СПЕЦІАЛЬНІ ОПОРИ І ГОМОТОПІЧНІ БІАЛГЕБРИ

Володимир ЛЮБАШЕНКО

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3, Київ-4, 01601

Редакція отримала статтю 29 вересня 2003 р.

Для заплетеної категорії $\mathcal{C}$ ми будуємо спеціальну опору $\overline{\mathcal{C}}$ таку, що функтори спеціальних опор $\mathrm{Bialg} \to \overline{\mathcal{C}}$ знаходяться у взаємно однозначній відповідності із заплетеними біалгебрами у $\mathcal{C}$.

1. ОПЕРАЦІЇ В ГРАДУЙОВАНІЙ АЛГЕБРІ ХОПФА

Нехай R — комутативне асоціативне кільце з одиницею, $\mathcal{H}$ — заплетена R-біалгебра. Ітероване комноження позначимо

$$\Delta^{(l)} = (\Delta^{(l-1)} \otimes 1) \circ \Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{\otimes l}.$$

З асоціативності, коасоціативності і аксіоми біалгебри випливають рівняння

$$\Delta^{(l)}(x^1) \cdot \ldots \cdot \Delta^{(l)}(x^k) = \Delta^{(l)}(x^1 \cdot \ldots \cdot x^k) \tag{1}$$

для довільних елементів $x^m \in \mathcal{H}$. Зверніть увагу на те, що множення зліва використовує заплетіння. Це просте спостереження ініціювало вивчення операцій в заплетених алгебрах (і категоріях) Хопфа у [5, 6]. Інший можливий підхід до цих операцій – через спеціальні опори (PROP).

Спеціальні опори (special PROP) означив Маркл у [9], щоб описати A_∞-версії біалгебр. У цій статті Маркл описує ясно, що він називає спеціальною опорою, але не дає означення. Тож ми даємо його тут, узагальнюючи його для наших цілей. Вартим уваги є те, що спеціальна опора не обов'язково є опорою в сенсі Маклейна [8]. Проте, ці поняття є близькими за змістом.

2. СПЕЦІАЛЬНІ ОПОРИ

Нехай $(\mathcal{S}, \times, \mathbb{1})$ – симетрична моноїдальна категорія. Моноїдальна операція в ній позначена $\times$ і $\prod$, тому що в застосуваннях ми будемо головним чином потребувати $\mathcal{S} = (\mathrm{Sets}, \times, \mathbb{1})$, де $\mathbb{1} = \{*\}$ є 1-елементною множиною.

Означення 1. *Спеціальна опора* Ж складається з таких даних:
— клас об'єктів $\mathrm{Ob}\,$Ж;
— об'єкт Ж$(V^1, \dots, V^k; W_1, \dots, W_l)$ з $\mathcal{S}$ для кожної пари послідовностей об'єктів V^m, $W_r \in \mathrm{Ob}\,$Ж, $k, l \geqslant 0$, названий множиною операцій з $V^1, \dots, V^k$ до $W_1, \dots, W_l$;
— для кожної пари k, l невід'ємних цілих чисел, для кожних k послідовностей $Y^m_- = (Y^m_1, \dots, Y^m_{a_m})$ об'єктів Ж, $1 \leqslant m \leqslant k$, $a_m \geqslant 0$, для кожної $(k \times l)$-матриці (V^m_r) об'єктів Ж, $1 \leqslant m \leqslant k$, $1 \leqslant r \leqslant l$, для кожних l послідовностей $Z^-_r = (Z^1_r, \dots, Z^{b_r}_r)$ об'єктів Ж, $1 \leqslant r \leqslant l$, $b_r \geqslant 0$, відображення композиції (морфізм $\mathcal{S}$) задається:

$$\mu : \prod_{m=1}^{k} \text{Ж}(Y^m_1, \dots, Y^m_{a_m}; V^m_1, \dots, V^m_l) \times \prod_{r=1}^{l} \text{Ж}(V^1_r, \dots, V^k_r; Z^1_r, \dots, Z^{b_r}_r) \\ \to \text{Ж}(Y^1_1, \dots, Y^1_{a_1}, \dots, Y^k_1, \dots, Y^k_{a_k}; Z^1_1, \dots, Z^{b_1}_1, \dots, Z^1_l, \dots, Z^{b_l}_l), \quad (2)$$

у інших позначеннях $V^m_- = (V^m_1, \dots, V^m_l)$, $V^-_r = (V^1_r, \dots, V^k_r)$, $Y^=_- = (Y^1_1, \dots, Y^1_{a_1}, \dots, Y^k_1, \dots, Y^k_{a_k})$, $Z^-_= = (Z^1_1, \dots, Z^{b_1}_1, \dots, Z^1_l, \dots, Z^{b_l}_l)$ композиція є

$$\mu : \prod_{m=1}^{k} \text{Ж}(Y^m_-; V^m_-) \times \prod_{r=1}^{l} \text{Ж}(V^-_r; Z^-_r) \to \text{Ж}(Y^=_-; Z^-_=). \quad (3)$$

Ці дані підпорядковані таким умовам:
1) Припустимо що k, n є невід'ємними цілими числами, $(a_1, \dots, a_k)$, $(b_1, \dots, b_n)$ є послідовностями невід'ємних цілих чисел, і $(c^1_1, \dots, c^{a_1}_1)$, $\dots$, $(c^1_k, \dots, c^{a_k}_k)$, $(d^1_1, \dots, d^{b_1}_1)$, $\dots$, $(d^1_n, \dots, d^{b_n}_n)$ послідовності невід'ємних цілих чисел. Розглянемо наборомії об'єктів Ж

$$\begin{gathered}\big({}^t_pX^s \mid 1 \leqslant s \leqslant k, 1 \leqslant t \leqslant a_s, 1 \leqslant p \leqslant c^t_s\big), \\ \big({}^tV^s_r \mid 1 \leqslant s \leqslant k, 1 \leqslant r \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant a_s\big), \\ \big({}_jY^s_r \mid 1 \leqslant s \leqslant k, 1 \leqslant r \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant b_r\big), \\ \big({}^i_jZ_r \mid 1 \leqslant r \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant b_r, 1 \leqslant i \leqslant d^j_r\big).\end{gathered}$$

Ми використовуємо лексикографічний порядок підпослідовностей $({}^t_pX^s)$, $({}^tV^s_r)$, $({}_jY^s_r)$, $({}^i_jZ_r)$ або подібні наборомії. Підпослідовність установлена установленням двох, одного або жодного індексів. Це позначається відповідним символом X, V, Y або Z з цими встановленими індексами, де індекси, що залишаються, замінені символами $-$, $=$ або $\equiv$. Ці символи вказують місця, в яких індекси порівнюються, щоб установити лексикографічний порядок. Ми порівнюємо дві трійки індексів спочатку в місці, позначеному $\equiv$ (якщо таке присутнє). Якщо значення збігаються або не визначені, ми порівнюємо в місці позначеному $=$ (якщо таке присутнє). Якщо вони збігаються або не визначені, ми порівнюємо значення в $-$. Наприклад,

$$
\begin{aligned}
{}^t_-X^s &= ({}^t_1X^s, {}^t_2X^s, \dots),\\
{}_-Y^s_= &= ({}_1Y^s_1, {}_2Y^s_1, \dots, {}_1Y^s_2, {}_2Y^s_2, \dots),\\
Y_r^- &= (Y_r^1, Y_r^2, \dots),\\
{}^-_=Z_\equiv &= ({}^1_1Z_1, {}^2_1Z_1, \dots, {}^1_2Z_1, {}^2_2Z_1, \dots, {}^1_1Z_2, {}^2_1Z_2, \dots, {}^1_2Z_2, {}^2_2Z_2, \dots)\\
{}_-Z_= &= ({}_1Z_1, {}_2Z_1, \dots, {}_1Z_2, {}_2Z_2, \dots),\\
Y^- &= (Y^1, Y^2, \dots).
\end{aligned}
$$

У цих позначеннях повинно виконуватися таке рівняння:

$$
\begin{gathered}
\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}Ж({}^t_-X^s; {}^tV^s_-)\times\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}Ж({}^-V^s_r; {}_-Y^s_r)\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}Ж({}_jY_r^-; {}^-_jZ_r)\xrightarrow{\prod_1^k\mu\times 1}\\
\prod_{s=1}^{k}Ж({}^=_-X^s; {}_-Y^s_=)\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}Ж({}_jY_r^-; {}^-_jZ_r)\xrightarrow{\mu}Ж({}^=_-X^\equiv; {}^-_=Z_\equiv)\Big] =\\
\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}Ж({}^t_-X^s; {}^tV^s_-)\times\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}Ж({}^-V^s_r; {}_-Y^s_r)\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}Ж({}_jY_r^-; {}^-_jZ_r)\xrightarrow{1\times\prod_{r=1}^n\mu}\\
\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}Ж({}^t_-X^s; {}^tV^s_-)\times\prod_{r=1}^{n}Ж({}^-V_r^=; {}^-_=Z_r)\xrightarrow{\mu}Ж({}^=_-X^\equiv; {}^-_=Z_\equiv)\Big]. \quad (4)
\end{gathered}
$$

2) У випадках $k = 1$, $l = 0$ або $k = 0$, $l = 1$ ми вимагаємо, щоб $\mu = \mathrm{id}$, більш точно,

$$
\begin{aligned}
\mu = \mathbf{r} &: Ж(Y_1, \dots, Y_a;) \times \mathbb{1} \to Ж(Y_1, \dots, Y_a;), \qquad k = 1,\ l = 0,\\
\mu = \mathbf{l} &: 1 \times Ж(;Z^1, \dots, Z^b) \to Ж(;Z^1, \dots, Z^b), \qquad k = 0,\ l = 1,
\end{aligned}
$$

де функторіальні ізоморфізми $\mathbf{r}$, $\mathbf{l}$ є частиною моноїдальної структури $\mathcal{S}$.
3) Ми вимагаємо, щоб для кожного об'єкта X з Ж існував такий елемент $1_X : \mathbb{1} \to Ж(X;X)$, що для всіх об'єктів $V^1, \dots, V^k$, $W_1, \dots, W_l$

$$\big[Ж(V^-;W_-) \times \mathbb{1}^l \xrightarrow{\mathrm{id}\times\prod 1_{W_r}} Ж(V^-;W_-)\times$$
$$\times \prod_{r=1}^{l} Ж(W_r;W_r) \xrightarrow{\mu} Ж(V^-;W_-)\big] = \mathbf{r}^l,$$
$$\big[\mathbb{1}^k \times Ж(V^-;W_-) \xrightarrow{\prod 1_{V^m}\times\mathrm{id}} \prod_{m=1}^{k} Ж(V^m;V^m)\times$$
$$\times Ж(V^-;W_-) \xrightarrow{\mu} Ж(V^-;W_-)\big] = \mathbf{l}^k.$$

Ці відображення – тотожні, якщо $\mathcal{S}$– строго моноїдальна. Морфізми $1_X \in \operatorname{Mor}\mathcal{S}$ називаються *одиничними елементами*.

Зауваження 1. Специфічний випадок $k = n = a_1 = b_1 = 1$ дає асоціативну композицію $\mu : Ж(X;Y) \times Ж(Y;Z) \to Ж(X;Z)$ для кожної трійки X, Y, Z об'єктів Ж. Одиничні елементи перетворюють $\operatorname{Ob} Ж$ з множинами морфізмів $Ж(X;Y)$ у категорію, збагачену в $\mathcal{S}$. Зокрема, одиничні елементи єдині.

Зауваження 2. Послідовності об'єктів, використаних у рівнянні (4), мають наступну явну форму:

$$\begin{aligned}
{}^t_-X^s &= ({}^t_1X^s, \dots, {}^t_{c^t_s}X^s),\\
{}^tV^s_- &= ({}^tV^s_1, \dots, {}^tV^s_n),\\
{}^-V^s_r &= ({}^1V^s_r, \dots, {}^{a_s}V^s_r),\\
{}_-Y^s_r &= ({}_1Y^s_r, \dots, {}_{b_r}Y^s_r),\\
{}_jY^-_r &= ({}_jY^1_r, \dots, {}_jY^k_r),\\
{}^-_jZ_r &= ({}^1_jZ_r, \dots, {}^{d^j_r}_jZ_r),\\
{}^=_-X^s &= ({}^1_1X^s, \dots, {}^1_{c^1_s}X^s, \dots, {}^{a_s}_1X^s, \dots, {}^{a_s}_{c^{a_s}_s}X^s),\\
{}_-Y^s_= &= ({}_1Y^s_1, \dots, {}_{b_1}Y^s_1, \dots, {}_1Y^s_n, \dots, {}_{b_n}Y^s_n),\\
{}^-V^=_r &= ({}^1V^1_r, \dots, {}^{a_1}V^1_r, \dots, {}^1V^k_r, \dots, {}^{a_k}V^k_r),\\
{}^-_=Z_r &= ({}^1_1Z_r, \dots, {}^{d^1_r}_1Z_r, \dots, {}^1_{b_r}Z_r, \dots, {}^{d^{b_r}_r}_{b_r}Z_r),\\
{}^=_-X^\equiv &= ({}^1_1X^1, \dots, {}^1_{c^1_1}X^1, \dots, {}^{a_1}_1X^1, \dots, {}^{a_1}_{c^{a_1}_1}X^1,
\end{aligned}$$

$$\dots, {}^1_1X^k, \dots, {}^1_{c_k^1}X^k, \dots, {}^{a_k}_1X^k, \dots, {}^{a_k}_{c_k^{a_k}}X^k),$$

$$\begin{aligned}{}^-_= Z_\equiv = ({}^1_1Z_1, \dots, {}^{d_1^1}_1 Z_1, \dots, {}^1_{b_1}Z_1, \dots, {}^{d_1^{b_1}}_{b_1} Z_1, \dots, {}^1_1 Z_n, \dots, {}^{d_n^1}_1 Z_n, \dots, \\ {}^1_{b_n} Z_n, \dots, {}^{d_n^{b_n}}_{b_n} Z_n).\end{aligned}$$

Зауваження 3. Означення 1 допускає версію, у якій об'єкт $Ж(V^1, \dots, V^k; W_1, \dots, W_l)$ є $\mathcal{S}$ визначеним тільки для додатних k і l. Ця версія має відношення до неунітальних, некоунітальних біалгебр (див. нижче приклад 1 та твердження 1).

Оскільки спеціальні опори нагадують категорії, введемо відображення між ними, подібні до функторів.

Функтор $F : Ж \to Ж'$ між спеціальні опорами – це відображення $F : \operatorname{Ob} Ж \to \operatorname{Ob} Ж'$ разом із набором морфізмів

$$F : Ж(V^1, \dots, V^k; W_1, \dots, W_l) \to Ж'(FV^1, \dots, FV^k; FW_1, \dots, FW_l) \in \mathcal{S},$$

що поважають всі композиції.

Морфізм функторів (*природне перетворення*) $\lambda : F \to G : Ж \to Ж'$ є таким набором елементів $\lambda_X : \mathbb{1} \to Ж'(FX; GX) \in \mathcal{S}$, обраних для всіх об'єктів X з $Ж$, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{tikzcd}
Ж(V^1, \dots, V^k; W_1, \dots, W_l) \arrow[r, "F \times \prod \lambda_{W_r}"] \arrow[d, "\prod \lambda_{V^m} \times G"'] & Ж'(FV^-; FW_-) \times \prod_{r=1}^{l} Ж'(FW_r; GW_r) \arrow[d, "\mu"] \\
\prod_{m=1}^{k} Ж'(FV^m; GV^m) \times Ж'(GV^-; GW_-) \arrow[r, "\mu"] & Ж'(FV^-; GW_-)
\end{tikzcd}$$

Композиції функторів, природних перетворень, тотожні функтори, тотожні природні перетворення визначено очевидним чином, подібно до звичайної теорії категорій. Це дає поняття ізоморфізму функторів між спеціальними опорами. Отже, ми можемо визначити, чи функтор між спеціальними опорами є еквівалентністю. Вибираючи представника у кожному класі ізоморфізму об'єктів спеціальної опори $Ж$, ми зводимо її до еквівалентної спеціальної опори $Ж'$ з меншим числом об'єктів (до скелету).

Зверніть увагу також на те, що структуру даної спеціальної опори Ж можна обмежити до $\mathcal{S}$-мультикатегорії, що складається з класу об'єктів Ob Ж, множини морфізмів Ж$(V^1,\dots,V^k;W) \in \operatorname{Ob}\mathcal{S}$ і композиції (2) для $l = b_1 = 1$. Мультикатегорії, введені Ламбеком, також називаються несиметричними кольоровими операдами.

Зауваження 4. Вивчимо поведінку спеціальних опор щодо заміни основної категорії. Нехай $(F,\phi,\boldsymbol{f}) : (\mathcal{S},\times,c,\mathbb{1}) \to (\mathcal{S}',\times',c',\mathbb{1}')$ – симетричний слабкий моноїдальний функтор. Більш точно,

$$\phi = \phi_{X,Y} : F(X)\times' F(Y) \to F(X\times Y) \in \mathcal{S}'$$

є функторіальним морфізмом і $\boldsymbol{f} : \mathbb{1}' \to F\mathbb{1}$ є морфізмом у $\mathcal{S}'$, що задовольняє деяким тотожностям (див. напр., [4, Definition 1.2.3]). Якщо Ж є спеціальною опорою зі значеннями в $\mathcal{S}$, то, використовуючи $(F,\phi,\boldsymbol{f})$, ми можемо перетворити її в спеціальну опору Ж$'$ зі значеннями в $\mathcal{S}'$ у такий спосіб:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Ob}\text{Ж}' = \operatorname{Ob}\text{Ж},\\
\text{Ж}'(V^1,\dots,V^k;W_1,\dots,W_l) = F\text{Ж}(V^1,\dots,V^k;W_1,\dots,W_l),\\
1'_X : \mathbb{1}' \xrightarrow{\boldsymbol{f}} F\mathbb{1} \xrightarrow{F1_X} F\text{Ж}(X;X) = \text{Ж}'(X;X),
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\mu' : \prod_{m=1}^{k}{}' \text{Ж}'(Y^m_-;V^m_-) \times' \prod_{r=1}^{l}{}' \text{Ж}'(V^-_r;Z^-_r)& \\
\xrightarrow{\phi} F\Big(\prod_{m=1}^{k} \text{Ж}(Y^m_-;V^m_-) \times \prod_{r=1}^{l} \text{Ж}(V^-_r;Z^-_r)\Big) &\xrightarrow{F\mu} \text{Ж}'(Y^=_-;Z^-_=),
\end{aligned}$$

якщо $k,l > 0$. У випадку $k > 0$, $l = 0$, або $k = 0$, $l > 0$, або $k = l = 0$, визначимо μ' наступними формулами:

$$\begin{aligned}
\mu' = \Big[\prod_{m=1}^{k}{}' \text{Ж}'(Y^m_-;)\times' \mathbb{1}' &\xrightarrow{1\times\boldsymbol{f}'} \prod_{m=1}^{k}{}' F\text{Ж}(Y^m_-;)\times' F\mathbb{1} \\
&\xrightarrow{\phi} F\Big(\prod_{m=1}^{k} \text{Ж}(Y^m_-;)\times \mathbb{1}\Big) \xrightarrow{F\mu} F\text{Ж}(Y^=_-;) = \text{Ж}'(Y^=_-;)\Big],\\
= \Big[\prod_{m=1}^{k}{}' \text{Ж}'(Y^m_-;)\times' \mathbb{1}' &\xrightarrow{\mathbf{r}} \prod_{m=1}^{k}{}' F\text{Ж}(Y^m_-;) \xrightarrow{\phi} F\Big(\prod_{m=1}^{k} \text{Ж}(Y^m_-;)\Big)
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{F\mathbf{r}^{-1}} F\Big(\prod_{m=1}^{k} Ж(Y_{-}^{m};) \times \mathbb{1}\Big) \xrightarrow{F\mu} Ж'(Y_{-}^{=};)\Big],$$

$$\mu' = \Big[\mathbb{1}' \times' {\prod_{r=1}^{l}}' Ж'(;Z_r^{-}) \xrightarrow{\boldsymbol{f}\times 1} F\mathbb{1} \times' {\prod_{r=1}^{l}}' FЖ(;Z_r^{-})$$

$$\xrightarrow{\phi} F\Big(\mathbb{1} \times \prod_{r=1}^{l} Ж(;Z_r^{-})\Big) \xrightarrow{F\mu} FЖ(;Z_{=}^{-}) = Ж'(;Z_{=}^{-})\Big],$$

$$= \Big[\mathbb{1}' \times' {\prod_{r=1}^{l}}' Ж'(;Z_r^{-}) \xrightarrow{\mathbf{l}} {\prod_{r=1}^{l}}' FЖ(;Z_r^{-}) \xrightarrow{\phi} F\Big(\prod_{r=1}^{l} Ж(;Z_r^{-})\Big)$$

$$\xrightarrow{F\mathbf{l}^{-1}} F\Big(\mathbb{1} \times \prod_{r=1}^{l} Ж(;Z_r^{-})\Big) \xrightarrow{F\mu} Ж'(;Z_{=}^{-})\Big],$$

$$\mu' = \big(\mathbb{1}' \times' \mathbb{1}' \xrightarrow{\boldsymbol{f}\times'\boldsymbol{f}} F\mathbb{1} \times' F\mathbb{1} \xrightarrow{\phi} F(\mathbb{1} \times \mathbb{1}) \xrightarrow{F\mu} FЖ(;) = Ж'(;)\big).$$

3. ПРИКЛАДИ СПЕЦІАЛЬНИХ ОПОР

Наведемо найпростіший (але важливий) приклад спеціальної опори.

Приклад 1. Нехай $\mathcal{S} = (\mathrm{Sets}, \times, \mathbb{1})$. Розглянемо спеціальну опору Bialg з одним об'єктом $*$, 1-елементними множинами морфізмів $\mathrm{Bialg}(*, \dots, *; *, \dots, *) = \mathbb{1}$, чиї композиції — єдині відображення між 1-елементними множинами. Ми побачимо, що алгебри над Bialg є заплетеними біалгебрами.

Приклад 2. Нехай $\mathcal{C}$ — заплетена категорія, збагачена в $\mathcal{S}$. Означимо спеціальну опору $\overline{\mathcal{C}}$ у такий спосіб:

$\mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{C}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}(V^1, \dots, V^k; W_1, \dots, W_l) = \mathcal{C}(V^1 \otimes \dots \otimes V^k, W_1 \otimes \dots \otimes W_l)$. Композиції

$$\mu : \prod_{m=1}^{k} \mathcal{C}(Y_1^m \otimes \dots \otimes Y_{a_m}^m, V_1^m \otimes \dots \otimes V_l^m) \times \prod_{r=1}^{l} \mathcal{C}(V_r^1 \otimes \dots \otimes V_r^k, Z_r^1 \otimes \dots \otimes Z_r^{b_r})$$
$$\to \mathcal{C}(Y_1^1 \otimes \dots \otimes Y_{a_1}^1 \otimes \dots \otimes Y_1^k \otimes \dots \otimes Y_{a_k}^k, Z_1^1 \otimes \dots \otimes Z_1^{b_1} \otimes \dots \otimes Z_l^1 \otimes \dots \otimes Z_l^{b_l})$$

визначені в такий спосіб (нагадаємо, що $\times$ є моноїдальним добутком у

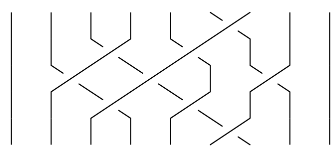
$\mathcal{S}$ і не обов'язково є прямим добутком):

$$
\begin{aligned}
\mu = \Big[\prod_{m=1}^{k} \mathcal{C}(Y_1^m \otimes \dots \otimes Y_{a_m}^m, V_1^m \otimes \dots \otimes V_l^m) \times \mathbb{1} \times \\
\times \prod_{r=1}^{l} \mathcal{C}(V_r^1 \otimes \dots \otimes V_r^k, Z_r^1 \otimes \dots \otimes Z_r^{b_r}) \xrightarrow{\otimes \times \sigma_{k,l} \times \otimes} \mathcal{C}(Y_1^1 \otimes \dots \otimes Y_{a_1}^1 \otimes \dots \otimes \\
\otimes Y_1^k \otimes \dots \otimes Y_{a_k}^k, V_1^1 \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^k) \times \\
\times \mathcal{C}(V_1^1 \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^k, V_1^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_l^k) \times \\
\times \mathcal{C}(V_1^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_l^k, Z_1^1 \otimes \dots \otimes Z_1^{b_1} \otimes \dots \otimes Z_l^1 \otimes \dots \otimes Z_l^{b_l}) \\
\xrightarrow{\text{composition}} \mathcal{C}(Y_1^1 \otimes \dots \otimes Y_{a_1}^1 \otimes \dots \otimes Y_1^k \otimes \dots \otimes Y_{a_k}^k, \\
Z_1^1 \otimes \dots \otimes Z_1^{b_1} \otimes \dots \otimes Z_l^1 \otimes \dots \otimes Z_l^{b_l}) \Big].
\end{aligned}
$$

Тут $\sigma_{k,l} : \mathbb{1} \to \mathcal{C}(V_1^1 \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^k, V_1^1 \otimes \dots \otimes V_1^k \otimes \dots \otimes V_l^1 \otimes \dots \otimes V_l^k)$ є добутком елементарних кіс $1 \otimes c \otimes 1$, де $c : \mathbb{1} \to \mathcal{C}(X \otimes Y, Y \otimes X)$– заплетіння в $\mathcal{C}$. Коса $\sigma_{k,l} = (s_{k,l})^{\sim}_{+}$ відповідає перестановці $s_{k,l}$ множини $\{1, 2, \dots, kl\}$,

$$
s_{k,l}(1 + t + nl) = 1 + n + tk \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t < l, 0 \leqslant n < k, \tag{5}
$$

при канонічному розщепленні $\mathfrak{S}_{kl} \to B_{kl}$, що відображає елементарні переміщення на генератори групи кіс [1, Chap. 4, §1.5, Proposition 5]. Мінімальне зображення перестановки як добутку елементарних переміщень визначає його зображення як добутку елементарних кіс. Наприклад,

$\sigma_{3,3} =$  .

Довжина перестановки $s_{k,l}$ дорівнює $\binom{k}{2}\binom{l}{2}$.

Ми повинні довести асоціативність композиції, тобто умову 1) означення 1. Маючи послідовність S об'єктів $\mathcal{C}$, позначимо їхній $\otimes S$ тензорний добуток в даному порядку. Наприклад,

$$
\otimes_{-} Y^s_{=} = {}_1Y_1^s \otimes \dots \otimes {}_{b_1}Y_1^s \otimes \dots \otimes {}_1Y_n^s \otimes \dots \otimes {}_{b_n}Y_n^s.
$$

Підставляючи в (4) означення композиції

$$\mu{=}\Big[\prod_{m=1}^{k}\mathcal{C}(\otimes Y_-^m,\otimes V_-^m)\times\mathbb{1}\times\prod_{r=1}^{l}\mathcal{C}(\otimes V_r^-,\otimes Z_r^-)\xrightarrow{\otimes\times\sigma_{k,l}\times\otimes}\mathcal{C}(\otimes Y_-^=,\otimes V_-^=)\times$$

$$\times\,\mathcal{C}(\otimes V_-^=,\otimes V_=^-)\times\mathcal{C}(\otimes V_=^-,\otimes Z_=^-)\xrightarrow{\text{composition}}\mathcal{C}(\otimes Y_-^=,\otimes Z_=^-)\Big],$$

мусимо довести наступне рівняння:

$$\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}\mathcal{C}(\otimes_-^t X^s,\otimes^t V_-^s)\times\mathbb{1}\times\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\mathcal{C}(\otimes^- V_r^s,\otimes_- Y_r^s)\times\mathbb{1}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}\mathcal{C}(\otimes_j Y_r^-,\otimes_j^- Z_r)\xrightarrow{\otimes\times\otimes_{s=1}^{k}\sigma_{a_s,n}\times\otimes\times\sigma_{k,l}\times\otimes}\mathcal{C}(\otimes_-^= X^\equiv,\otimes^= V_-^\equiv)\times$$

$$\times\,\mathcal{C}(\otimes^= V_-^\equiv,\otimes^- V_=^\equiv)\times\mathcal{C}(\otimes^- V_=^\equiv,\otimes_- Y_=^\equiv)\times$$

$$\times\,\mathcal{C}(\otimes_- Y_=^\equiv,\otimes_= Y_\equiv^-)\times\mathcal{C}(\otimes_= Y_\equiv^-,\otimes_=^- Z_\equiv)\xrightarrow{\text{composition}}\mathcal{C}(\otimes_-^= X^\equiv,\otimes_=^- Z_\equiv)\Big]=$$

$$=\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}\mathcal{C}(\otimes_-^t X^s,\otimes^t V_-^s)\times\mathbb{1}\times\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\mathcal{C}(\otimes^- V_r^s,\otimes_- Y_r^s)\times\mathbb{1}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}\mathcal{C}(\otimes_j Y_r^-,\otimes_j^- Z_r)\xrightarrow{1\times s_{k,n}\times 1}\prod_{s=1}^{k}\prod_{t=1}^{a_s}\mathcal{C}(\otimes_-^t X^s,\otimes^t V_-^s)\times\mathbb{1}\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{k}\mathcal{C}(\otimes^- V_r^s,\otimes_- Y_r^s)\times\mathbb{1}\times\prod_{r=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_r}\mathcal{C}(\otimes_j Y_r^-,\otimes_j^- Z_r)$$

$$\xrightarrow{\otimes\times\sigma_{m,n}\times\otimes\times\otimes_{r=1}^{n}\sigma_{k,b_r}\times\otimes}\mathcal{C}(\otimes_-^= X^\equiv,\otimes^= V_-^=)\times\mathcal{C}(\otimes^= V_-^\equiv,\otimes^- V_\equiv^=)\times$$

$$\times\,\mathcal{C}(\otimes^- V_\equiv^=,\otimes_- Y_\equiv^=)\times\mathcal{C}(\otimes_- Y_\equiv^=,\otimes_= Y_\equiv^-)\times$$

$$\times\,\mathcal{C}(\otimes_= Y_\equiv^-,\otimes_=^- Z_\equiv)\xrightarrow{\text{composition}}\mathcal{C}(\otimes_-^= X^\equiv,\otimes_=^- Z_\equiv)\Big],$$

де $l=\sum_{r=1}^{n}b_r$ і $m=\sum_{s=1}^{k}a_s$. Зрозуміло, що лівий і правий множники несуттєві для законності цього рівняння, яке зводиться до наступного:

$$\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\mathcal{C}(\otimes^- V_r^s,\otimes_- Y_r^s)\times\mathbb{1}\times\mathbb{1}\xrightarrow{\otimes\times\sigma_{k,l}\times\otimes_{r=1}^{n}(\sigma_{k,b_r})^{-1}}$$

$$\mathcal{C}(\otimes^- V_=^\equiv,\otimes_- Y_=^\equiv)\times\mathcal{C}(\otimes_- Y_=^\equiv,\otimes_= Y_\equiv^-)\times\mathcal{C}(\otimes_= Y_\equiv^-,\otimes_- Y_\equiv^=)\xrightarrow{\text{comp}}$$

$$\mathcal{C}(\otimes^- V_=^\equiv,\otimes_- Y_\equiv^=)\Big]=\Big[\prod_{s=1}^{k}\prod_{r=1}^{n}\mathcal{C}(\otimes^- V_r^s,\otimes_- Y_r^s)\xrightarrow{s_{k,n}}\mathbb{1}\times\mathbb{1}\times$$

$$\times \prod_{r=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_r^s, \otimes_{-} Y_r^s) \xrightarrow{\otimes_{s=1}^{k} (\sigma_{a_s,n})^{-1} \times \sigma_{m,n} \times \otimes} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes^{=} V_{-}^{\equiv}) \times$$
$$\times\, \mathcal{C}(\otimes^{=} V_{-}^{\equiv}, \otimes^{-} V_{\equiv}^{=}) \times \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{\equiv}^{=}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=}) \xrightarrow{\text{comp}} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=})\Big]. \tag{6}$$

Ми стверджуємо, що

$$\sigma_{k,l} = \big(\otimes_{-} Y_{=}^{\equiv} \xrightarrow{\sigma'_{k,n}} \otimes\, _{-} Y_{\equiv}^{=} \xrightarrow{\otimes_{r=1}^{n} \sigma_{k,b_r}} \otimes\, _{=} Y_{\equiv}^{-}\big), \tag{7}$$
$$\sigma_{m,n} = \big(\otimes^{=} V_{-}^{\equiv} \xrightarrow{\otimes_{s=1}^{k} \sigma_{a_s,n}} \otimes\, ^{-} V_{=}^{\equiv} \xrightarrow{\sigma''_{k,n}} \otimes\, ^{-} V_{\equiv}^{=}\big), \tag{8}$$

де заплетіння $\sigma'_{k,n}$ рухає блоки $\otimes_{-} Y_r^s = \otimes_{j=1}^{b_r} {}_j Y_r^s$ як цілі, а заплетіння $\sigma''_{k,n}$ рухає блоки $\otimes^{-} V_r^s = \otimes_{t=1}^{a_s} {}^t V_r^s$ як цілі так само, як $\sigma_{k,n}$. Ці два рівняння дозволяють спростити (6) до наступного рівняння:

$$\Big[\prod_{s=1}^{k} \prod_{r=1}^{n} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_r^s, \otimes_{-} Y_r^s) \times \mathbb{1} \xrightarrow{\otimes \times \sigma'_{k,n}} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes_{-} Y_{=}^{\equiv}) \times \mathcal{C}(\otimes_{-} Y_{=}^{\equiv}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=})$$
$$\xrightarrow{\text{composition}} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=})\Big]$$
$$= \Big[\prod_{s=1}^{k} \prod_{r=1}^{n} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_r^s, \otimes_{-} Y_r^s) \xrightarrow{s_{k,n}} \mathbb{1} \times \prod_{r=1}^{n} \prod_{s=1}^{k} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_r^s, \otimes_{-} Y_r^s) \xrightarrow{\sigma''_{k,n} \times \otimes}$$
$$\mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes^{-} V_{\equiv}^{=}) \times \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{\equiv}^{=}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=}) \xrightarrow{\text{composition}} \mathcal{C}(\otimes^{-} V_{=}^{\equiv}, \otimes_{-} Y_{\equiv}^{=})\Big],$$

яке просто виражає той факт, що заплетіння $\sigma_{k,n}$ є функторіальним.

Доведемо тепер (7). Насамперед, пряма перевірка показує, що

$$s_{k,l} = s'_{k,n} \cdot \prod_{r=1}^{n} s_{k,b_r} \in \mathfrak{S}_{kl}. \tag{9}$$

Дійсно, якщо $x = p(b_1 + \cdots + b_n) + (b_1 + \cdots + b_t) + z + 1$, $0 \leqslant p < k$, $0 \leqslant t < n$, $0 \leqslant z < b_{t+1}$, то $s'_{k,n}(x) = k(b_1 + \cdots + b_t) + pb_{t+1} + z + 1$, тому,

$$\Big(\prod_{r=1}^{n} s_{k,b_r}\Big)\big(s'_{k,n}(x)\big) = s_{k,b_{t+1}}\big(s'_{k,n}(x)\big) = k(b_1 + \cdots + b_t) + kz + p + 1 = s_{k,l}(x).$$

Довжина перестановки $s'_{k,n}$ дорівнює $\binom{k}{2} \sum\limits_{1 \leqslant p<q \leqslant n} b_p b_q$, отже,

$$\operatorname{length}(s_{k,l}) = \binom{k}{2}\binom{b_1 + \cdots + b_n}{2} = \binom{k}{2} \sum_{1 \leqslant p<q \leqslant n} b_p b_q + \sum_{r=1}^{n} \binom{k}{2}\binom{b_r}{2}$$
$$= \operatorname{length}(s'_{k,n}) + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{length}(s_{k,b_r}).$$

З цього рівняння разом із (9) випливає, що $\sigma_{k,l} = \sigma'_{k,n} \cdot \prod_{r=1}^{n} \sigma_{k,b_r} \in B_{kl}$ завдяки зображенню групи кіс, даному Делінем [2, (1.4.5)]. Тому (7) виконується. Аналогічно доводиться (8).

Одиниці $\overline{\mathcal{C}}$ є такими ж, що й у $\mathcal{C}$. Отже, ми робимо висновок, що $\overline{\mathcal{C}}$ дійсно є спеціальною опорою.

Твердження 1. *Нехай* $\mathcal{C}$*– заплетена категорія. Тоді функтори спеціальних опор* $\mathrm{Bialg} \to \overline{\mathcal{C}}$ *знаходяться у взаємно однозначній відповідності із заплетеними біалгебрами у* $\mathcal{C}$.

Доведення. Функтор $F : \mathrm{Bialg} \to \overline{\mathcal{C}}$ визначає об'єкт $B = F* \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ і елементи

$$\begin{aligned}
F &: \mathrm{Bialg}(*, *; *) \to \mathcal{C}(B \otimes B, B), && pt \mapsto \mu,\\
F &: \mathrm{Bialg}(; *) \to \mathcal{C}(\mathbb{1}^{\mathcal{C}}, B), && pt \mapsto \eta,\\
F &: \mathrm{Bialg}(*; *, *) \to \mathcal{C}(B, B \otimes B), && pt \mapsto \Delta,\\
F &: \mathrm{Bialg}(*;) \to \mathcal{C}(B, \mathbb{1}^{\mathcal{C}}), && pt \mapsto \varepsilon,
\end{aligned}$$

які є множенням, одиницею, комноженням і коодиницею у B. Всі інші елементи $\mu^{k,l} = F(pt) \in \mathcal{C}(B^{\otimes k}, B^{\otimes l})$ виражаються через чотири вищезгадані не єдиним способом. Це накладає деякі співвідношення на ці чотири операції, включаючи (ко)асоціативність, (ко)унітальність і аксіому заплетеної біалгебри.

З іншого боку, починаючи із заплетеної біалгебри $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$, можна побудувати всі операції $\mu^{k,l} \in \mathcal{C}(B^{\otimes k}, B^{\otimes l})$ і довести усі співвідношення, необхідні, щоб побудувати $F : \mathrm{Bialg} \to \overline{\mathcal{C}}$.

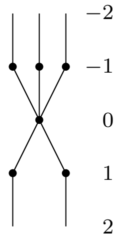
4. ДЕРЕВА Й ОПОРИ

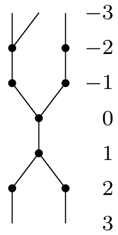
4.1. Бідерева

Нехай Δ_s позначає категорію непорожніх скінченних лінійно впорядкованих множин $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\} = [n-1]$, $n \geqslant 1$, чиї морфізми – монотонні сюр'єкції.

Організоване дерево висоти $n \geqslant 1$ – це послідовність n компоновних морфізмів у Δ_s форми $X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} \mathbf{1}$. Зверніть увагу на те, що морфізм f_0 визначений єдиним чином. Тому множина організованих дерев ототожнюється із нервом $N(\Delta_s)$.

Бідерево висоти $h \geqslant 1$– це пара організованих дерев висоти $h \geqslant 1$. Ми зображаємо їх, ототожнюючи корені $\mathbf{1}$, перше дерево вище, а друге дерево нижче кореня:

$a)$ $h = 2$, 

, $b)$ $h = 3$, 

. (9)

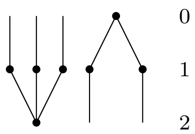
Корінь $X_0 = Y_0 = \mathbf{1}$ позначений 0, об'єкти другого дерева позначені додатними цілими числами, а об'єкти першого дерева позначені від'ємними цілими числами (рівнями) як у

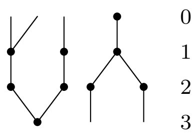
$$X_{-h} \xrightarrow{f_{h-1}} X_{-h+1} \xrightarrow{f_{h-2}} \dots \xrightarrow{f_1} X_{-1} \xrightarrow{f_0} \mathbf{1} \xleftarrow{g_0} X_1 \xleftarrow{g_1} \dots \xleftarrow{g_{h-2}} X_{h-1} \xleftarrow{g_{h-1}} X_h. \quad (10)$$

Вищезгадане бідерево ідентифіковано також з елементом

$$X_{-h} \times \mathbf{1} \xrightarrow{f_{h-1} \times g_0^{\mathrm{op}}} X_{-h+1} \times X_1 \xrightarrow{f_{h-2} \times g_1^{\mathrm{op}}} \dots \xrightarrow{f_1 \times g_{h-2}^{\mathrm{op}}} X_{-1} \times X_{h-1} \xrightarrow{f_0 \times g_{h-1}^{\mathrm{op}}} \mathbf{1} \times X_h \quad (11)$$

нерва категорії $\Delta_s \times \Delta_s^{\mathrm{op}}$. Його графічне зображення виглядає як у прикладах

$a)$ $h = 2$, 

, $b)$ $h = 3$, 

, (12)

які повторюють приклади (9).

Позначимо $\mathbf{k} = X_{-h}$ і $\mathbf{m} = X_h$. У цьому зображенні ми одержуємо операції грані d_i, $0 < i < h$ з бідерева (11) у бідерево висоти $h - 1$ і операції виродження s_j, $0 \leqslant j \leqslant h$ з вищезгаданого бідерева до бідерева висоти $h + 1$ з тим же джерелом $\mathbf{k} \times \mathbf{1}$ і тим же кінцем $\mathbf{1} \times \mathbf{m}$. Зверніть увагу на те, що операції грані d_0 і d_h, які видаляють перший або останній морфізм з (11), не розглядаються, тому що вони заміняють джерело і кінець. Дозволена операція грані d_i, $0 < i < h$ заміняє пару морфізмів $f_{h-i} \times g_{i-1}$, $f_{h-i-1} \times g_i$ У $\Delta_s \times \Delta_s^{\mathrm{op}}$ на їх композицію. Операція виродження s_j, $0 \leqslant j \leqslant h$ вставляє в послідовність (11) відображення $\mathrm{id}_{X_{-h+j}} \times \mathrm{id}_{X_j}$.

Ми називаємо бідерево невиродженим, якщо воно не отримане в результаті операції виродження, тобто не містить відображення $\mathrm{id} \times \mathrm{id}$ у представленні (11). Наприклад, бідерева (12) невироджені. За цілими числами $k, m > 0$ означимо категорію $\mathrm{Bitree}(k, m)$, чиї об'єкти суть невироджені бідерева із початком $\mathbf{k} \times \mathbf{1}$ і закінченням $\mathbf{1} \times \mathbf{m}$. Морфізм $B \to B'$ між двома такими бідеревами висоти h і l є монотонним вкладенням $\iota : [l] \hookrightarrow [h]$ таким, що мінімальний елемент 0 переходить у мінімальний, максимальний елемент l переходить у максимальний h і B' отримується з B композицією в об'єктах $X_{-h+j} \times X_j$ для всіх $j \in [h] - \iota([l])$. Детальніше, морфізм $\iota : [l] \hookrightarrow [h]$ з (11) до

$$Y_{-l} \times \mathbf{1} \xrightarrow{t_{l-1} \times k_0^{\mathrm{op}}} Y_{-l+1} \times Y_1 \xrightarrow{t_{l-2} \times k_1^{\mathrm{op}}} \dots \xrightarrow{t_1 \times k_{l-2}^{\mathrm{op}}} Y_{-1} \times Y_{l-1} \xrightarrow{t_0 \times k_{l-1}^{\mathrm{op}}} \mathbf{1} \times Y_l$$

існує тоді і тільки тоді, коли

$$(t_{l-1-j} \times k_j^{\mathrm{op}} : Y_{j-l} \times Y_j \to Y_{j+1-l} \times Y_{j+1}) = (f_{h-1-\iota(j)} \dots f_{h-\iota(j+1)} \times \\ \times g_{\iota(j)}^{\mathrm{op}} \dots g_{\iota(j+1)-1}^{\mathrm{op}} : X_{\iota(j)-h} \times X_{\iota(j)} \to X_{\iota(j+1)-h} \times X_{\iota(j+1)}).$$

Отже, категорія $\mathrm{Bitree}(k, m)$ породжена дозволеними операціями грані d_i. Зверніть увагу на те, що для даного бідерева B і B' існує не більше одного морфізму $B \to B'$. Дійсно, $\mathrm{Card}(X_{-h+j})$ (відповідно, $\mathrm{Card}(X_j)$)— незростаюча (відповідно, неспадна) функція від $j \in [0, h]$. Рівняння $\mathrm{Card}(X_{-h+j}) = \mathrm{Card}(X_{-h+j+1})$ і $\mathrm{Card}(X_j) = \mathrm{Card}(X_{j+1})$ не можуть виконуватись одночасно через невиродженість B. Якщо існують морфізми $B \to B'$ і $B' \to B$, то $B = B'$. Тому категорія $\mathrm{Bitree}(k, m)$ є частково впорядкованою множиною. Нас цікавить її нерв $N(\mathrm{Bitree}(k, m))$.

Задача 1. Чи $N(\mathrm{Bitree}(k, m))$ є тріангуляцією пермутаедра P_{k+m-2} розмірності $k + m - 3$?

Кома-категорія $B \to *$ є повною підкатегорією $\mathrm{Bitree}(k, m)$. Її нерв ототожнюється із нервом кома-категорії $* \to [h-2]$– повної підкатегорії $\overline{\Delta}_i$ - категорії $\mathbf{p}$, $p \geqslant 0$, із монотонними вкладеннями як морфізмами. Ця підкатегорія (і її нерв) реалізується як куб підмножин $[h-2] = \mathbf{h} - \mathbf{1}$.

4.2. Однобічні графи

Однобічний граф Z — це зв'язний орієнтований скінченний граф $(V(Z), E(Z))$, $\Delta_Z = \{(z,z) \mid z \in V(Z)\} \subset E(Z) \xhookrightarrow{s\times t} V(Z) \times V(Z)$ з лінійним упорядкуванням множини джерел $S(Z) = V(Z) - t(E'(Z))$ та з лінійним упорядкуванням множини цілей $T(Z) = V(Z) - s(E'(Z))$, де $E'(Z) = E(Z) - \Delta_Z$. Ми вимагаємо, щоб

a) між будь-якими двома вершинами $v, z \in V(Z)$ було не більше одного орієнтованого шляху $v \to z$ (зробленого зі стрілок з $E'(Z)$).

b) не було жодних орієнтованих циклів.

Стягування або *морфізм однобічних графів* $f : Z \to W$ – це пара сюр'єктивних відображень $f = V(f) : V(Z) \to V(W)$, $f = E(f) : E(Z) \to E(W)$, що є морфізмом орієнтованих графів, тобто

$$\begin{aligned}&\big(E(Z) \xrightarrow{E(f)} E(W) \hookrightarrow V(W) \times V(W)\big)\\ &\qquad = \big(E(Z) \hookrightarrow V(Z) \times V(Z) \xrightarrow{V(f)\times V(f)} V(W) \times V(W)\big),\end{aligned}$$

і для довільного $e_1, e_2 \in E(Z)$ з рівняння $e = E(f)(e_1) = E(f)(e_2)$ випливає, що $s(e) = t(e)$. Крім того, ми приймаємо, що $V(f)$ індукує монотонні взаємно однозначні відповідності $S(Z) \to S(W)$ і $T(Z) \to T(W)$.

Зведений однобічний граф – це однобічний граф без вершин, що мають рівно одну вхідну і одну вихідну стрілку.

Твердження 2. *Якщо Z, W – зведені однобічні графи, то існує не більше одного стягування $f : Z \to W$.*

Доведення. Ми можемо припустити, що $S(Z) \cup T(Z) = \varnothing$ (не існує жодної вершини без інцидентних ребер). Ми можемо припустити, що $V(Z)$ непорожнє. Оскільки будь-яка зростаюча (за включенням) послідовність орієнтованих шляхів у Z стабілізується згідно з b), то кожна вершина і кожне ребро Z лежить на орієнтованому шляху з одного з джерел до однієї з цілей. Зокрема, $S(Z)$ і $T(Z)$ є непорожніми.

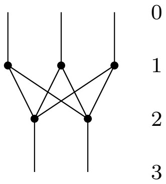
Будь-яка вершина $z \in \operatorname{Int} V(Z) = V(Z) - S(Z) - T(Z)$ має принаймні дві вхідні стрілки, або принаймні два вихідні стрілки (або обидва). Підхід є симетричний, і ми припускаємо, що існують такі $a_1 \neq a_2 \in V(Z)$, що (z, a_1), $(z, a_2) \in E'(Z)$. Ці дані можуть бути продовжені до шляхів $\alpha = \big(\sigma \xrightarrow{p} z \to a_1 \to \tau_1\big)$ і $\beta = \big(\sigma \xrightarrow{p} z \to a_2 \to \tau_2\big)$, де $\sigma \in S(Z)$, $\tau_1 \neq \tau_2 \in T(Z)$. Образи $f\alpha : f\sigma \to f\tau_1$ і $f\beta : f\sigma \to f\tau_2$ (з видаленими повторними вершинами) визначаються єдиним чином умовою a) (якщо існують взагалі).

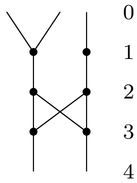
Нехай q– перетин $f\alpha$ і $f\beta$, так що $f\alpha = \big(f\sigma \xrightarrow{q} w \to w_1 \to f\tau_1\big)$ і $f\beta = \big(f\sigma \xrightarrow{q} w \to w_2 \to f\tau_2\big)$, де $w_1 \neq w_2$. Ми стверджуємо, що $f(z) = w$. Дійсно, $f(z)$ повинно лежати на шляху $q : f\sigma \to w$. Якщо $q = \big(f\sigma \to fz \xrightarrow{g_1} y_1 \xrightarrow{g_2} \ldots \xrightarrow{g_k} y_k = w\big)$, де $g_i \in E(Z)$, то кожний g_i є зображенням деякої стрілки від $z \to a_1 \to \tau_1$ і деякої стрілки від шляху, що не перетинається $z \to a_2 \to \tau_2$. За означенням стягування $s(g_i) = t(g_i)$, отже, $f(z) = w$. Отже, кожна вершина Z може бути відображена до не більше ніж однієї вершини W.

Наслідок 1. *Підкатегорія* Red1WGraphs $\subset$ 1WGraphs *зведених однобічних графів передупорядкована щодо наступного відношення на зведених однобічних графах:* $X \geqslant Y$ *тоді і тільки тоді, коли існує стягування* $X \to Y$. *Її скелет – частково упорядкована множина.*

Дійсно, якщо $X \geqslant Y$ і $Y \geqslant X$ для представників класів ізоморфізму в Red1WGraphs, то відображення $X \to Y$ є бієктивним на вершинах і гранях, отже, є ізоморфізмом, так що $X = Y$.

Існує функтор шляхів P : Bitree$(k, m) \to$ 1WGraphs. Шлях у бідереві B у формі (9) – це зв'язний підграф, що перетинає кожен рівень не більше одного разу. Бідереву B висоти h відповідає однобічний граф $P(B)$, чиї ребра є шляхами довжини h і вершини – шляхи довжини $h-1$. Ребро і вершина – інцидентні, якщо відповідний шлях довжини h містить відповідний шлях довжини $h-1$. Наприклад, застосовуючи P до бідерев з (9), ми одержимо однобічні графи

$a)$ $h = 2$, 

, $b)$ $h = 3$, 

,

орієнтовані у напрямку збільшення рівнів.

Існує функтор стягування Red : 1WGraphs $\to$ Red1WGraphs, що вилучає з однобічного графа всі його вершини з точно одним входом і виходом. Категорія Bitree(k, m) є частково упорядкованою множиною. Розглянемо відношення еквівалентності на ній. Два морфізми еквівалентні, якщо вони перейдуть до одного морфізма під дією

$$\mathrm{Bitree}(k, m) \xrightarrow{P} \mathrm{1WGraphs} \xrightarrow{Red} \mathrm{Red1WGraphs}\,. \tag{13}$$

Частку позначимо RedBitree(k, m).

4.3. Спеціальна опора

Визначимо за Марклом [9] спеціальну опору зведених однобічних графів $\mathcal{RG}$ в Sets у такий спосіб. Вона має єдиний об'єкт $*$, і ми записуємо n замість $*, *, \dots, *$ (n разів). Множина $\mathcal{RG}(k;l)$ є множиною усіх зведених однобічних графів із k джерелами і l кінцями. Операція

$$\mu : \prod_{m=1}^{k} \mathcal{RG}(a_m; l) \times \prod_{r=1}^{l} \mathcal{RG}(k; b_r) \to \mathcal{RG}(a_1 + \dots + a_k; b_1 + \dots + b_l)$$

задається як

$$\mu(G_1, \dots, G_k; H_1, \dots, H_l) = \begin{array}{|c|}\hline \boxed{G_1} \quad \dots \quad \boxed{G_k} \\ \hline s_{k,l} \\ \hline \boxed{H_1} \quad \dots \quad \boxed{H_l} \\ \hline \end{array} = \frac{G_1 \dots G_k}{H_1 \dots H_l},$$

де перестановка $s_{k,l} \in \mathfrak{S}_{kl}$ визначена в (5).

Нехай $\mathcal{SG}$ — підопора $\mathcal{RG}$, породжена усіма вінцями з k входами і одним виходом, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ та з одним входом і l виходами, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$. Її елементи називаються спеціальними однобічними графами.

Задача 2. Функтор (13) приймає значення в $\mathcal{SG}$.

Крім того, Red1WGraphs(k, m) є категоріями і μ є функтор. Отже, $\mathcal{RG}$ збагачений у симетричній моноїдальній категорії $\mathcal{C}at$ із прямим добутком $\times$ як моноїдальним добутком. Нерв $N : (\mathcal{C}at, \times, c, \mathbb{1}) \to (\Delta^{\mathrm{op}}\,\mathrm{Sets}, \times, c, \mathbb{1})$ є симетричним моноїдальним функтором до категорії симпліціальних множин з прямим добутком $\times$ як моноїдальним добутком і очевидною симетрією. Таким чином, $\mathcal{SG}$ і $\mathcal{RG}$ збагачені в $\Delta^{\mathrm{op}}\,\mathrm{Sets}$.

Існує слабкий симетричний моноїдальний функтор

$$K = (K, sh, \kappa) : (\Delta^{\mathrm{op}}\,\mathrm{Sets}, \times, c, \mathbb{1}) \to (\mathsf{C}, \otimes_{\Bbbk}, c, \Bbbk),$$

визначений у [7, Ch. VIII, §8]. Тут C – моноїдальна категорія диференціальних градуйованих $\Bbbk$-модулів, оснащена звичайною симетрією знаків Кошуля. Позначення прийняті, як у [3] (Lemma-Definition 1.6.11 і Appendix B). Симпліціальну множину X функтор K переводить у градуйований $\Bbbk$-модуль KX, $(KX)^{-n} = \Bbbk X_n$, оснащений диференціалом $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Відображення перетасовки sh позначене g у [7, Theorem VIII. 8.8]. Комплекс $K\mathbb{1}$– це

$$\dots \xrightarrow{0} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{0} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{0} \Bbbk \longrightarrow 0,$$

де праве $\Bbbk$ має степінь 0. Гомотопічний ізоморфізм $\kappa : \Bbbk \to K\mathbb{1}$ є єдиним ланцюговим відображенням, що індукує тотожнє відображення в когомологіях. Спеціальні опори $\mathcal{SG}$ і $\mathcal{RG}$, збагачені у C, позначені $\Bbbk\mathcal{SG}$ і $\Bbbk\mathcal{RG}$. Ми бажаємо знайти підопору $Ж$ спеціальної C-опори $\Bbbk\mathcal{SG}$, ізоморфну до спеціальної опори, визначеної Марклом [9].

Диференціально градуйовані комплекси $\Bbbk$-модулів C є симетричною моноїдальною категорією, збагаченою в $\mathcal{S} = \mathsf{C}$. Згідно з прикладом 2 існує спеціальна опора $\overline{\mathsf{C}}$ із значеннями в симетричній моноїдальній категорії C. Відображення спеціальних C-опори $Ж \to \overline{\mathsf{C}}$ називається B_∞-біалгеброю.

n-симплекси в $N(\mathrm{Red1WGraphs}(k,m))$ можуть бути записані як такі послідовності однобічних графів $(G_0, G_1, \dots, G_n)$, що для всіх i, $0 \leqslant i < n$, існує морфізм $G_i \to G_{i+1} \in \mathrm{Red1WGraphs}(k,m)$. Спеціальні однобічні графи можна зобразити словами, чиї символи суть бідерева сполучені операціями опори. Бідерево $B \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Bitree}(k,m)$ висоти h описується послідовністю позитивних цілих чисел $(a_1, \dots, a_{k-1}; b_1, \dots, b_{m-1})$, $0 < a_i, b_j \leqslant h$, де a_j (відп. $b_j - 1$) - рівень на якому точки i, $i+1 \in \mathbf{k}$ (відп. j, $j+1 \in \mathbf{m}$) зустрічаються в зображенні (12). З невиродженості B випливає, що $\{a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_{m-1}\} = [1,h] \cap \mathbb{Z}$. Зокрема, висота h визначена послідовністю $(a_1, \dots, a_{k-1}; b_1, \dots, b_{m-1})$ однозначно. Наприклад, бідерева від (12) зображені як a) $(2,2;1)$, b) $(1,3;2)$. Відображення грані суть

$$d_i(G_0, G_1, \dots, G_n) = (G_0, \dots, G_{i-1}, G_{i+1}, \dots, G_n).$$

для $0 \leqslant i \leqslant n$. Зокрема,

$$d_0(G_0, \dots, G_n) = (G_1, \dots, G_n), \qquad d_n(G_0, \dots, G_n) = (G_0, \dots, G_{n-1}).$$

Задача 3. Спеціальна опора, визначена Марклом [9], ізоморфна мінімальній спеціальній C-підопорі $Ж$ в $\Bbbk\mathcal{SG}$, ациклічній у від'ємних степенях, породженій елементами

$$\begin{aligned}
&Ж_1^2 = \overline{(1;)} = \big((1;)\big), \qquad Ж_2^1 = \overline{(;1)} = \big((;1)\big), && \deg(Ж_1^2, Ж_2^1) = 0,\\
&Ж_1^3 = \overline{(1,1;)} = \big((1,2;),(1,1;)\big) - \big((2,1;),(1,1;)\big), && \deg(Ж_1^3) = -1,\\
&Ж_2^2 = \overline{(1;1)} = \big((1;2),(1;1)\big) - \big((2;1),(1;1)\big), && \deg(Ж_2^2) = -1,\\
&Ж_3^1 = \overline{(;1,1)} = \big((;1,2),(;1,1)\big) - \big((;2,1),(;1,1)\big), && \deg(Ж_3^1) = -1.
\end{aligned}$$

[1] *N. Bourbaki.* Groupes et algèbres de Lie, chaps. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[2] *Pierre Deligne.* Action du groupe des tresses sur une catégorie // Invent. Math. **128** (1997), no. 1, 159–175.

[3] *Jean-Louis Loday.* Cyclic homology, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[4] *V. V. Lyubashenko.* Squared Hopf algebras // Mem. Amer. Math. Soc. **142** (1999), no. 677, 184 pp.

[5] *V. V. Lyubashenko.* Coherence isomorphisms for a Hopf category // Noncommutative Structures in Mathematics and Physics (Steven Duplij and Julius Wess, eds.), NATO Advanced Research Workshop Proceedings, Kluwer Academic Publishers, 2001, September 24-27, 2000, Kyiv, Ukraine, pp. 283–294.

[6] *V. V. Lyubashenko.* The triangulated Hopf category $n_+SL(2)$ // Appl. Categ. Structures **10** (2002), no. 4, 331–381, arXiv:math.QA/9904108.

[7] *Saunders Mac Lane.* Homology. – Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 114, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1963.

[8] *Saunders Mac Lane.* Categorical algebra // Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 40–106.

[9] *Martin Markl.* A resolution (minimal model) of the PROP for bialgebras, 2002, arXiv:math.AT/0209007.

SPECIAL PROPS AND HOMOTOPY BIALGEBRAS

Volodymyr LYUBASHENKO

Institute of Mathematics of NASU
3 Tereshchenkivska str., Kyiv-4, 01601, Ukraine

For a braided category $\mathcal{C}$ we construct a special PROP $\overline{\mathcal{C}}$ such that functors of special PROPs Bialg $\to \overline{\mathcal{C}}$ are in bijection with braided bialgebras in $\mathcal{C}$.