МИРОН ЗАРИЦЬКИЙ (Львів)

Сучинники кореляції в теорії математичної статистики.

У західноевропейських народів і в Америці бачимо в післявоєнних роках незвичайно інтензивний розвиток статистичної техніки, а з другого боку численні праці математиків, природознавців і економістів поклали ясні основи під абстрактну теорію математичної статистики. Щойно найновіші роки принесли нам точні дефініції статистичних понять і логічні сформулювання проблем теоретичної статистики. Усі, що їм була потрібна статистика при їх спеціяльних дослідах, зрозуміли, що тільки математична аналіза й абстрактна теорія ймовірности можуть дати наукову основу до будови статистики й до інтерпретації її висновків у приложенні до економіки, соціології й природознавства.

У нас цею ділянкою ще ніхто не зацікавився. А чейже проблеми наукової статистики моглиби сьогодні заінтересувати не тільки математиків. Статистичними методами послугується кожний фізик, антрополог, зоолог і ботанік. Але мабуть найбільше користи принесла б наукова статистика дослідникам економічного життя нашого народу. Кожна — і найменша і найбільша — економічна установа зладжує періодично „білянси" і „статистичні викази", але вони дають хиба тільки сирий матеріял до статистичних дослідів. До них треба щойно прикласти цілий математичний апарат теорії статистики, щоби на основі математичних обчислень можна було подати якісь загальні висновки. Щойно математична аналіза статистичних табель може довести до якоїсь інтерпретації безлічи числових даних, що їх подибуємо у виказах і білянсах. Математична статистика відкриває звязки між економічними явищами і подає числа, що оцінюють ступінь залежности між економічними фактами. Практик-економіст використовує ці висновки для доцільного організовання економічного життя, а теоретик досліджує причини й наслідки відкритих математиком фактів і формує загальні закони теоретичної економіки.

Це все навело мене на думку подати короткий фрагмент із теорії найновішої статистики і з'ілюструвати деякі статистичні методи на білянсах кооператив приналежних до Ревізійного Союза Українських Кооператив у Львові.

I.

Буду зазначувати основні поняття теорії статистики символами, що їх увів професор університету в Осло *А. Чупров* у своїй знаменитій монографії: „Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie“ (B. G. Teubner, 1925) і яких уживають, ізза їх простоти й доцільности, майже всі новіші автори, як нпр. *R. Risser - C. E. Traynard* у своїй книзі „Les principes de la Statistique mathématique“ (Gauthier-Villars, 1933).

Величину x називаємо припадковою змінною величиною [1]) k-того ступня, коли ця величина може мати k різних вартостей і коли є все точно означена ймовірність, що вона буде мати якунебудь із тих вартостей. Коли нпр. маємо у скрині 5 карток із числом 1, 3 із числом 2 і 2 із числом 3 і тягнемо на сліпо одну картку, то величина добутого на картці числа може мати три різні вартости: $x_1=1$, $x_2=2$ і $x_3=3$. Притім імовірність, що буде $x=1$, є рівна $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, імовірність, що $x=2$, є $\frac{3}{10}$, а ймовірність, що $x=3$, є $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Отже добуте зі скрині число є припадковою змінною величиною 3-тього ступня.

Припустім, що дві припадкові змінні величини x і y можуть мати вартости:

$$x=x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_k$$
$$y=y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots\ y_l.$$

Символом $p_{i|}$ зазначуємо ймовірність, що величина x дістане вартість x_i, а знак $p_{|j}$ це ймовірність, що буде $y=y_j$.

Символ $p_{i|j}$ нехай зазначує ймовірність, що $x=x_i$ і рівночасно $y=y_j$.

Знак $p_{i|}^{(j)}$ це ймовірність, що змінна x буде мати вартість x_i, коли вже знаємо, що величина y має вартість y_j, а $p_{|j}^{(i)}$ це ймовірність, що буде $y=y_j$, коли вже знаємо, що $x=x_i$.

Припадкові змінні x і y називаємо стохастично [2]) незалежними величинами, коли $p_{|j}^{(i)}=p_{|j}$ для $i=1,\ 2, \ldots\ k$, $j=1,\ 2 \ldots\ l$. Тоді маємо також: $p_{i|}^{(j)}=p_{i|}$ для $i=1,\ 2, \ldots\ k$, $j=1,\ 2, \ldots\ l$.

[1]) zufällige variable Grösse.

[2]) Слово „стохастичний“ (від *στοχάζομαι* = відгадую, додумуюся) має значіння прикметника до назви „теорія ймовірности“. У німецькій мові маємо: stochastisch-wahrscheinlichkeitstheoretisch. Тяжко в нашій мові найти відповідний прикметник, що характеризувавби те все, що відноситься до теорії ймовірности (як нпр. ботаніка-ботанічний).

Достатньою й необхідньою умовою незалежности величин x і y є рівність: $p_{i|j}=p_{i|} \cdot p_{|j}$.

II.

Моментом ступня $f+g$ називаємо математичне сподівання добутка $x^f \cdot y^g$, отже:

$$m_{f|g} = E\, x^f \cdot y^g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{i|j}\, x_i^f\, y_j^g.$$

Математичні сподівання:

$$\mu_{f|g}=E\,(x-m_{1|0})^f\,(y-m_{0|1})^g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{i|j}\,(x_i-m_{1|0})^f\,(y_j-m_{0|1})^g$$

називаємо середніми відхиленнями. Це моменти відносно точки:

$$x_0 = m_{1|0} = \sum_{i=1}^{k} p_{i|}\, x_i, \quad y_0 = m_{0|1} = \sum_{j=1}^{l} p_{|j}\, y_j.$$

Величини $\mu_{2|0} = \sigma^2_x$ і $\mu_{0|2} = \sigma^2_y$ називаємо дисперсіями величин x і y (це квадрати середніх квадратичних відхилень).

Число $m_{1|0}$ є математичним сподіванням змінної x, а $m_{0|1}$ це математичне сподівання величини y.

Збір усіх можливих вартостей величини x і відповідних імовірностей, що x буде мати котрунебудь із тих вартостей, називаємо законом розділу припадкової величини x.

Колиж маємо дві припадкові змінні величини x і y з їх можливими вартостями і знаємо, яка є ймовірність кожної пари тих вартостей, то кажемо, що знаємо закон залежности обох величин. Отже закон залежности подає всі вартости x_1, x_2, x_3,... x_k і y_1, y_2, y_3,... y_l і всі ймовірности $p_{i|j}$ для $i=1, 2,... k$ і $j=1, 2... l$.

Збір усіх вартостей, які може мати величина y тоді, коли знаємо вже, що величина x має якусь точно означену вартість $x=x_i$, і збір усіх імовірностей, що y буде мати котрунебудь із своїх вартостей, (при данім $x=x_i$) називаємо умовним законом розділу величини y. Отже умовний закон розділу величини y (для $x=x_i$) мусить подати вартости величин $p_{|j}^{(i)}$ для $j=1, 2,... l$.

Коли умовний закон розділу величин y є такий самий для всіх вартостей величини x, то y є стохастично незалежне від величини y.

Треба точно відрізнити поняття стохастичної залежности від поняття функційної залежности межи двома величинами. Величина y є функцією величини x, коли є даний закон, на основі якого кожній вартости величини x відповідає якась одна вартість величини y, або коли для якоїсь вартости „аргументу“ x

величина y може мати різні (але точно означені) вартости, причім не можна говорити про ймовірність, що y дістане одну з тих вартостей. Коли нпр. $y=\sqrt{x}$, то для $x=4$, може бути $y=+2$ або $y=-2$, але ту не можна питати, яка є ймовірність, що буде $y=+2$.

Умовним математичним сподіванням величини y називаємо математичне сподівання величини y, коли x має якусь точно означену із своїх можливих вартостей. Означуємо його формулою:

$$E^{(i)}\, y = \sum^{l} p_{j|}{}^{(i)}\, y_j\,.$$

Аналогічно означуємо умовне сподівання величини x:

$$E^{(j)}\, x = \sum_{i=1}^{k} p_{i|}{}^{(j)}\, x_i\,.$$

Умовне математичне сподівання величини y є функцією величини x:

$$E^{(i)}\, y = F(x_i).$$

Це рівнання називаємо рівнанням регресії величини y відносно величини x. Рівнання $E^{(j)} x = \Phi\,(y_j)$ є рівнанням регресії змінної x відносно змінної y. Образи тих рівнань називаємо лініями регресії. Ті „лінії“ будуть складатися очевидно з поодиноких точок, якщо можливі вартости величин x і y не творять континуум.

Pearson називає змінну y корелятивно (не-) залежною від змінної x, коли умовне математичне сподівання величини y є (не-) залежне від вартости величини x. При корелятивній незалежности величини y від величини x маємо: $E^{(i)}\, y = \text{const}$, а лінія регресії y відносно x є простою рівнобіжною до оси X.

Із стохастичної незалежности виходить незалежність корелятивна, але з корелятивної незалежности не виходить незалежність стохастична. З корелятивної незалежности величини y відносно x не виходить корелятивна незалежність величини x відносно y.

Можемо також досліджувати середнє квадратичне відхилення величини y при якійсь точно означеній вартости $x = x_i$. Зазначимо його символом $\sigma^{(i)}(y)$. Це є умовне середнє квадратичне відхилення величини y. Рівнання $\sigma^{(i)}(y) = f\,(x_i)$ називаємо скедастичним рівнанням величини y відносно величини x. Рівнання $\sigma^{(j)}(x) = \varphi\,(y_j)$ називаємо скедастичним рівнанням величини x відносно величини y. Коли $\sigma^{(i)}(y) = \text{const}$ (для $i=1, 2,\ldots k$), то називаємо величину y гомоскедастичною відносно величини x, коли $\sigma^{(i)}(y) = \text{const}$, то y є гетероскедастичне відносно змінної x.

III.

Основною проблємою теорії стохастичної залежности між двома припадковими змінними величинами є математичне означення тої залежности. Зміна одної величини може менче або більше зміняти розподіл можливих вартостей другої величини і їх імовірностей. Отже треба також означити якось міру взаємної залежности між двома припадковими змінними величинами.

Pearson увів міру, яку назвав середньою квадратичною стичністю (Mean square Contingency) і яку означив рівністю:

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\{p_{i|j} - p_{i|} \cdot p_{|j}\}^2}{p_{i|} \cdot p_{|j}}$$

Коли величини x і y є стохастично незалежні, то маємо $p_{i|j} = p_{i|} \cdot p_{|j}$, отже $\varphi^2 = 0$. Коли y є функцією величини x, то: $l = k$ і маємо: $\varphi_2 = k - 1$.

Отже величина

$$\tau^2 = \frac{1}{\sqrt{(k-1)(l-1)}} \cdot \varphi^2$$

є мірою стохастичної залежности, якої вартість лежить між 0 і 1, залежно від ступня залежности, від повної незалежности аж до функційної залежности. Число τ^2 як міру залежности увів замість φ^2 *А. Чупров.* Коли $k \to \infty$, $l \to \infty$, тоді треба в кожнім випадку доказати існування границі $\lim \tau^2$.

Найважнішим числом у теорії кореляції є сучинник кореляції означений формулою:

$$r_{1|1} = \frac{\mu_{1|1}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\mu_{1|1}}{\sqrt{\mu_{2|0} \cdot \mu_{0|2}}}$$

Коли x і y є стохастично незалежні, то $r_{1|1} = 0$. Але з рівности $r_{1|1} = 0$ не виходить стохастична незалежність. З другого боку рівність $r_{1|1} = 1$ не є необхідною умовою функційної залежности між x і y. Тільки тоді, коли лінії регресії y відносно x і x відносно y є прості, виходить з рівности $r_{1|1} = 1$ функційна залежність між величинами x і y. Маємо все: $0 \leq r^2_{1|1} \leq 1$.

Ще іншою мірою залежности є „корелятивне відношення“:

$$\eta^2_{y|x} = 1 - \frac{1}{\mu_{0|2}} \sum_{i=1}^{k} p_{i|} \, \mu^{(i)}{}_{|2}.$$

Коли регресія є простолінійна, то $r^2_{1|1} = \eta^2_{y|x}$, а в інших випадках є все $r^2_{1|1} < \eta^2_{y|x}$.

Коли $\eta^2_{y|x} = 0$, то x і y є корелятивно незалежні, але для даного $x = x_i$ може бути різна амплітуда змін вартостей величини y

IV.

Для ілюстрації подаю обчислення статистичних сталих на однім конкретнім прикладі, де ймовірности є дані a priori. Припустім, що в скрині A є 3 картки з числом 1, дві картки з числом 2 і одна картка з числом 3, а в скрині B є дві картки з числом 1 і одна картка з числом 2. Тягнемо рівночасно одну картку зі скрині A і одну картку зі скрині B. Нехай x зазначує число добуте зі скрині A, а літера y нехай зазначує суму чисел добутих з обох скринь. Щоби дослідити стохастичну залежність межи припадковими величинами x і y, випишемо всі можливі випадки. Тому, що в скрині A є 6 карток, а в скрині B є їх 3, дістанемо 18 можливих випадків:[1])

$$x = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3.$$
$$z = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2.$$
$$y = 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5.$$

Маємо: $i = 3$, $j = 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 5$. Число можливих випадків $N = 18$. Зазначім: $\eta_{i|}$ = число випадків, у яких $x = x_i$, $\eta_{|j}$ = число випадків, у яких $y = y_j$, $\eta_{i|j}$ = число випадків, у яких $x = x_i$ і рівночасно $y = y_j$.

Кореляційна табеля.

	$y_1 = 2$	$y_2 = 3$	$y_3 = 4$	$y_4 = 5$	
$x_1 = 1$	6	3			$n_{1\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{1\|j} = 9$
$x_2 = 2$		4	2		$n_{2\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{2\|j} = 6$
$x_3 = 3$			2	1	$n_{3\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{3\|j} = 3$
	$n_{\|1} = 6$	$n_{\|2} = 7$	$n_{\|3} = 4$	$n_{\|4} = 1$	$N = \sum_{i=1}^{3} n_{i\|} = \sum_{j=1}^{4} n_{\|j} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} n_{i\|j} = 18$

Табелі ймовірностей.

$$p_{1|} = \tfrac{1}{2}, \quad p_{2|} = \tfrac{1}{3}, \quad p_{3|} = \tfrac{1}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|} = 1 \qquad \text{I.}$$

$$p_{|1} = \tfrac{1}{3}, \quad p_{|2} = \tfrac{7}{18}, \quad p_{|3} = \tfrac{2}{9}, \quad p_{|4} = \tfrac{1}{18}; \quad \sum_{j=1}^{4} p_{|j} = 1$$

---

[1]) Літера z зазначує число добуте зі скрині B.

$$p_{|1}^{(1)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|2}^{(1)} = \tfrac{1}{3},\quad p_{|3}^{(1)} = 0,\quad p_{|4}^{(1)} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(1)} = 1 \qquad \text{II.}$$

$$p_{|1}^{(2)} = 0,\quad p_{|2}^{(2)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|3}^{(2)} = \tfrac{1}{3},\quad p_{|4}^{(2)} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(2)} = 1$$

$$p_{|1}^{(3)} = 0,\quad p_{|2}^{(3)} = 0,\quad p_{|3}^{(3)} = \tfrac{2}{3},\quad p_{|4}^{(3)} = \tfrac{1}{3};\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{|j}^{(3)} = 1$$

$$p_{1|}^{(1)} = 1,\quad p_{2|}^{(1)} = 0,\quad p_{3|}^{(1)} = 0;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(1)} = 1 \qquad \text{III.}$$

$$p_{1|}^{(2)} = \tfrac{3}{7},\quad p_{2|}^{(2)} = \tfrac{4}{7},\quad p_{3|}^{(2)} = 0;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(2)} = 1$$

$$p_{1|}^{(3)} = 0,\quad p_{2|}^{(3)} = \tfrac{1}{2},\quad p_{3|}^{(3)} = \tfrac{1}{2};\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(3)} = 1$$

$$p_{1|}^{(4)} = 0,\quad p_{2|}^{(4)} = 0,\quad p_{3|}^{(4)} = 1;\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|}^{(4)} = 1$$

$$p_{1|1} = \tfrac{1}{3},\quad p_{1|2} = \tfrac{1}{6},\quad p_{1|3} = 0,\quad p_{1|4} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{1|j} = p_{1|} \qquad \text{IV.}$$

$$p_{2|1} = 0,\quad p_{2|2} = \tfrac{2}{9},\quad p_{2|3} = \tfrac{1}{9},\quad p_{2|4} = 0;\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{2|j} = p_{2|}$$

$$p_{3|1} = 0,\quad p_{3|2} = 0,\quad p_{3|3} = \tfrac{1}{9},\quad p_{3|4} = \tfrac{1}{18};\qquad \sum_{j=1}^{4} p_{3|j} = p_{3|}$$

$$\sum_{i=1}^{3} p_{i|1} = p_{|1},\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|2} = p_{|2},\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|3} = p_{|3},\qquad \sum_{i=1}^{3} p_{i|4} = p_{|4}$$

Табеля математичних сподівань.

$$\mathrm{E}\,y^{(1)} = \tfrac{7}{3},\quad \mathrm{E}\,y^{(2)} = \tfrac{10}{3},\quad \mathrm{E}\,y^{(3)} = \tfrac{13}{3};\qquad \mathrm{E}\,y = 3 \qquad \text{V.}$$
$$\mathrm{E}\,x^{(1)} = 1,\quad \mathrm{E}\,x^{(2)} = \tfrac{11}{7},\quad \mathrm{E}\,x^{(3)} = \tfrac{5}{2},\quad \mathrm{E}\,x^{(4)} = 3\qquad \mathrm{E}\,x = \tfrac{5}{3}$$

Табеля моментів.

$$m_{1|0} = \tfrac{5}{3},\quad m_{0|1} = 3,\quad m_{0|2} = \tfrac{88}{9},\quad m_{1|1} = \tfrac{50}{9},\quad m_{2|0} = \tfrac{10}{3}. \qquad \text{VI.}$$
$$\mu_{1|0} = 0,\quad \mu_{0|1} = 0,\quad \mu_{0\,2} = \tfrac{7}{9},\quad \mu_{1|1} = \tfrac{5}{9},\quad \mu_{2|0} = \tfrac{5}{9}.$$

Дисперсії: $\sigma_x^2 = \mu_{2|0} = \frac{5}{9}$, $\sigma_y^2 = \mu_{0|2} = \frac{7}{9}$.

З табелі математичних сподівань дістаємо рівнання регресії: $\mathrm{E}\,y^{(i)} = x_i + \frac{4}{3}$. Бачимо, що лінія регресії y відносно x є простою.

Коли регресію x відносно y представимо рівнанням третього ступня, дістаємо параболю третього ступня:

$$\mathrm{E}\,x^{(j)} = -\tfrac{11}{84}\,y_j^3 + \tfrac{19}{14}\,y_j^2 - \tfrac{313}{84}\,y_j + \tfrac{57}{14}.$$

Наближена лінійна регресія x відносно y має форму:

$$\mathrm{E}\,x^{(j)} = \tfrac{5}{7}\,y_j - \tfrac{10}{21}.$$

Табеля відносних моментів.

$\mu_{|2}^{(1)} = \frac{2}{9}$, $\mu_{|2}^{(2)} = \frac{2}{9}$, $\mu_{|2}^{(3)} = \frac{2}{9}$.

$\mu_{2|}^{(1)} = 0$, $\mu_{2|}^{(2)} = \frac{12}{49}$, $\mu_{2|}^{(3)} = \frac{1}{4}$, $\mu_{2|}^{(4)} = 0$.

Із цеї табелі бачимо, що y є відносно x гомоскедастичне, а x відносно y гетероскедастичне.

Сучинник кореляції: $r_{1|1} = \sqrt{\frac{5}{7}} = 0{,}845$

Сучинники регресії: $b_{1|} = \frac{5}{7}$, $b_{|1} = 1$.

Відношення кореляції: $\eta_{y|x}^2 = \frac{5}{7}$, $\eta_{x|y}^2 = \frac{51}{70}$.

Маємо $\eta_{x|y} = r_{1|1}$, бо регресія y відносно x є лінійна.

Середня квадратична стичність: $\varphi^2 = \frac{43}{42}$.

Сучинник Чупрова: $r^2 = \frac{43}{42\sqrt{6}} = 0{,}418$.

V.

Розгляньмо тепер корелятивну залежність межи коштами адміністрації й оборотами за 1935-ий рік звичайних кооператив для закупу і збуту об'єднаних в окружних осередках тернопільського воєвідства [1]). Не вчислюю ту гуртівень, кооператив з молочарськими відділами, ані кредитових кооператив. Розглядаю тільки кооперативи уміщені в „Білянсах“ під знаком 8 а) і з них відкидаю ще кількадесять кооператив, що їх обороти є більші як 25.500 зл., або кошти адміністрації більші як 1.850 зл. Ті неузгляднені кооперативи занадто рідко розсіяні в корелятивній табелі й тому не можна до них прикладати статистичних метод досліду.

У корелятивній табелі будемо зазначувати літерою x оборот кооперативи (в тисячах золотих), а літерою y кошти адміністрації (у сотках золотих). Позиція $x = n$ обіймає кооперативи, що їх обороти лежать у межах: $1000\,n - 500 < x < 1000\,n + 500$, а позиція $y = m$ обіймає кооперативи, що їх кошти адміністрації лежать у межах: $100\,m - 50 < y < 100\,m + 50$.

Треба памятати, що корелятивна табеля є тут емпірична і тому всі ймовірности не будуть дані a priori. Висновується їх вартість з числових даних табелі на основі закону великих чисел. Корелятивні параметри буду обчислювати так, якби ймовірности були дані a priori, отже поминаю (впрочім дуже малі) систематичні похибки при обчислюванню корелятивних сталих з емпіричного матеріялу.

[1]) Білянси кооператив приналежних до Ревізійного Союзу Українських Кооператив у Львові, об'єднаних в окр. осередках терноп. воєвід. Львів, 1936. Накладом Рев. Союзу Укр. Кооп. у Львові.

Кореляційна табеля.

y / x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Σ
1	1	1																	2
2	1		2	1															4
3	1	1	4	4	3	1													14
4				3	4	1													8
5	1		2	3	8	2													17
6			1	7	5	5	2												20
7			1	6	8	12	3	1											31
8				1	6	9	9	4	2	2									33
9					3	10	15	10	3	2	1	2							46
10					1	3	18	11	11	1	2								47
11					1	1	7	10	12	3	1								35
12						4	7	8	11	5	1	2	2	1	1				42
13							1	6	14	9	3	6		1		1			41
14							2	7	6	11	5	6	2	1			1		41
15							1	4	3	2	8	3		2					23
16							2	2	4	5	6	1	4	1	2				27
17					1				5	3	3	4	4	1	3	1			25
18										2	3	3	2	1	1				12
19								1	2	5	5	5		5		3			26
20											2	3	3	7	3	2	1		21
21					1				1	3	2	2	5	4	4	1	4		27
22								1					4	3	2	1	2	1	14
23												3		1	1	1		2	8
24													1	1	1	1	1	1	6
25										1						2		3	6
Σ	4	2	10	25	41	48	67	65	74	54	42	40	28	29	18	13	9	7	576

Середні (аритметичні) вартости: $m_{1|0} = 12,7$; $m_{0|1} = 9$.
Дисперсії: $\sigma_x^2 = 28,5$; $\sigma^{y2} = 12$.
Сучинники регресії: $b_{1|} = 1,28$; $b_{|1} = 0,54$.
Сучинник кореляції: $r_{1|1} = 0,83$.
Середня квадратична стичність: $\varphi^2 = 2,76$.
Сучинник Чупрова: $\tau^2 = 0,14$.

Із корелятивної табелі і (докладніше) з великої вартости сучинника $r_{1|1}$ бачимо (впрочім самозрозумілий факт), що кошти адміністрації є позитивно залежні від оборотів. Легко також вияснити причину великих вартостей дисперсій. Рішає тут велика ріжнородність числа населення і маєткового стану галицьких сіл. Сучинники, що я їх обчислив, не дають ще змоги висновувати якісь глибші залежности між поодинокими позиціями кооперативних білянсів. Требаби ще прослідити залежність коштів адміністрації від інших даних білянсів, нпр. від величини товарових кредитів або від величини уділів. Треба направити деякі друкарські похибки і зверифікувати евентуальні позиції, що є наслідком т. зв. „фабрикації" білянсів. Цікаві булиби зміни вартостей статистичних сучинників, колиб брати під розвагу кооперативи всіх воєвідств, дослідити залежність даних білянсів від майна громад, від величини консумції алькоголю, від флюктуацій вартости гроша і порівнати статистичні параметри українських кооператив з відповідними статистичними сталими білянсів кооператив необ'єднаних Ревіз. Союзом Українських Кооператив. Економісти моглиби через інтерпретацію математичних даних не тільки стверджувати факти економічного розвитку, але й находити вказівки для практичної роботи.

Я хотів тут подати тільки малий фрагмент з приложення математичної статистики до економіки для ілюстрації основних понять і методи досліду модерної статистики.