \in \mathbb{R}^d,\ h \in \mathbb{R}$$

(тут $\vec{t} + h = (t_1 + h, \ldots, t_d + h)$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$). Такі оператори є трансляційно інваріантними відносно генератора групи зсувів у "діагональному" напрямку:

$$\left(U^{(d)}(\tau)x\right)(\vec{s}) = x\left(\vec{s} + \tau\right), \qquad \tau \in \mathbb{R},\ \vec{s} \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Зауважимо, що оператори з трансляційно інваріантним ядром в $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ вивчались у монографії [4]. Загальновідомо, що ці оператори (в ненульовому випадку) не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Наступна теорема показує, що аналогічний результат має місце і в абстрактній ситуації.

Теорема 1. *Нехай невід'ємний оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ — трансляційно інваріантний відносно самоспряженого оператора B, такого, що $\sigma_p(B) = \emptyset$. Тоді $A = \mathbb{O}$.*

Для доведення теореми 1 знадобиться наступне допоміжне твердження.

(**A**) *Нехай μ — міра на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, причому $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$ $\mu(\{\tau\}) = 0$. Тоді для довільної множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $0 < \mu(\Delta) < \infty$, існують множини $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, такі, що*

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset, \quad \mu(\Delta_1), \mu(\Delta_2) > 0.$$

(Тут $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра *борелівських* підмножин числової прямої.)

Справді. Покладемо:

$$\tau_1 := \inf\left\{\tau \in \mathbb{R} : \mu((-\infty, \tau) \cap \Delta) > 0\right\};\ \tau_2 := \sup\left\{\tau \in \mathbb{R} : \mu((\tau, \infty) \cap \Delta) > 0\right\}. \tag{2}$$

Оскільки $\mu(\Delta) > 0$, то означення чисел τ_1, τ_2-коректне, тобто супремум і інфінум в (2) береться по непорожній множині. Згідно з (2), $\tau_1 < \infty$,

$\tau_2 > -\infty$. Доведемо, що $\tau_1 < \tau_2$. Справді, припущення $\tau_1 > \tau_2$ приводить до існування чисел $\tau_1', \tau_2' \in \mathbb{R}$, таких, що $\tau_1 > \tau_1' > \tau_2' > \tau_2$. З (2) випливає, що $\mu((-\infty, \tau_1') \cap \Delta) = \mu((\tau_2', \infty) \cap \Delta) = 0$. Звідси з нерівності $\tau_1' > \tau_2'$ отримуємо, що $\mu(\Delta) = 0$, що суперечить умові. Припустивши, що $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$, враховуючи нерівності $\tau_1 < \infty$, $\tau_2 > -\infty$, будемо мати $-\infty < \tau_0 < \infty$. Отже, з (2) випливає, що $\mu((-\infty, \tau_0) \cap \Delta) = 0$, $\mu((\tau_0, \infty) \cap \Delta) = 0$. Тобто $\mu(\{\tau_0\} \cap \Delta) > 0$, що суперечить умові $\forall\, \tau \in \mathbb{R}\ \mu(\{\tau\}) = 0$. Тепер для доведення твердження залишається взяти довільне число τ', таке, що $\tau_1 < \tau' < \tau_2$ і покласти $\Delta_1 := (-\infty, \tau') \cap \Delta$, $\Delta_2 := [\tau', \infty) \cap \Delta$. $\square$

Доведення теореми 1. Нехай $E(\cdot) = E_B(\cdot)$ — розклад одиниці оператора B. Покладемо:

$$\mu_x(\Delta) := (E(\Delta)x, x), \qquad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ x \in \mathfrak{H}.$$

Припустимо, що $A \neq 0$. Тоді існує вектор $f \in \mathfrak{H}$, такий, що $(Af, f) > 0$, тобто такий, що

$$0 < (Af, f) = \left\| A^{1/2} f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda). \tag{3}$$

Оскільки оператор A — обмежений і трансляційно інваріантний відносно B, то для довільної множини $\Delta_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, такої що $\mu_f(\Delta_0) = 0$, маємо:

$$\mu_{A^{1/2}f}(\Delta_0) = (E(\Delta_0)A^{1/2}f, A^{1/2}f) = \left\| E(\Delta_0)A^{1/2}f \right\|^2 =$$
$$= \left\| A^{1/2}E(\Delta_0)f \right\|^2 \leq \left\| A^{1/2} \right\|^2 \|E(\Delta_0)f\|^2 = \left\| A^{1/2} \right\|^2 \mu_f(\Delta_0) = 0.$$

Тобто міра $\mu_{A^{1/2}f}$ є абсолютно неперервною відносно міри μ_f, а отже існує похідна Родона-Никодима:

$$F_f(\lambda) = \frac{d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda)}{d\mu_f(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

і, згідно з (3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_f(\lambda) d\mu_f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda) > 0.$$

Тому існують такі число $\eta > 0$ і множина $\Delta' \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, що:

$$\mu_f(\Delta') > 0 \quad \text{і} \quad \forall \lambda \in \Delta' \quad F_f(\lambda) \geq \eta.$$

Використовуючи послідовно твердження (A), ми можемо множину Δ' розбити на послідовність множин:

$$\Delta' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \text{де} \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset,\ i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j; \quad \mu_f(\Delta_i) > 0,\ i \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\mu_f(\Delta_i) = \|E(\Delta_i)f\|^2 > 0$ і $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$, то вектори

$$g_i = \frac{E(\Delta_i)f}{\|E(\Delta_i)f\|} = \frac{E(\Delta_i)f}{\mu_f(\Delta_i)^{1/2}}, \qquad i \in \mathbb{N}$$

утворюють ортонормовану систему. Тому, використовуючи трансляційну інваріантність оператора A відносно B, отримуємо:

$$\mathbf{Tr}(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty}(Ag_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(AE(\Delta_i)f,\, E(\Delta_i)f)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(A^{1/2}E(\Delta_i)f,\, A^{1/2}E(\Delta_i)f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(E(\Delta_i)A^{1/2}f,\, E(\Delta_i)A^{1/2}f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(E(\Delta_i)A^{1/2}f,\, A^{1/2}f\right)}{\mu_f(\Delta_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_{A^{1/2}f}(\Delta_i)}{\mu_f(\Delta_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\mu_{A^{1/2}f}(\lambda)}{d\mu_f(\lambda)} d\mu_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} F_f(\lambda) d\mu_f(\lambda) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f(\Delta_i)} \int\limits_{\Delta_i} \eta d\mu_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta = \infty.$$

Отже, ми бачимо, що з умови $A \neq 0$ випливає, що $\mathbf{Tr}(A) = \infty$.

$\square$

Навпаки, якщо точковий спектр самоспряженого оператора B не порожній, то завжди існує ненульовий трансляційно інваріантний відносно B оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Справді, нехай $\lambda \in \sigma_p(B)$ — власне значення оператора B і $e_\lambda \in \mathfrak{H}$ — відповідний до λ власний вектор B, такий, що $\|e_\lambda\| = 1$. Нескладно перевірити, що тоді оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, що діє за правилом:

$$Ax := (x, e_\lambda)\, e_\lambda, \qquad x \in \mathfrak{H}$$

є невід'ємним і трансляційно інваріантним відносно B. Якщо вибрати ортонормований базис простору $\mathfrak{H}$ так, щоб першим ортом цього базису був вектор e_λ, то отримаємо $\mathbf{Tr}(|A|) = \mathbf{Tr}(A) = (Ae_\lambda, e_\lambda) = 1 < \infty$.

Насправді, з теореми 1 випливає дещо більш загальне твердження:

Наслідок 1. *Нехай невід'ємний оператор* $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ *— трансляційно інваріантний відносно самоспряженого оператора* B*. Тоді* $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = \mathbb{O}$*, де* $E(\cdot)$ *— розклад одиниці* B*.*

Доведення. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) \neq \mathbb{O}$, бо в протилежному випадку наслідок перетворюється в тривіальне твердження. Покладемо:

$$\mathfrak{H}_c := E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B))\,\mathfrak{H}, \quad A_c := A \restriction \mathfrak{H}_c,$$

де $A \restriction \mathfrak{H}_c$ — звуження оператора A на $\mathfrak{H}_c$. Тоді $\mathfrak{H}_c$ буде гільбертовим простором відносно скалярного добутку, індукованого з $\mathfrak{H}$. Оскільки A — трансляційно інваріантний відносно B, то $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = E(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B))\,A$. Отже, оператор A_c відображає простір $\mathfrak{H}_c$ в $\mathfrak{H}_c$, причому з неперервності і невід'ємності оператора A в $\mathfrak{H}$ випливає неперервність і невід'ємність A_c в $\mathfrak{H}_c$. В просторі $\mathfrak{H}_c$ розглянемо спектральну міру:

$$E_c(\Delta)x := E\left((\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) \cap \Delta\right)x, \qquad x \in \mathfrak{H}_c,\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Ця спектральна міра є розкладом одиниці деякого самоспряженого над простором $\mathfrak{H}_c$ оператора $B_c = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_c(\lambda)$. Точковий спектр оператора B_c порожній, оскільки з умови $E_c(\{\lambda\}) \neq \mathbb{O}$ випливало б, що $E(\{\lambda\}) \neq \mathbb{O}$ і $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)$, тобто $\lambda \in \sigma_p(B)$ і $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)$, що неможливо. З (4) і трансляційної інваріантності оператора A відносно B випливає трансляційна інваріантність A_c відносно B_c. Оскільки довільний ортонормований базис в просторі $\mathfrak{H}_c$ є ортонормованою системою в $\mathfrak{H}$, то $A_c \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H}_c)$. Отже, за теоремою 1, $A_c = \mathbb{O}$ в просторі $\mathfrak{H}_c$. Тому $AE(\mathbb{R} \setminus \sigma_p(B)) = \mathbb{O}$ в просторі $\mathfrak{H}$. □

2 Слід за різницевою змінною. Простір операторів з обмеженим проекційним слідом

Враховуючи той факт, що оператори з трансляційно інваріантним ядром, взагалі кажучи, мають необмежений слід, в роботі [4] для таких операторів вводиться поняття сліду за "різницевою" змінною:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}}) = \widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}}) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{\mathcal{K}}(t_1, \dots, t_d)dt_1 \dots dt_{i-1}dt_{i+1}\dots dt_d, & d > 1, \\ \mathcal{K}(0,0), & d = 1, \end{cases}$$

$1 \leq i \leq d$, де $\widetilde{\mathcal{K}}(\vec{t}) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{t})$. Легко перевірити, що у випадку трансляційно інваріантного ядра $\mathcal{K}$ величина $\widetilde{\mathbf{Tr}}_{i,t_i}(A_{\mathcal{K}})$ не залежить від індексу i та змінної t_i.

Оскільки поняття (звичайного) сліду застосовується до операторів в абстрактному гільбертовому просторі, виникає задача визначення в абстрактному гільбертовому просторі і аналогу поняття сліду за різницевою змінною. Наступний приклад ілюструє можливий шлях розв'язання поставленої проблеми.

Приклад 1. В просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо спектральну міру $(P(\Delta)x)(t) := \chi_\Delta(t)\,x(t)$, $x \in \mathfrak{H}$, $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Легко перевірити, що тоді для оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ має місце рівність:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}}) = \frac{\mathbf{Tr}\,(P(\Delta)A_{\mathcal{K}}P(\Delta))}{\mathbf{m}(\Delta)}, \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ 0 < \mathbf{m}(\Delta) < \infty,$$

де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Зауважимо, що подібна спектральна міра існує і в просторі $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ для довільного $d \in \mathbb{N}$, а саме, на роль такої міри може претендувати довільна міра виду:

$$\left(P_i^{(d)}(\Delta)x\right)(\vec{t}) := \chi_\Delta(t_i)\,x(\vec{t}), \qquad x \in L_2\left(R^d\right),\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ i \in \overline{1,d}\,. \quad (5)$$

Далі будуються простори неперервних лінійних операторів з обмеженим проекційним слідом. Мотивацією наступних означень служить приклад 1.

Означення 1. *Нехай $(R, \mathcal{R})$ — вимірний простір (тобто $\mathcal{R}$ — σ-алгебра підмножин R), $P(\cdot) : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — спектральна міра на σ-алгебрі $\mathcal{R}$. І нехай μ — деяка скалярна σ-скінчена і не тотожно рівна нулю міра на $\mathcal{R}$. Тоді четвірку $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ будемо називати* ***проекційним простором з мірою*** *над простором $\mathfrak{H}$ (або, скорочено, —* ***ПМ-простором*** *над $\mathfrak{H}$)*

Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір. Позначимо через $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ наступне підкільце σ-алгебри $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} = \{\Delta \in \mathcal{R} \,|\, \mu(\Delta) < \infty\}\,.$$

Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Покладемо:

$$\nu_{P,A}(\Delta) := \mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}\,;$$

$$\|A\|_{P,\mu} := \sup\left\{ \frac{\nu_{P(\cdot),A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\}, \quad A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \qquad (6)$$

де у випадку у випадку $P(\Delta)AP(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|) := \infty$, а у випадку $\mu(\Delta) = 0$ слід покласти $\frac{\nu_{P(\cdot),A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} := \infty$. Оскільки міра μ не є тотожно нульовою і є σ–скінченою, то визначення величини $\|\cdot\|_{P,\mu}$ — коректне (тобто супремум в (6) береться по непорожній множині). Оскільки величина $\|A\|_{P,\mu}$ скінчена, взагалі кажучи, не при всіх $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, розглянемо клас операторів:

$$\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H}) := \Big\{ A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \,:\, \|A\|_{P,\mu} < \infty \Big\}. \tag{7}$$

Зауваження 1. Як випливає з результатів прикладу 1, у випадку, коли $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$, і спектральна міра $P(\cdot)$ така ж сама, як і в прикладі 1, для невід'ємного оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ має місце рівність $\|A_{\mathcal{K}}\|_{P,\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}})$. Аналогічно в просторі $\mathfrak{H} = L_2\left(R^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$, для невід'ємного оператора $A_{\mathcal{K}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ з трансляційно інваріантним ядром $\mathcal{K}$ і спектральної міри (5), маємо:

$$\|A_{\mathcal{K}}\|_{P_i^{(d)},\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}}), \quad i \in \overline{1,d}$$

(при умові, що права частина рівності має сенс, тобто скінченна).

Теорема 2. $\Big(\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\Big)$ *є лінійним нормованим простором.*

Доведення. а) Оскільки $\nu_{P,\mathbb{O}}(\Delta) = \mathbf{Tr}(|P(\Delta)\mathbb{O}P(\Delta)|) \equiv 0$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, то $\mathbb{O} \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому $\|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$.

Нехай $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Тоді, використовуючи властивості сліду від модуля оператора маємо:

$$\begin{aligned}\nu_{P,\lambda A}(\Delta) = \mathbf{Tr}(|P(\Delta)\lambda AP(\Delta)|) = |\lambda|\mathbf{Tr}(|P(\Delta)AP(\Delta)|) = \\ = |\lambda|\nu_{P,A}(\Delta), \qquad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}.\end{aligned}$$

Тому при $\lambda \neq 0$:

$$\|\lambda A\|_{P,\mu} = \sup\left\{ \frac{\nu_{P,\lambda A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \,\middle|\, \begin{array}{l}\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}},\\ \mu(\Delta) + \nu_{P,\lambda A}(\Delta) > 0\end{array} \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \frac{|\lambda|\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \,\middle|\, \begin{array}{l}\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}},\\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0\end{array} \right\} = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu},$$

а при $\lambda = 0$, враховуючи, що $\|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$, маємо, $\|\lambda A\|_{P,\mu} = \|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0 = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu}$.

Отже, для довільних $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ і $\lambda \in \mathbb{C}$, оператор λA належить до $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому $\|\lambda A\|_{P,\mu} = |\lambda|\,\|A\|_{P,\mu}$.

б) Нехай $A = \mathbb{O}$. Тоді, як було доведено на початку пункту а), $\|A\|_{P,\mu} = \|\mathbb{O}\|_{P,\mu} = 0$. Навпаки, нехай $\|A\|_{P,\mu} = 0$. Тоді для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ має місце рівність $\nu_{P,A}(\Delta) = 0$. Справді, припустивши існування множини $\Delta_0 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, такої, що $\nu_{P,A}(\Delta_0) > 0$, враховуючи означення $\|\cdot\|_{P,\mu}$, отримаємо $\|A\|_{P,\mu} \geq \frac{\nu_{P,A}(\Delta_0)}{\mu(\Delta_0)} > 0$ що суперечить рівності $\|A\|_{P,\mu} = 0$. Оскільки міра μ — σ-скінченна, то існує послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = R$. Оскільки для довільного $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Tr}(|P(\Delta_n)AP(\Delta_n)|) = \nu_{P,A}(\Delta_n) = 0$, то, враховуючи властивості сліду, маємо $P(\Delta_n)AP(\Delta_n) = \mathbb{O}$, $n \in \mathbb{N}$. Тому:

$$(AP(\Delta_n)f, P(\Delta_n)g) = (P(\Delta_n)AP(\Delta_n)f, g) = 0, \ f, g \in \mathfrak{H}. \tag{8}$$

Враховуючи, що $P(\cdot)$ — розклад одиниці на $(R, \mathcal{R})$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = R$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} P(\Delta_n)f = f$, $f \in \mathfrak{H}$. Звідси, враховуючи (8) і неперервність оператора A, отримуємо $(Af, g) = 0, \quad f, g \in \mathfrak{H}$, тобто $A = \mathbb{O}$.

Таким чином, ми довели, що $\forall A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ $\|A\|_{P,\mu} = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$.

в) Нехай $A, B \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Розглянемо довільну множину $\widetilde{\Delta} \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, таку, що

$$\mu(\widetilde{\Delta}) + \nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0. \tag{9}$$

Доведемо, що $\mu(\widetilde{\Delta}) > 0$. Нехай це не так, тобто, $\mu(\widetilde{\Delta}) = 0$. Тоді, враховуючи умову (9), маємо $\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$. Згідно з нерівністю трикутника для слідів від модуля:

$$\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) \leq \mathbf{Tr}(|P(\widetilde{\Delta})AP(\widetilde{\Delta})|) + \mathbf{Tr}(|P(\widetilde{\Delta})BP(\widetilde{\Delta})|) = \nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right) + \nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right).$$

Тому, оскільки $\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$, хоч одна з величин $\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)$, $\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right)$ мусить бути додатною. Нехай, наприклад, $\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$. Тоді, враховуючи, що $\mu(\widetilde{\Delta}) = 0$, маємо:

$$\|A\|_{P,\mu} \geq \frac{\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} = \infty,$$

що суперечить умові $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. У випадку $\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right) > 0$ аналогічно приходимо до протиріччя з умовою $B \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Отже, припущення невірне. Тому $\mu(\widetilde{\Delta}) > 0$. Звідси, використовуючи нерівність трикутника для слідів, отримуємо:

$$\frac{\nu_{P,A+B}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} \leq \frac{\nu_{P,A}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} + \frac{\nu_{P,B}\left(\widetilde{\Delta}\right)}{\mu(\widetilde{\Delta})} \leq$$
$$\leq \sup\left\{ \frac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\} +$$
$$+ \sup\left\{ \frac{\nu_{P,B}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \middle| \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,B}(\Delta) > 0 \end{array} \right\} =$$
$$= \|A\|_{P,\mu} + \|B\|_{P,\mu}.$$

Причому остання нерівність має місце для довільної множини $\widetilde{\Delta} \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, що задовольняє умову (9). Тому $A + B \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, причому

$$\|A + B\|_{P,\mu} \leq \|A\|_{P,\mu} + \|B\|_{P,\mu}.$$

□

Наступний приклад покаже, що простір $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$, взагалі кажучи, не є банаховим (тобто повним).

Приклад 2. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Покладемо:

$$Q_n(t) := \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \chi_{[-n,n]}(t) = Q_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $Q_n \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Тому для довільної функції $x \in L_2(\mathbb{R})$ маємо:

$$\int_{\mathbb{R}} |Q_n(t-s)x(s)|\, ds \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |Q_n(t-s)|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(s)|^2\, ds\right)^{1/2} =$$
$$= \|Q_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \|x\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, функції Q_n, $n \in \mathbb{N}$ породжують над $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ оператори $\left\{A_{[Q_n]},\ n \in \mathbb{N}\right\}$:

$$\left(A_{[Q_n]}x\right)(t) = \int_{\mathbb{R}} Q_n(t-s)x(s)ds, \quad x \in L_2(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}.$$

Доведемо, що ці оператори відображають простір $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ в себе (тобто, що $A_{[Q_n]}x \in \mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{H}$) і що $A_{[Q_n]} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай, $x \in$

$\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Тоді, використовуючи інтегральну нерівність Мінковського маємо:

$$\left\|A_{[Q_n]}x\right\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} Q_n(s)x(t-s)ds\right)^2 dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int (Q_n(s)x(t-s))^2 dt\right)^{1/2} ds = \|Q_n\|_{L_1(\mathbb{R})} \|x\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty. \tag{10}$$

З (10) випливає, що оператори $A_{[Q_n]}$ відображають простір $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$ в себе, причому $A_{[Q_n]} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $\left\|A_{[Q_n]}\right\| \leq \|Q_n\|_{L_1(\mathbb{R})}$ $(n \in \mathbb{N})$. Доведемо, що $A_{[Q_n]} \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ для перетворення Фур'є $\widehat{Q}_1$ маємо:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{Q}_1(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its} Q_1(s)ds = 2\int_0^1 (1-s)\cos tsds = \frac{2(1-\cos t)}{t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\widehat{Q}_1(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, причому $\widehat{Q}_1 \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Звідси, враховуючи рівність $Q_n(t) = Q_1\left(\frac{t}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$\widehat{Q}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}),\ \widehat{Q}_n(t) \geq 0; \qquad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\widehat{Q}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $Q_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(s) e^{its} ds$, причому інтеграл збігається в сенсі Лебега (абсолютно). Тому, для довільного $t \in \mathbb{R}$ і функції $x \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ маємо

$$\left(A_{[Q_n]}x, x\right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} Q_n(t-s)x(s)\overline{x(t)}dsdt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(\xi) e^{i(t-s)\xi}\, d\xi x(s)\overline{x(t)}dsdt.$$

Оскільки функції $\widehat{Q}_n$ і x належать до простору $L_1(\mathbb{R})$, то потрійний інтеграл в правій частині останньої рівності збігається абсолютно, отже, зміна порядку інтегрування є коректною. Тому, враховуючи, що $\widehat{Q}_n(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, маємо:

$$\left(A_{[Q_n]}x, x\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{Q}_n(\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\xi} x(s)\overline{x(t)}dsdtd\xi =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{Q}_n(\xi)\, |\widehat{x}(\xi)|^2 d\xi \geq 0.$$

Невід'ємність операторів $A_{[Q_n]}$, $n \in \mathbb{N}$ доведена.

Зауважимо, що $A_{[Q_n]} = A_{\mathcal{K}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, де ядро $\mathcal{K}_n(t,s) = Q_n(t-s)$ $(t,s \in \mathbb{R})$ — трансляційно інваріантне. Отже, оператори $\left\{A_{[Q_n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$ є трансляційно інваріантні відносно групи зсувів в просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$.

Нехай спектральна міра $P(\cdot)$ така ж сама, як і в прикладі 1. Тоді, згідно із зауваженням 1, оператори $\left\{A_{[Q_n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$ належать до простору $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, причому

$$\left\|A_{[Q_n]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \widetilde{\mathbf{Tr}}\left(A_{[Q_n]}\right) = Q_n(0-0) = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Покладемо

$$Q(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Q_{n^4}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $0 \le Q_n(t) \le 1$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд в правій частині останньої рівності завжди збігається. Оцінимо функцію $Q(t)$ знизу. Оскільки для довільного $t \ge 0$ існує число $n_t \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{(n_t-1)^4}{2} \le t \le \frac{n_t^4}{2}$, то при $t \ge 0$ маємо:

$$\begin{aligned} Q(t) &\ge \frac{1}{n_t^2} Q_{n_t^4}(t) = \frac{1}{n_t^2}\left(1 - \frac{|t|}{n_t^4}\right)\chi_{[-n_t^4, n_t^4]}(t) = \frac{1}{n_t^2}\left(1 - \frac{|t|}{n_t^4}\right) \ge \\ &\ge \frac{1}{\left(\sqrt[4]{2t}+1\right)^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\frac{1}{\left(2^{3/4}\sqrt[4]{2t+1}\right)^2} \ge \frac{1}{8\sqrt{t+1}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Покладемо:

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} A_{\left[Q_{k^4}\right]}.$$

Тоді маємо, згідно з (11), $A_n \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, причому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} A_{\left[Q_{k^4}\right]}$ збігається абсолютно за нормою простору $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{k^2} A_{\left[Q_{k^4}\right]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left\|A_{\left[Q_{k^4}\right]}\right\|_{P,\mathbf{m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Отже, послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною в просторі $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$.

Доведемо, що не існує оператора $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, такого, що $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Припустимо супротивне, що такий оператор A існує. Зі збіжності $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ і означення норми $\|\cdot\|_{P,\mathbf{m}}$ випливає, що для довільної множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}$ $\quad \|P(\Delta)\,(A_n - A)\,P(\Delta)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (де $\mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin} = \{\Upsilon \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \,:\, \mathbf{m}(\Upsilon) < \infty\}$). Тому:

$$\begin{aligned}&\forall\, x, y \in \mathfrak{H}\ \ (A_n P(\Delta)x, P(\Delta)y) = (P(\Delta)A_n P(\Delta)x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (P(\Delta)AP(\Delta)x, y) = (AP(\Delta)x, P(\Delta)y)\,, \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}. \quad (13)\end{aligned}$$

Використовуючи означення операторів $\{A_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, легко перевірити, що $A_n = A_{\left[\widetilde{Q}_n\right]}$, $n \in \mathbb{N}$, де $\widetilde{Q}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} A_{\left[Q_{k^4}\right]}$. Отже, враховуючи рівномірну обмеженість послідовності функцій $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$, використовуючи (13), згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність, отримуємо:

$$\begin{aligned}(AP(\Delta)x, P(\Delta)y) &= \lim_{n\to\infty} (A_n P(\Delta)x, P(\Delta)y) =\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{Q}_n(t-s)\chi_\Delta(t)x(t)\chi_\Delta(s)\overline{y(s)}dtds =\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Delta}\int_{\Delta} \widetilde{Q}_n(t-s)x(t)\overline{y(s)}dtds =\\ &= \int_{\Delta}\int_{\Delta} Q(t-s)x(t)\overline{y(s)}dtds, \quad x, y \in \mathfrak{H},\ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_{\mathbf{m}-fin}. \quad (14)\end{aligned}$$

Покладемо, $x_k(t) := \frac{\chi_{[0,k]}(t)}{(t+1)^{3/4}}$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що

$$\|x_k\|^2 = \|x_k\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{3/2}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, з однієї сторони, оскільки $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, послідовність $\{(Ax_k, x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ має бути обмеженою. Проте з іншої сторони, враховуючи, що $x_k = P([0,k])x_k$, $k \in \mathbb{N}$ і використовуючи (14) та (12), отримуємо:

$$\begin{aligned}(Ax_k, x_k) &= \int_0^k\int_0^k Q(t-s)x_k(t)x_k(s)dtds = \int_0^k\int_0^k \frac{Q(t-s)}{(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}}dsdt \ge\\ &\ge \int_0^k\int_0^t \frac{Q(t-s)}{(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}}dsdt \ge \int_0^k\int_0^t \frac{dsdt}{8\sqrt{t-s+1}\,(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} \ge\\ &\ge \int_0^k\int_0^t \frac{dsdt}{8\sqrt{t+1}\,(t+1)^{3/4}(s+1)^{3/4}} = \int_0^k\int_0^t \frac{dsdt}{8(t+1)^{5/4}(s+1)^{3/4}} =\\ &= \frac{1}{2}\ln(k+1) - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.\end{aligned}$$

Отже, припущення про існування оператора $A \in \mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$, такого, що $\|A_n - A\|_{P,\mathbf{m}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ приводить до протиріччя. Тому простір $\mathfrak{Tc}_{P(\cdot),\mathbf{m}}(\mathfrak{H})$ не є банаховим.

3 Заключні зауваження

Простір $\mathfrak{Tr}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ можна вважати певним аналогом простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів з обмеженим (звичайним) слідом. Але, на жаль, як показує приклад 2, простір $\mathfrak{Tr}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ (на відміну від $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$) в загальній ситуації не є банаховим. Безумовно, в тих випадках, коли потрібно працювати з банаховим простором, можна скористатись поповненням простору $\mathfrak{Tr}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$. Проте в такому випадку виникає задача опису зазначеного поповнення з теоретико-операторної точки зору.

Причиною неповноти простору $\mathfrak{Tr}_{P(\cdot),\mu}(\mathfrak{H})$ є застосування конструкції (6)-(7) над занадто вузьким простором лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Виявляється, що за гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ та ПМ-простором $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ можна побудувати певне оснащення (в сенсі [5, стор. 20]) $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ простору $\mathfrak{H}$ (де $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ — певні лінійні простори зі збіжністю в сенсі [6, стор. 516]) і вкласти простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в більш широкий простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ лінійних неперервних операторів з $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ так, щоб конструкція (6)-(7) над $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ допускала коректне визначення і приводила до банахового простору.

Виклад зазначених вище результатів виходить за рамки даної статті, оскільки обмеження на обсяг не дозволяє викласти всі отримані результати в одній роботі.

[1] C. Cercignani, V.I. Gerasimenko and D.Ya. Petrina. *Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations.* – Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

[2] A. Arnold. *Mathematical properties of quantum evolution equations.* // Lect. Notes in Math. – vol 1946. – Springer, 2008. – P. 45-109.

[3] V.I. Gerasimenko. *Groups of Operators for Evolution Equations of Quantum Many-particle Systems.* // Operator Theory: Advances and Applications. – vol 191. – Birkhauser Verlad Basel, 2009. – P. 341-355.

[4] Petrina D.Ya. *Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems.* – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.

[5] Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* – Киев: Наукова думка, 1988. – 680 с.

[6] Л.Д. Кудрявцев. *Курс математического анализа, Том II.* – Москва: “Высшая Школа”, 1981. – 584 с.

THE SPACES OF OPERATORS WITH BOUNDED PROJECTOR TRACE

Yaroslav GRUSHKA

Institute of Mathematics NAS of Ukraine,
3 Tereshchenkivska str., Kyiv 01601, Ukraine, e-mail:
grushka@imath.kiev.ua

In many scientific works, devoted to the investigation of quantum many-particle systems, evolution is described by a group of operators, acting in the space $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ of operators with bounded trace over Hilbert space $\mathfrak{H}$ [1]–[3]. But this space is not enough for investigation of the problems, which have a natural examination in the class of operators with translation-invariant kernels, because these operators do not belong to the space $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. That is why in [3] autor states that operator groups are to be studied in more general operator spaces than $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. This paper is devoted to the construction and investigation of these (more general) operator spaces.