MIRON ZARYCKI, (Lemberg).

Über eine mathematische Unterhaltung.

Die Unterhaltungsmathematik erfreut sich in neuester Zeit großer Beliebtheit sowohl in weiten Kreisen der Gebildeten, als auch bei den hervorragenden Mathematikern. Es werden sogar Universitätsvorträge über mathematische Spiele gehalten.*)

Ich gebe im Folgenden die mathematische Theorie einer mir von Frau Marie Hubert mitgeteilten Kartenunterhaltung.

1.

Wir betrachten zwei Mengen von Elementen:

$$a_n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$
$$b_n = 1, 2, 3, 4$$

und bilden alle Paare von diesen Elemente so, daß in jedem Paare an erster Stelle ein Element a_n und an der zweiten Stelle ein Element b_n steht. Es ist leicht zu sehen, daß wir auf diese Weise 28 verschiedene Symbole $(a_n\ b_n)$ erhalten. Wir nennen das Symbol $(a_n\ b_n)$ eine *„Karte“*, die Zahl a_n den *„Wert“* und die Zahl b_n die *„Farbe“* dieser Karte.

2.

Wir ordnen jetzt die 28 Karten unseres Systems, indem wir die Formeln angeben, welche den Wert a_n und die Farbe b_n der Karte (a_n, b_n) in Abhängigkeit von der Ordnungszahl n bestimmen.

Es bedeute $R\left(\frac{x}{y}\right)$ den Rest, welchen man beim Dividiren von x durch y erhält.

Es sei:

$$b_n = R\left(\frac{n}{4}\right) \quad \text{für } n \neq 4\,m+4 \qquad 1)$$

$$b_n = 4 \qquad n = 4\,m+4 \qquad 2)$$

$$\text{wo } m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Die Farben b_n erhalten also der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, .

*) Solche Vorträge wurden z. B. gelegentlich vom Prof. Gerhard Kowalewski gehalten. Im J. 1930 erschien bei B. G. Teubner das von ihm verfaßte sehr interessante Büchlein über „Alte und neue mathematische Spiele“.

Man beweist leicht, daß der Ausdruck $\frac{n+3\,b_n}{4}$ für jedes n eine ganze Zahl ist.

Es ist nämlich:

$$
\begin{array}{llll}
\text{für } n = 4\,m+1 & \frac{n+3\,b_n}{4} = \frac{4\,m+1+3}{4} = m+1 \\
n = 4\,m+2 & = \frac{4\,m+2+6}{4} = m+2 \\
n = 4\,m+3 & = \frac{4\,m+3+9}{4} = m+3 \\
n = 4\,m+4 & = \frac{4\,m+4+12}{4} = m+4
\end{array}
$$

Wir bestimmen jetzt die Werte a_n durch folgende zwei Formeln:

$$a_a = \frac{n+3\,b_n}{4}, \qquad 3)$$

wenn der, nach dieser Formel berechnete „Wert“ a_n einen der Werte 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 annimmt, und

$$a_n = \frac{n+3\,b_n}{4} + 7, \qquad 4)$$

wenn der Ausdruck $\frac{n+3\,b_n}{4}$ einen der Werte 1, 2, 3 bekommt.

Es ist leicht zu sehen, daß die nach den Formeln 3) und 4) berechnete Zahl a_n für $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots 27, 28$ einen der Werte 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 annehmen muß. Für jedes n erhalten wir dabei ein anderes Paar (a_n, b_n).

Die Formeln 1), 2), 3), 4) bestimmen eine Ordnung im System der Amben (a_n, b_n) und wir können jetzt folgende Tabelle der geordneten Karten aufschreiben:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$a_n =$	8	9	10	4	9	10	4	5	10	4	5	6	4	5	6	7	5	6	7	8	6	7	8	9	7	8	9	10
$b_n =$	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

$\{a_n, b_n\} =$ (8,1), (9,2), (10,3), (4,4), (9,1), (10,2), (4,3), (5,4), (10,1), (4,2), (5,3), (6,4), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (5,1), (6,2), (7,3), (8,4), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4), (7,1), (8,2), (9,3), (10,4).

Wir wollen nun näher betrachten, für welche Nummern n man beim Berechnen von a_n die Formel 4) anwenden muß, d. h. für welche n man die Ungleichheit $\frac{n+3\,b_n}{4} < 4$ bekommt.

Aus der letzten Ungleichheit bekommt man die Bedingung $n < 16-3\,b_n$ und für besondere Werte von b_n erhält man:

für $b_n=1$ ist	$n < 13$	also $n=1, 5, 9$
$b_n=2$	$n < 10$	„ $n=2, 6$
$b_n=3$	$n < 7$	„ $n=3$
$b_n=4$	$n < 4$	was der Bedingung $b_n = 4$ widerspricht.

Die sechs Paare (a_n, b_n) mit den Nummern $n=1, 2, 3, 5, 6, 9$, nehmen also eine gewiße Sonderstellung in unserem System der Karten ein. Wir beweisen jetzt, daß in diesen und nur in diesen Fällen die Ungleichheit $a_n - b_n \geqq 7$ gilt.

Wir bekommen nämlich aus der Formel 4):

$$4\,b_n - 3\,b_n = n+28$$

$$4\,a_n - 4\,b_n = n+28 - b_n$$

$$a_n - b_n = 7 + \frac{n - b_n}{4}$$

Es ist aber für $n=1, 2, 3, 5, 6, 9$: $n \geqq b_n$, also:

$$a_n - b_n \geqq 7$$

Für $n \neq 1, 2, 3, 5, 6, 9$ bekommen wir aus der Formel 3):

$$4\,a_n - 3\,b_n = n$$

$$4\,a_n - 4\,b_n = n - b_n$$

$$a_n - b_n = \frac{n - b_n}{4} \leqq 6 \text{ für } n \leqq 24 \text{ und auch}$$

für $n=25, 26, 27, 28$, weil für die 4 letzten Werte von n $b_n = 1, 2, 3, 4$ ist.

3.

Das Endziel unserer „Theorie" ist die Angabe der Formel, die jedem Paare (a_n, b_n) eine bestimmte Nummer zuordnet. Wir müßen zuerst beweisen, daß eine solche Zuordnung eindeutig sein muß, daß also $m \neq n$ ist, wenn wenigstens eine der Bedingungen $a_m \neq a_n$, $b_m \neq b_n$ erfüllt ist.

Man bekommt entweder beide Werte a_m und a_n aus einer und derselben der beiden Formeln 3) und 4), oder aber a_m aus der Formel 3) und a_n aus der Formel 4).

Im ersten Falle erhielten wir aus der Formel 3) oder aus der Formel 4) (wenn wir $m=n$ annehmen):

$$4\,(a_m - a_n) = 3\,(b_m - b_n).$$

Wäre $b_m \neq b_n$, so müßte die Differenz $b_m - b_n$ durch 4 teilbar sein, was aber nicht möglich ist. Wäre $b_m = b_n$, so müßte auch $a_m = a_n$ sein.

Im zweiten Falle erhielten wir aus der Formel 3) und aus der Formel 4):

$$m = 4\,a_m - 3\,b_m = 4\,a_n - 3\,b_n - 28 = n,$$

$$4\,(a_m - a_n) = 3\,(b_m - b_n) - 28,$$

was auch nicht möglich ist, weil $b_m - b_n$ durch 4 nicht teilbar ist und im Falle $b_m = b_n$ wir annehmen müßten: $a_m - a_n = 7$, was den Voransetzungen $a_n \leqq 10$, $a_m \geqq 4$ widerspricht.

Es kann also jeder Karte nur eine Ordnungsnummer zugeordnet werden.

Die Zuordnung selbst bekommt man leicht aus den Formeln 3) und 4).

Ist nämlich $a_n - b_n \leqq 6$, so bekommen wir aus der Formel 3):

$$n = 4\ a_n - 3\ b_n \qquad \text{I)}$$

Ist aber $a_n - b_n \geqq 7$, so erhalten wir aus der Formel 4):

$$n = 4\ a_n - 3\ b_n - 28 \qquad \text{II).}$$

Wir können die beiden Formeln I) und II) in eine Vorschrift zusammenfaßen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir Folgendes:

Ist $a_n - b_n \leqq 6$, so ist:

$$n = 4\ a_n - 3\ b_n = 4\ a_n - 4\ b_n + b_n = 4\ (a_n - b_n) + b_n \leqq 24 + b_n \leqq 28.$$

Ist aber $a_n - b_n \geqq 7$, so erhalten wir:

$$n + 28 = 4\ a_n - 3\ b_n = 4\ (a_n - b_n) + b_n \geqq 28 + b_n \geqq 29$$

Wir können jetzt folgende allgemeine Regel angeben:

Die Ordnungsnummer einer Karte ist gleich der Differenz des Vierfachen von ihrem Werte und des Dreifachen von ihrer Farbe, oder derselben um 28 verminderten Differenz, wenn sie mehr als 28 beträgt.

4.

Wir wollen schließlich unser System von geordneten Amben auf die anfangs erwähnte Kartenunterhaltung anwenden.

Man halte in der Hand 28 mit dem Bildern nach unten gekehrte Spielkarten in solcher Anordnung, daß die oberste Karte As Treff ist, die zweite darunter König Treff, dann Dame Treff, Bube Treff, 10 Treff 9 Treff und 8 Treff. Dann kommen: As Karo, König Karo u. s. w. 8 Karo, As Herz, bis 8 Herz und As Pik bis 8 Pik. Jede von 28 Karten hat jetzt von oben nach unter gezählt eine Nummer, z. B. 10 Herz hat die Nummer 19, 9 Pik die Nummer 27 u. s. w.

Wir stellen jetzt die Karten auf den Tisch in vier Teilreinhen in folgender Anordnung:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
14,	8,	9,	10,	11,	12,	13
20,	21,	15,	16,	17,	18,	19
26,	27,	28,	22,	23,	24,	25

In der ersten Reihe liegen also sieben Karten von As Treff bis 8 Treff. In zweiter Reihe liegen alle Karo, eber jede Karte um einen Platz nach rechts verschoben und 8 Karo kommt nach links an den Anfang. Weiter kommt in der dritten Reihe As Herz unter König Karo, König Hertz unter die Dame Karo u. s. w., am Anfang der dritten Reihe liegen 9 Herz und 8 Herz. In der vierten Reihe liegen alle Pik in der Reihenfolge 10, 9, 8, As, König, Dame, Bube.

Jetzt legen wir wiederum alle Karten aufeinander und zwar in folgender Anordnung:

Unten kommt 26 (d. h. 10 Pik), darauf 20 (9 Herz), darauf 14 (8 Karo), dann 1, 27, 21, 8, 2, 28, 15, 9, 3, 22, 16, 10, 4, 23, 17, 11, 5, 24, 18, 12, 6, 25, 19, 13, 7, so daß die oberste karte 7 d. h. 8 Treff ist.

Endlich legen wir die oberste Karte d. h. 8 Treff auf den Tisch, rechts davon die zweite von oben d. h. 13 (9 Karo), rechts davon die dritte (10 Herz) u. s. w. in einer Reihe bis zu der 28-ten Karte. Die letzte Karte am rechten Ende der Reihe ist jetzt 10 Pik. die vorletzte 9 Herz u. s. w. Alle 28 Karten liegen jetzt in einer Reihe und ihre Anordnungsweise ist nicht leicht zu bestimmen. Man achte darauf, daß die Karten während des ganzen Spieles mit den Bildern nach unten gekehrt sein sollen,

Das Spiel beruht nun darauf, daß wir jede beliebige verlangte Karte aufdecken können. Weil die Karten auf verschiedene Weise zerlegt und zusammengenommen wurden und ihre einreihige Anordnuug schwer zu übersehen ist, erscheint das „Erraten“ der Stelle der verlangten Karte sehr merkwürdig für denjenigen, der die Theorie das Spieles nicht erlernt hat.

Wir ordnen den Karten folgende „Werte“ zu:

A=7, König=6, Dame=5, Bube=4, 10=10, 9=9, 8=8.

Die Farben bekommen folgende Nummern:

Treff = 1, Karo = 2, Herz = 3, Pik = 4.

Jeder Karte entspricht jetzt eineindeutig ein Paar von Zahlen aus dem von uns betrachteten System $\{a_n, b_n\}$. Z. B. ist: 9 Herz = (9,3), As Pik = (7,4), Bube Treff = (4,1) u. s. w.

Man überzeugt sich leicht, daß die letzte einreihige Anordnung der Spielkarten auf dem Tische mit der Anordnung entsprechender Symbole (a_n, b_n) im oben behandelten System identisch ist.

Es gilt also auch hier dasselbe allgemeine Gesetz, welches jeder Karte ihre Nummer eindeutig zuordnet.

Will z. B. jemand, daß man Dame Karo d. h. (5,2) aufdecke, so berechnen wir leicht im Kopfe $n = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$, zählen in der Reihe der zugedeckten Karten von links nach rechts bis 14 und decken die 14-te Karte auf.

Verlangt jemand 10 Treff d. h. (10,1) so berechnen wir $n = 4 \cdot 10 - 3 \cdot 1 - 28 = 9$ und decken die 9-te Karte auf.

Dem Uneingeweihten wird es immer wunderbar erscheinen, wenn jemand jede verlangte Karte ohne viel nachzudenken aufdeken kann, ja sogar dann, wenn man ihm die betreffende Regel mitteilt.