*М. Куренський*
(Київ).

# Про трисекцію кута

## в зв'язку з задачами про квадратуру кола, подвоєння куба та поділ обводу кола на рівні частини.

„L'Académie a pris, cette année, la resolution de ne plus examiner aucune solution des problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée, comme un mouvement perpetuel".
*(Постанова Парижської Академії Наук р. 1775).*

З трьох знаменитих задач старовини: задачи про квадратуру кола, про подвоєння куба та задачи про поділ кута на три рівні частини за допомогою тільки циркуля та лінійки, перші дві наче б то зараз вже не звертають на себе уваги.

З них, для першої задачи, про квадратуру кола, неможливість збудування циркулем та лінійкою довжини боку квадрата, рівного площі заданого кола, є зрозуміла для всякого, хто чув про Lindemann'ову теорему про те, що число $\pi$, яке міститься у формулі для вирахування площи кола, є число трансцендентне [1]), тоб-то взагалі не може бути розв'язкою якого-небудь альгебричного рівнання з цілими коефіцієнтами. Це доведено було різними математиками: Lindemann'ом, Weierstrass'ом, Hilbert'ом, Gordan'ом [2]) та А. Марковим. Найпростіший є довід Gordan'ів. Циркулем та лінійкою взагалі можна збудувати відтинок, який визначається низкою альгебричних рівнань 1-го й 2-го степенів, і за допомогою тільки цих приладів не можна накреслити довжини боку квадрата, що вона дорівнює $r\sqrt{\pi}$, де $r$ є радіюс заданого кола, а $\pi$ є число, що його альгебричним рівнанням визначити не можна.

---

[1]) G. Hessenberg: Transzendenz von $e$ und $\pi$. Teubner, Leipzig-Berlin, 1912, ss. 1—102.

[2]) В. Левицький: Про переступ чисел $e$ і $\pi$. (Збірник Секції Мат.-Пр.-Лік. Н. Т-ва ім. Шевченка, т. І, 1897, ст. 1—28).

Що до третьої задачи, про поділ заданого кута на три рівні частини за допомогою тільки циркуля та лінійки, задачи, відомої під назвою трисекції кута, то тут питання уявляється в формі більш делікатній, аніж у попередній задачі, і зараз не перестають ще працювати над розв'язанням цієї задачи багато осіб, правда, здебільшого не математиків з фаху.

Ця робота має за мету дати вичерпане та повне роз'яснення задачи про трисекцію кута і є призначена для того, щоб вияснити прикре непорозуміння, яке є зв'язане з цією задачею та яке викликає все нові й нові спроби для її розв'язання. Досить сказати, що за останні 8 років до Всеукраїнської Академії Наук надіслано було на розгляд 5 праць про трисекцію кута. Всі вони не мають ніякої вартости.

Подібне непорозуміння може виникнути й у 2-й задачі, про подвоєння куба, відомої під назвою делійської задачи, що в ній вимагається збудувати циркулем та лінійкою довжину ребра куба вдвічі більшого об'ємом за куб з заданою довжиною його боку.

В звязку з цими задачами стоїть також і питання про поділ обводу кола на рівні частини за допомогою тільки вказаних приладів.

* * *

I. Умовмося за допомогою циркуля відзначати віддалення між двома заданими на площі точками, переносити положення всякої точки на площі з одного місця у друге та проводити обвід кола з якою завгодно довжиною радіюса[1]), а за допомогою лінійки — тільки проводити прості якоїсхочемо довжини, в якому завгодно напрямку та через які схочемо одну або дві точки на площі, — тоді за допомогою тільки цих двох приладів *не можна* поділити заданого кута на три рівні частини. Ділення кута на рівні частини у такому розумінні зватимемо його *трисекцією*.

Правдивість цієї теореми випливає з таких тверджень, доведених L. Wantzel'ем[2]).

Формули, що визначають довжини відтинків, які можна збудувати вказаними приладами, будуть „Альгебричними рівнан-

[1]) М. Е. Ващенко-Захарченко: Начала Евклида, Кіевъ, 1880. ст. 86: 3-й постулат Евкліда.

[2]) L. Wantzel: Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. (Journ. Liouville, t. II, 1837, pp. 366—372).

нями, що в них не містяться" боки прямолінійних трикутників „та тригонометричні лінії їхніх кутів вище ніж у 1-й та 2-й степенях". „Таким чином, невідоме задачи дістанемо шляхом розв'язки низки рівнань 2-го степеня, що їх коефіцієнти є раціональні функції даних питання та розв'язками попередніх рівнань. На підставі цього, щоб узнати, чи можна конструкцію геометричної задачи виконати лінійкою та циркулем, треба дослідити, чи можна встановити залежність розв'язок рівнання, до якого приводить задача, від розв'язок системи рівнань 2-го степеня, складених відповідним способом".

L. Wantzel розглядає лише той випадок, коли рівнання задачи є альгебричне.

Взявши „низку квадратових рівнань

$$x_1^2 + A x_1 + B = 0;\ x_2^2 + A_1 x_2 + B_1 = 0;\ \dots\ x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0,$$

що в них $A$ та $B$ є раціональні функції заданих чисел $p, q, r, \dots$; $A_1$ та $B_1$ — раціональні функції від $x_1, p, q, \dots$ та взагалі $A_m$, $B_m$ — раціональні функції від $x_m, x_{m-1}, \dots x_1, p, q, \dots$", приходимо до висновку, що „рівнання

$$f(x) = 0$$

степеня $2^n$, яке дає всі розв'язки задачи, що її треба розв'язувати за допомогою $n$ рівнань 2-го степеня, є конче незводне, тоб-то: воно не може мати розв'язок спільних з рівнанням нижчого степення, що його коефіцієнти були б раціональні функції даних величин $p, q, \dots$"

„Всяка задача, що приводить нас до незводного рівнання степеня, який не є степенем числа 2, не може бути розвязана за допомогою простої та кола".

Трисекція кута залежить від рівнання

$$x^3 - \tfrac{3}{4} x + \tfrac{1}{4} a = 0,$$

незводного при альгебричному $a$[1]). Подвоєння куба залежить від завжди незводного рівнання

$$x^3 - 2a^3 = 0.$$

Задача про знаходження двох середніх пропорційних приводить до рівнання

---

[1]) У „доводі" В. И. Лебедева (Очерки по истории точных наук, вып. 4, Петроград, 1920, стор. 47) про неможливість трисекції циркулем та лінійкою не приймається на увагу незводність рівнання і його „довід" не зможе запевнити читача у правдивості твердження.

$$x^3 - a^2 b = 0,$$

незводному тоді, коли відношення вартостей $b$ до $a$ не є куб.

Тому ці задачі не можна розв'язати за допомогою лише циркуля та лінійки, коли цими приладами користуватись вказаним раніш способом.

На підставі цих тверджень запевнюємось, між іншим, і в правдивості теореми, що її висловив Gauss: „ділення кола на $N$ рівних частин можна буде зробити за допомогою лінійки й циркуля тільки при тій умові, що первісні чинники $N$, відмінні від 2-ох, будуть первісні числа форми $2^n + 1$ та що вони входять у це число тільки у першому степені“ [1]).

* *

II. Щоб поділити заданий кут на три рівні частини, *можна*, на практиці, користуватись рухом механічного приладу, відмінного від циркуля й лінійки, або приладу з циркуля та звичайної лінійки, яка має хоч двоє ділень, хоч одно ділення, вважаючи за друге ділення один з кінців лінійки. Для цього циркуль прищиплюється або прив'язується одним кінцем до лінійки й з обох цих приладів утворюється один механізм, який при неперервному русі закреслює криву конхоїду. Спосіб ділення кута за допомогою неперервного руху механізму зватимемо *механічним*.

Для ділення заданого кута $AOB$ на три рівні частини можна користуватися кривою лінією, що вона має назву конхоїди Нікомеда. Рівняння цієї кривої має вигляд [2])

$$(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2,$$

де

$$x = b$$

є рівнання простої, точки якої $M, N, P, \ldots$ з'єднуються з початком координат $O$, і на промінях $OM, ON, OP,$ відкладається від точок $M, N, P, \ldots$ відтинки однакової довжини $a$. Коли $a > b$, тоді ця крива (її проводять через точки $M_1, N_1, P_1, \ldots$, на віддаленнях $a$ від точок $M, N, P, \ldots$ промінів) матиме вигляд, вказаний на рисунку I, праворуч; вона асимптотично наближається до простої $x = b$.

Щоб поділити кут $AOB$ на три рівні частини, бік $OA$ візь-

---

[1]) L. Wantzel, Ibidem, p. 369.

[2]) Д. А. Граве: Основы аналитической геометріи, ч. I, Кіевъ, 1911, ст. 481.

мімо за просту $x = b$, і радіюсом рівним $a$ з вершка $O$ кута, як з центру, опишемо дугу, яка перетинатиме другий бік $OB$ заданого кута у точці $B$. Візьмімо точку $B$ за початок координат, вісь $x$-сів направмо вниз нормально до боку $OA$, а вісь $y$-нів — рівнобіжно до цього боку. Тоді для такої системи координат $XBY$ конхоїда Нікомеда матиме положення, що його подано на рисунку II.

З рис. II, коли точку перетину конхоїди з дугою кола означимо через $D$, а точку перетину простої $BD$ з простою $AO$ через $C$, матимемо:

$$\angle ODB = \angle DBO = \angle DCO + \angle DOC;$$
$$\angle AOB = \angle OBD + \angle DCO; \quad \angle AOB = 3 \angle EOD.$$

На підставі цього, коли до кількости приладів для ділення кута на рівні частини, крім циркуля та лінійки, прилучити ще механічний прилад для конструкції Нікодемової конхоїди, тоді задача ділення кута точно на три рівні частини зробиться можливою й розв'язуватиметься оце тільки що вказаним шляхом; тому то такий спосіб ділення кута ми й умовились звати механічним способом точного ділення.

Існує й справді багато приладів, іноді досить складних (і відмінних від циркуля та лінійки) для механічного креслення конхоїди Нікомеда та інших кривих, і одночасно — для ділення кута на три рівні частини. Проф. Б. Я. Букреєв любезно мене повідомив, що в одному з німецьких університетів йому доводилось бачити більше десятка таких приладів.

За словами Прокла „Нікомед поділив кут на три частини за допомогою кривої конхоїди, властивості якої він винайшов та вказав, як її будувати. Інші геометри ту ж саму задачу розвязали за допомогою квадратриси Гіппія та Нікомеда“ [1]. Гіппій винайшов і прилад для механічного будування цієї кривої. За словами Прокла Гіппій перший винайшов квадратрису. Давній Папп подав був розв'язку ділення кута на 3 рівні частини за допомогою гіперболі та конхоїди. Розвязок за допомогою конхоїди Папп вважає за свій власний. Розвязок задачі за допомогою конічних перерізів подав був Декарт, — для цього доводиться перетинати коло з параболею. Ньютон, Клеро та Шаль подали були ще й інші розв'язки [2]).

Можна зазначити ще й спосіб ділення кута за допомогою

---

[1]) В. И. Лебедев. Ibidem, стор. 47.

[2]) В. И. Лебедев. Ibidem, стор. 47, 50, 53, 54.

кривої, що вона зветься Паскалевою улиткою (слимаком Паскаля), та додати, що відомі способи будувати гіперболу та параболу по точках не розв'язують питання про поділ кола на рівні частини; способи ділення за допомогою гіперболи та параболи слід вважати лише за наближені способи, про які говоритимемо далі.

Не вдаючись до розглядання приладів для механічного креслення конхоїди Нікомеда та квадратриси Гіппія, зупинімось на одному тільки — на Нікомедовій лінійці, що її подано на рис. III[1]). Штифт $C$ ховзається у прорізі лінійки $AB$, а лінійка $CD$ ховзається своїм прорізом по штифту $O$ лінійки $OF$; точка $D$ лінійки $CD$ описує конхоїду $DE$, що її полюсом є точка $O$.

Очевидно, що закріпивши у діленні $D$ лінійки олівець, впираючи лінійку у точці $B$ об штифт та повертаючи її коло цього штифта так, щоб друге ділення $C$ лінійки весь час ховзалось на простій $EA$, що вона лежить поза точкою $B$, яку вважаємо за полюс конхоїди, ми таким рухом накреслимо конхоїду Нікомеда. Нерухомий штифт у $B$ та рухомий олівець у $D$ можна замінити, як це показано на рис. IV, циркулем, ніжка якого з олівцем у $D$ прищиплюється до лінійки гвинтиком та ховзається у прорізі лінійки (праворуч), або прив'язується з боку лінійки ниткою чи іншим яким-небудь способом (ліворуч). У такому механізмі „циркуль та лінійка" ролю речи „зайвої" відограє „нитка", що зв'язує одну ніжку циркуля з лінійкою. Хоч би точку $C$ лінійки точно можна було б направляти на заданій простій $EA$, ми накреслили б точну конхоїду $KD$. На практиці, при русі точки $C$ по простій $EA$, обов'язково трафлятимуться похибки спостережень, конхоїда $KD$ буде наближена і вказаний спосіб ділення кута буде механічний-наближений. Він перетворюється у точний-механічний, коли приєднати до приладу ще одну лінійку $CF$, на якій ховзався б гострий кінець $C$ лінійки $DC$.

* *

III. Коли лінійкою, як це й робиться техніками на практиці, дозволяється визначати також і віддалення між двома точками, що вони лежать на площі, тоді таку лінійку зватимемо звичайною лінійкою з діленнями; коли на звичайній лінійці матимемо хоч би тільки двоє ділень, то для поділу на прак-

[1]) Г. Попов: Изготовление математических приборов... (Физ.-Хим.-Мат.-Техн., № 8, 1929, ст. 63).

тиці заданого кута на три рівні частини *досить* буде тільки циркуля та такої лінійки з двома діленнями; вважаючи ж і кінець лінійки за окреме ділення, досить буде для тієї ж самої мети мати на лінійці ще тільки одно ділення. Таке ділення кута зватимемо *наближеним*.

Щоб запевнитись у правдивості цього твердження, досить звернутись до:

1) Способу Архімеда (287—212) для находження 3-ої частини заданого кута, за допомогою однієї леми Архімеда, що її подано у Архімедовому трактаті „Леми"[1]).

Коли задано буде кут $AOB$ циркулем радіюса $r$, рівного віддаленню $CD$ між двома діленнями лінійки $C$ та $D$, з вершку $O$ кута, як з центра, опишемо дугу $ABDE$; продовжимо бік $AO$ кута й пристосуймо лінійку так, щоб одно її ділення $C$ лежало на цьому продовженні, друге ділення $D$ лежало б на дузі, а продовження лінійки проходило б через точку $B$ перетину заданого кута з дугою. Дуга $DE$ буде, як це легко бачити, третиною дуги $AB$ (рис. V):

$$\angle DCO = \angle DOE;\ \angle BDO = \angle DBO = 2 \angle DOE;$$
$$\angle AOB = \angle DCO + \angle DBO = 3 \angle DOE.$$

Спосіб ділення, як бачимо, основується на властивостях конхоїди Нікомеда. Він є наближений, тому що тягне за собою похибки спостережень при установці лінійки на точках $C, D, B$.

2) Спосіб А. Турр'а (Тіпа), що його автор доклав на Математичному Конгресі 1920 року[2]), являє собою таку видозміну Архімедового способа: закресливши радіюсом $r$, рівним $CD$, дугу, лінійку прикладаємо з того ж самого боку, де лежить і заданий кут $AOB$; поставивши ніжку циркуля в $D$, тим самим радіюсом закреслимо дугу, яка перетинатиме першу дугу в точках $F$ та $G$; кут $AOF$ складатиме третину заданого кута $AOB$:

$$3 \angle AOD = \angle EOB;\ \angle FOA + \angle AOD = 60^\circ;$$
$$3 \angle FOA + 3 \angle AOD = 180^\circ;$$
$$3 \angle FOA = 180^\circ - \angle EOB = \angle AOB.$$

Легко бачити, що кут $FOA$ на рис. VI, для способу Тіпа, є вершковий кут відносно кута $EOD$ на рис. V, для способа Архімедового.

---

[1]) Г. Н. Попов: Памятники математической старины в задачах, Госизд., 1929, стр. 10, 35. В. И. Лебедев: Ibidem, ст. 52.

[2]) B. Niewenglowski: Sur la trisection d'un angle. (Nouvelles Annales de Mathématiques, série 5, t. 1, octobre, 1922, pp. 4—6).

Не важко вбачити також, що, поставивши з точки $O$ перпендикуляр $OH$ до боку $OA$ заданого кута, матимемо кут $GOH$, що він дорівнює третині кута $HOB$ [1]):

$$\angle FOA + \angle AOH + \angle HOG = \angle FOD + \angle DOG = 120^\circ;$$
$$\angle FOA + \angle HOG = 30^\circ;\ 3 \angle FOA + 3 \angle HOG = 90^\circ;$$
$$\angle AOB + 3 \angle HOG = 90^\circ;\ 3 \angle HOG = 90^\circ - \angle AOB = \angle BOH.$$

Звидці випливає

3) Спосіб Невенгловського: до заданого гострого кута $HOB$ прибудуймо кут $BOA$, доповненик попереднього до прямого; знайшовши на дузі $ODB$, взятій радіюсом $DC$, точку $D$ за способом Тіпа, з неї, як з центру, тим самим радіюсом закреслимо дугу, яка перетинатиме першу дугу в точці $G$; тоді матимемо кут $GOH$, рівний третині заданого кута $HOB$ (рис. VII).

У цьому способі, і так само у двох попередніх (та у двох наступних), ділення тупого кута на три рівні частини не матиме труднощів, як це зазначує ще й давній математик Папп з Александрії (кін. III с.), тому що, відокремивши один, два чи три прямих кутів від заданого тупого, нам залишиться поділити на три рівні частини тільки гострий кут, що зостанеться. Що ж до поділу відокремлених прямих кутів, то розв'язка такої задачи є досить відома: будування кута в 30° зводиться до конструкції гострого кута прямокутного трикутника, один з катетів якого буде вдвічи коротший за гіпотенузу. Робити трисекцію прямого кута вміли ще Пітагорійці.

До оголошення способів Тypp'а та Niewenglowsk'ого, що вони являють собою застосування властивостей Нікомедової конхоїди, існували не більш складні способи Кемпе та Савенкова, що з них останній та ще спосіб Архімеда дають найменші похибки спостережень і дають кращі наближення поділу кута.

4) Спосіб Кемпе [2]) є такий (рис. VIII): на боці $OA$ заданого кута $AOB$ відкладімо довжину $OA$ віддалення $CD$ між двома діленнями $C$ та $D$ лінійки; поділивши за допомогою циркуля й лінійки відтинок $OA$ пополам в точці $P$, проведімо з неї просту $PC$, рівнобіжну до $OB$, та просту $PN$, нормальну до $OB$; лінійку пристосуймо так, щоб її ділення $C$ лежало на простій $PC$, ділення $D$ — на простій $PN$, а продовження лінійки проходи-

[1]) B. Niewenglowski: Ibidem, p. 6.

[2]) Е. И. Игнатьевъ: Въ царствѣ смекалки или ариѳметика для всѣхъ. Кн. 2, Спб. 1912, стр. 182.

лоб через вершок $O$ заданого кута, — тоді кут $BOC$ дорівнюватиме третій частині заданого кута $AOB$.

Справді, поділивши відтинок $CD$ пополам у точці $P_1$ та з'єднавши цю точку з точкою $P$, дістанемо:

$$PP_1 = P_1 C,$$

тому, що ці відтинки є половини гіпотенузи $DC$ трикутника $DPC$. Це дає:

$$\angle BOC = \angle OCP = \angle P_1 PC; \quad \angle OP_1 P = 2 \angle OCP = \angle POP_1;$$
$$\angle BOC = \tfrac{1}{2} \angle POP_1 = \tfrac{1}{3} \angle AOB.$$

Цей наближений спосіб ділення кута так само випливає з властивостей конхоїди Нікомеда: при зміні напрямку боку $OB$ кута $AOB$, точка $C$ опише конхоїду $KN$ рис. I, що для неї простій $PR$ відповідає проста $PN$, рисунку VIII[1]).

5) Спосіб Савенкова[2]), відомий до способів Турр'а та Niewenglowsk'ого, буде досить нескладний у розумінні додаткових конструкцій, коли зробити невеликі зміни у досить довгім, хоч і зрозумілім викладанні автора (рис. IX): з вершку $O$ заданого кута $AOB$, радіюсом, рівним віддаленню $CD$ між двома діленнями $C$ та $D$ лінійки, закреслимо дугу $ACBE$; до боку $OA$, у точці $O$, поставмо нормальну $OD$, а через точку $B$ проведімо просту $BE$, рівнобіжну до боку $OA$; лінійку направмо так, щоб ділення $C$ лежало на дузі, всередині заданого кута, ділення $D$ — на перпендикулярі $OD$, а продовження лінійки проходило б через точку $E$ зустрічи дуги з простою $BE$, — тоді кут $AOC$ дорівнюватиме третій частині кута $AOB$.

Справді, поставивши перпендикуляр $CK$ на основу $OD$ з вершку $C$ трикутника $ODC$, приймаючи на увагу, що проста $BE$ є рівнобіжна до простої $CK$, матимемо:

$$\angle KCO = \angle KCD = \angle AOC; \quad \angle CEB = \angle KCD = \angle AOC;$$
$$\smile AC = \tfrac{1}{2} \smile BC; \quad \angle AOC = \tfrac{1}{3} \angle AOB.$$

Порівнюючи рис. VII з рис. V, II, III, легко бачити, що й цей наближений спосіб випливає з властивостей Нікомедової конхоїди, хоч авторові способу і не були відомі, очевидно, ні спосіб конхоїди, ні спосіб Архімедів.

Вважаючи цей спосіб Савенкова нескладним та дотепним, признаючи також цікавими й зазначені автором інші властиво-

---

[1]) В. И. Лебедев: Ibidem, ст. 51.

[2]) Е. С. Савенковъ: Теорема доказательнаго дѣленія угла на три равныя части. Спб., 1900, стр. 5, 12.

сті хорди $CE$, треба згадати й про грубі помилки, в які й раніш впадало та й тепер ще впадає більшість також і інших любителів розв'язувати задачу про трисекцію кута, — помилки в тих частинах, на мій погляд, маловідомої праці Савенкова, де говориться, що „неможливість розв'язати цю проблему ніколи доведена не була, та й не може бути, а тому признання неможливости її розв'язати є не більш, як науковий, або справедливіш сказати — шкільний забобон, який, на жаль, остільки затвердився, завдяки незмінній марности всіх зроблених до цього спроб до його подолання винаходом розв'язки зазначеної проблеми...“, „...що відсутність його в науці є незаперечне свідчення її неспроможности та застою“, і що геометрія, завдяки винаходу автора, „позбувається від забобону, який її принижав, що неможливість геометрично доказового ділення вского кута на три рівні частини, — отаке ділення від цього часу рахуватиметься за таке ж нескладне й легке, як і ділення всякого кута або дуги пополам“.

Цими фразами не позбавлений здібности та дотепности автор безумовно „свідчить“ лише про „неспроможність“ та „застій“ своїх математичних знаннів, тому що, беручись за розв'язання задачи, він не знає й не розуміє постанови цієї задачи, не знає, що неможливість розв'язання її у тій постанові, у якій це розуміють математики, не тільки „ніколи доведена не була та й не може бути“ та що ця неможливість розв'язки не є „не більш, як науковий, або справедливіш сказати — шкільний забобон“, а що вона була доведена за 63 роки до появлення праці Савенкова. Не розуміючи постанови задачи, автор розвязує задачу іншого характеру й приходить до висновку, якому, проти думки автора, зовсім не судилося „позбавити“ геометрію „від забобону, який її принижав“, тому що, поперше, забобону тут ніякого нема, а є тільки непорозуміння, а по-друге, розвязання задачи у постанові Савенкова винайшов Архімед не менш як за 2112 років раніш Савенкова, а механічний спосіб точного ділення кута на три рівні частини відомий був забагато раніш, ніж жив Архімед. Досить сказати, що у творі Паппа з Александрії *Συναγωγὰ μαθηματικά* подано було вже історію задач трисекції кута та подвоєння куба, а ще за часів Сократа Гіппій, що народився приблизно за 460 р. перед початком нашої ери, перший подав квадратрису та прилад для механічного її будування; ця квадратриса є не що інше, як геометричне місце точок $S$ (рис. IX) перетину радіюсів $OB$ та простих $KC$, рівнобіжних до поземної $OA$, при неперервній зміні напрямків радіюсів та положень рівнобіжних.

Для наближеного ділення кута на три рівні частини користуються іноді різними приладами та „шаблонами" з дерева, заліза й картону; ці прилади пристосовують безпосередньо до заданого кута. В результаті це дає таке ж грубе наближення, як, наприклад, застосування лекала для креслення кривих. Рішуче засуджуючи всякі складні прилади з 4-х лінійок на шарнірах, прилад Марі Гильгейна з двох пар лінійок, „трисектор" з 2-х коротких лінійок та з двох довгих з прорізами[1]) та інші подібні прилади, зупинімося на найпростішому з них — на приладі Grivel'a.

Прилад французького професора Grivel'a[2]) являє собою залізну пластинку, форми вказаної на рис. X майже в натуральну величину. Ця пластинка складається з лінійки $GRI$, півкола $MEL$ та з довільної форми приростку $IVE$. Ширина лінійки $GR$ та її довжина $ER$ довільні; бік $RIE$ лінійки мусить бути дотичний у точці $E$ до півкола $MEL$ з поперечником $ME$, а віддалення кінця $V$ приростка $IVE$ від центру півкола також мусить дорівнювати довжині його поперечника, так що довжина основи $MV$ приладу дорівнює потроєній довжині радіюса.

Щоб поділити заданий кут $AOB$ за допомогою цього приладу, треба пристосувати широку частину приладу в середині кута та, направивши просту $RE$ через вершок $O$ кута, за кінець $R$ приладу тягнути його до себе, доки його широкі частини не упруться у боки заданого кута у точках $A$ та $B$. Тоді:

$$<AOL=<LOE=<EOB=\tfrac{1}{3}<AOB.$$

До запевнення у правдивості цього твердження прийдемо відразу, порівнявши між собою прямокутні трикутники рис. XI. Коли порівняємо рис. XI з рис. VIII для наближеного ділення кута за способом Кемпе, то бачимо, що точки $O$ в обох рисунках означають вершок заданого кута, точка $A$ дотику півкола з боком кута $OA$ на рис. XI відповідає точці $N$ на рис. VIII, а точка $L$ на рис. XI відповідає точці $D$ на рис. VIII.

З'ясоване в останнім та в попереднім розділі приводить нас до запевнення у правдивості тверження III.

---

[1]) Г. Попов: Изготовление математических приборов..., ст. 55—57, Журнал „La Nature", 1891.

[2]) B. Niewenglowski: Ibidem, pp. 7—9. Г. Попов: Изготовление... ст. 58.

Справді, який би не був нескладний прилад, відмінний від лінійки та циркуля, у його конструкцію повині входити елементи, які мають не менше за одного віддалення між відповідними крайніми точками, що вони лежать або на кінцях, або між кінцями ліній, що обмежують форму приладу. Так, наприклад, навіть у найпростішому приладі, у приладі Grivel'a маємо віддалення між центром $L$ сегмента і точками на його дузі та ще рівне попередньому віддалення від кінця сегмента $E$ до кінця $V$ приростку. Виходячи ж тільки з одного віддалення $MV$, ми мусимо, для конструкції приладу, поділити це віддалення на 3 рівні частини $ML$, $LE$, $EV$, що їм відповідають 4 ділення: $M$, $L$, $E$, $V$.

Користуючись цим найпростішим приладом для наближеного поділу кута, ми повинні будемо стежити за положенням 3-х його точок $A$, $B$, $O$, помилкове установлення яких приведе нас до 3-х похибок, які дає цей прилад. Найкращим приладом для наближеного поділу кута треба вважати той, який має найпростішу конструкцію та дає найменшу похибку. Такий прилад і є звичайна лінійка, що вона має хоч двоє і, навіть, одне ділення. У конструкції цього приладу відограє ролю тільки одно віддалення — віддалення між діленнями $C$ та $D$ лінійки.

Тоді як у приладі Grivel'a треба слідкувати за 3-ма точками рисунку, користуючись лише однією єдиною комбінацією його установлення, для лінійки з двома діленнями треба стежити також за 3-ма точками рисунку, проте ці точки рисунку можна заміняти на інші, і правильність поділу кута можна перевіряти не менш як 5-ма різними комбінаціями установлення лінійки. Зокрема, встановлення лінійки за способами Архімеда та Савенкова приводить, взагалі кажучи, до найменшої похибки, тому, що при діленні гострих кутів, лінійка за цими способами перетинатиме відповідні прості та дуги під найбільшими кутами, а через це матиме найменшу кількість спільних точок.

Для наближеного ділення кута на рівні частини можна було б застосувати ще також і „ділительну“ машину з мікрометричним гвинтом.

* *

З'ясовуючи способи механічного поділу кута за допомогою конхоїди (а також ще квадратриси та Паскальової улитки) та наближеного поділу за допомогою тільки циркуля та звичайної лінійки, я не мав на оці вивчити для наближеного поділу кута всі способи, які існують та які є можливі, й зупинився докладно на досить великій кількости 5-ох мені відомих, де вживається виключно лише циркуль та лінійка, на механічному наближеному способі, що я його подав і де теж вживається тільки циркуль та лінійка, та на одному способі наближеного ділення за допомогою найпростішого після циркуля та лінійки приладу, шаблону Grivel'a, щоб дати читачеві відповідний простір вибору для мети практичного наближеного поділу кута на три рівні частини; я розташовував ці способи у порядку історичного ходу ідей та надавав перевагу способам Архімеда й Савенкова.

Викладене у першому розділі цієї праці повинно запевнити читача у неможливости трисекції кута за допомогою циркуля та лінійки в тому розумінні, як це вважали давні математики.

Викладене у другому та третьому розділі може дати читачеві надію винайти ще який-небудь спосіб ділення кута на три рівні частини у тому розумінні, як це вважають техніки та практики. Зміст цих розділів, за моєю думкою, мусив би запевнити читача також і у марності та нецікавості таких винаходів, тому що вони не дадуть нічого кращого з практичного боку так для наближеного ділення кута на три рівні частини, як, гадаю, і для будування конхоїди Нікомеда, щоб робити поділ кута за допогою неперервного руху механізму.

Є підстави для того, щоб у появленні „розв'язок" трисекції кута обвинувачувати й деяких керівників методики математики. Справді, у цікавій книжці В. І. Лебедева читаємо: „конструкцію точки $C$ можна здійснити за допомогою лінійки з діленнями", і не вказується, що цей поділ кута (Архімедів) є лише наближений-графічний, точність якого залежить від точности установки лінійки з діленнями. Поділ „можна зробити за допомогою конхоїди або конічних перерізів", при чому вказується тільки на гіперболу та параболу, що їх, очевидячки, доведеться креслити по точках за допомогою лекала, тоб-то приблизно, і не вказується, що спосіб ділення завдяки конічним перерізам, гіперболі й параболі, буде наближений[1]). Проф. Г. Попов радить вчителям математики, щоб їхні учні робили доповіді про трисекцію кута, при чому подає, як матеріял, складні прилади для наближеного ділення кута, ніде не вказуючи, що це приводить тільки до наближеної розв'язки задачи, що вона не має нічого спільного з трисекцією кута; вважає, як і Лебедев

[1]) В. І. Лебедев: Ibidem, ст. 53.

(примітка на стор. 171), що довід неможливости трисекції полягає тільки у зведенні задачи до кубічного рівнання, не зупиняючись па питанні про його незводність; ставить, нарешті, рядом дві такі фрази: „Чому саме ця задача не розв'язується за допомогою циркуля та лінійки? Розв'язати задачу, користуючись лемою Архімеда (за допомогою клаптика паперу)“ [1]). У останній фразі автор має на оці спосіб Архімеда наближеної розв'язки задачі, але не вказує, що це є лише наближена розв'язка, наближене ділення кута, а не його трисекція. Таке ж непорозуміння може ще більш виникнути у читача, завдяки невдалій постановці задачи, коли він читатиме також і цитовану вже цікаву книжку автора „Памятники математической старины в задачах“. Так само й у Е. І. Ігнатьева читаємо: „Разом з цим конче розуміється, що геометрична лінійка не має ділень. Коли б на її ребрі було хоч всього два знаки та коли б дозволялось їми користуватись і вдодаток пересувати лінійку, прилагоджуючись до фігури, тоді задача про поділ кола на три рівні частини (що вона не розв'язується у елементарній геометрії), одразу ж може бути розв'язана“, і далі подається „розв'язку“ — наближений спосіб Кемпе [2]). Треба підкреслити, що „прилагодження до фігури“ може бути приблизне, та що лінійкою, за Евклідом, ми з'єднуємо лише дві точки на площі. Це все може привести до того, що учні не довірятимуть запевненням своїх педагогів про неможливість трисекції кута та робитимуть не корисні, а шкідливі винаходи, шкідливі насамперед через те, що вони забирають багато марно витраченого часу.

Так само стоїть і питання з задачею про подвоєння куба та з задачею про поділ обвіду кола на рівні частини.

Першу з цих задач не можливо розв'язати згідно з змістом першого розділу, але нема достатніх підстав вважати неможливість її наближеної розв'язки за допомогою циркуля та звичайної технічної лінійки, яка має певну якусь ширину та довжину та менші боки якої мають прямі кути з довгими боками. Навіть більше: існує механічний спосіб точної конструкції, за якою креслять так звану цисоїду Діоклеса, за допомогою Ньютонового способу, що він вимагає, як механічного приладу, звичайнісінького косинчика [3]). Крім Діоклеса та Ньютона, розв'язки задачі про подвоєння куба за допомогою механізмів подали були: Платон

[1]) Г. Попов: „Изготовление...“, ст. 58.
[2]) Е. И. Игнатьев: Ibidem, ст. 181—183.
[3]) Г. Попов: „Изготовление...“. ст. 62.

(прилад з двох прямокутих косинчиків), Архит, Менехейм (розв'язка наближена, за допомогою перетину двох парабол), Аполоній, Вьєта, Декарт, Грегорі та інші[1]).

Так само не має значіння, з теоретичного боку, наближена розв'язка, за допомогою циркуля та лінійки з діленнями, задачі про поділ обводу кола на рівні частини кількістю, відмінною від тієї N, яка визначається сукупністю чинників у вигляді різних степенів 2-х та перших степенів первісних чисел форми $2^n + 1$. З попереднього безпосередньо випливає, що коли користуватись лінійкою з діленнями, то можна зробити наближений поділ обводу кола на таку кількість рівних частин, що у цьому числі кількости може бути чинником, крім степеня 2-х та перших степенів первісних чисел $2^n + 1$, також і степень числа 3.

Викладеного у вступі є досить, щоб не тільки не робити спроби виконати квадратуру кола, бо вона є неможлива з причини трансцендентности числа $\pi$, а й не витрачати марно часу на ознайомлення з математичними працями під такими назвами, як наприклад: Klimaszewski: La solution de quadrature du cercle, Paris, 1896[2]).

Наближені вирахування довжини боку квадрата за допомогою Бінгового прямокутного трикутника та за допомогою „геометричних будувань“ $\pi$ та $\sqrt{\pi}$, що їх подали були Коханський, Соне, Шпехт та інші[3]), також не мають ніякого теоретичного значіння.

Зрозуміло й не дивно, що, за словами Плутарха[4]), Анаксагор, сидячи у в'язниці за безбожжя та відганяючи від себе нудьгу математичними розвагами, працював над крадратурою кола, тоді як було б дивно, як би хто-небудь почав приділяти цьому багато уваги тепер, і коли за давніх часів Аристофан висмівав квадратурників („я тобі зроблю квадратове коло“, — комедія „Птиці“)[5]), то далеко більше можуть посміятись над квадратурниками зараз.

---

[1]) В. И. Лебедев: Ibidem, pp. 41—45.

[2]) В. Левицький: Ibidem, p. 28.

[3]) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики, № 9, 1904; № 5, 1905.

[4]) Плутарх: De exilio, розд. 17.

[5]) В. И. Лебедев: Ibidem, pp. 55, 56.

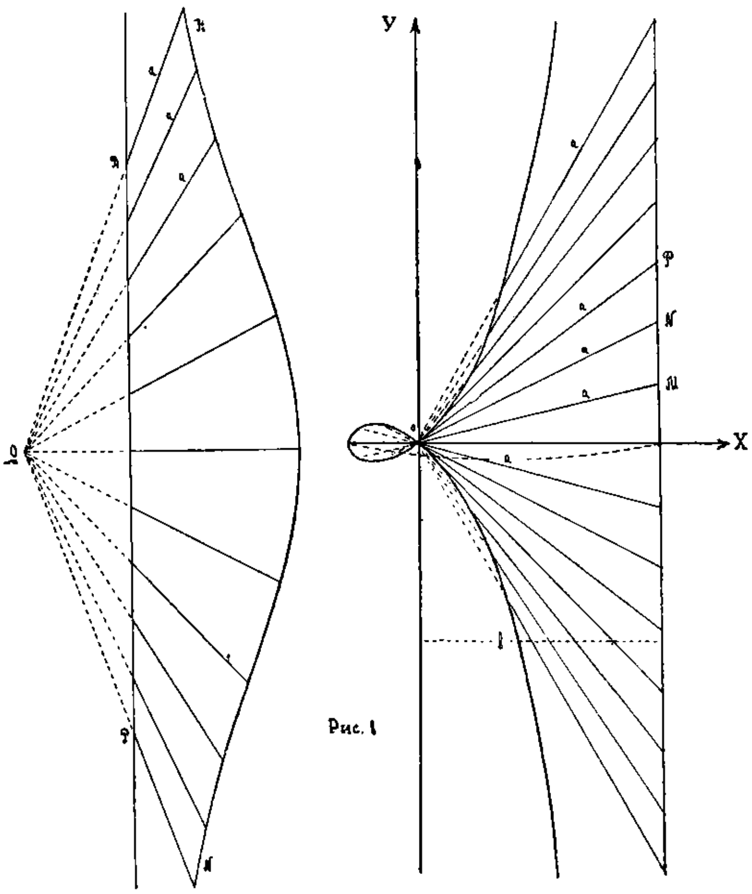


Рис. 1

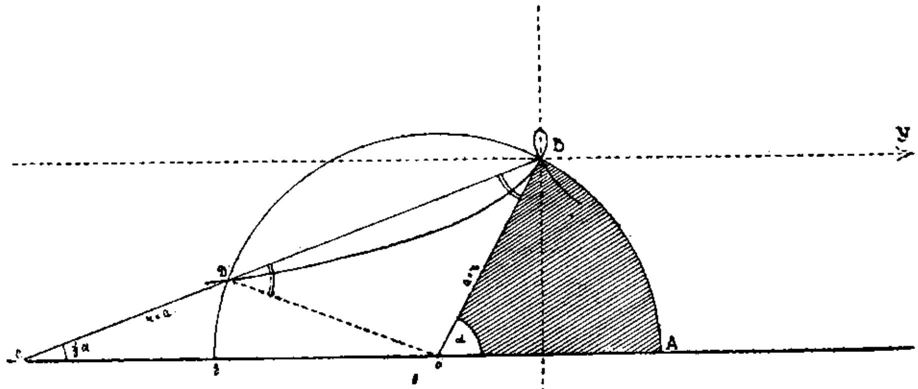

Рис. II

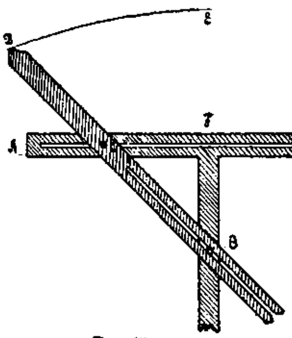

Рис. III

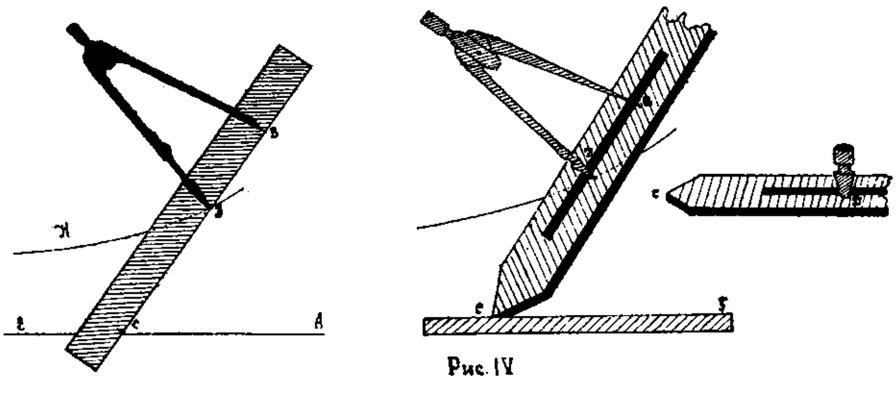

Рис. IV

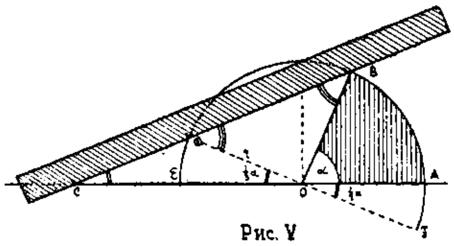

Рис. V

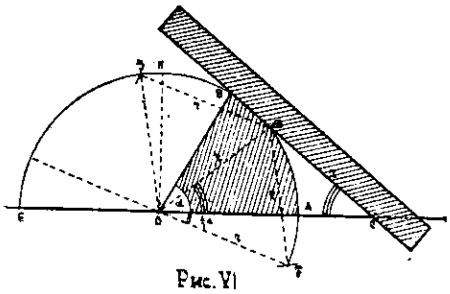

Рис. VI

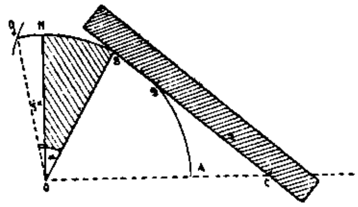

Рис. VII

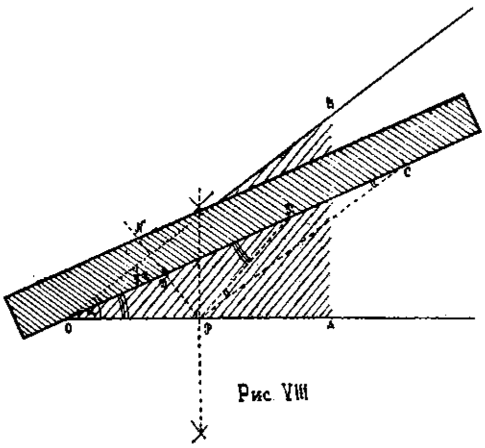

Рис. VIII

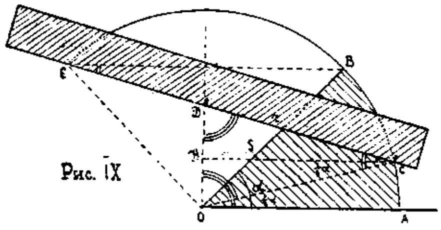

Рис. IX

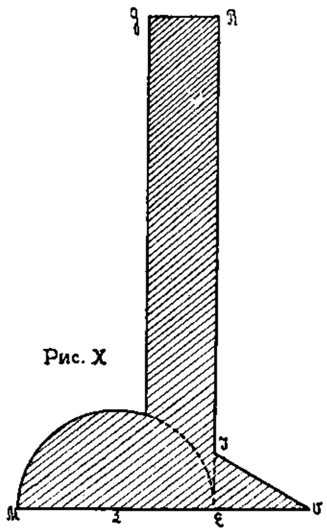

Рис. X

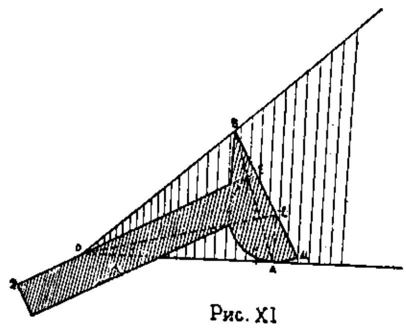

Рис. XI