Dr. JULIAN BOHAČEVŚKYJ (Stryj).

Versuch einer allgemeinen Herleitung der Summenformel arithmetischer Progressionen beliebiger Ordnung.

Es möge im Folgenden versucht werden, für arithmetische Progressionen beliebiger Ordnung eine gemeinsame Formel aufzustellen. Zu dem Behuf wird der Umstand benutzt, daß eine Summenformel für eine arithmetische Reihe k-ter Ordnung bei Vermehrung der Summe der n ersten Glieder um $(n+1)^k$ invariant bleiben muß, m. a. W. die Allgemeingültigkeit der betreffenden Formel für jedes beliebige n. Kommen wir von der genannten Tatsache als einer Forderung aus, so bekommen wir eine Reihe von Gleichungen, die wir durch Vergleichung der Koeffizienten der Entwickelung der entsprechenden Summe erhalten. Wir werden also auf gewisse Determinanten geführt, deren Untersuchung von entscheidender Bedeutung sein wird. Diese Determinanten werden zunächst für jedes rationale ganzzahlige k von endlicher Ordnung sein; sie werden also einen endlichen, und wie sich herausstellen wird, einen ganzen rationalen Wert haben.

Wir können voraussetzen, daß die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Progression k-ter Ordnung $S(n^k)$ eine Entwickelung gestattet:

$$S(n^k) = 1^k + 2^k + 3^k + \quad + n^k = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \qquad \text{(I)}$$

Diese Summe kann bei einem ganzen rationalen k offenbar nur einen endlichen ganzen rationalen Wert haben, die Entwickelung muß also mit einem gewissen, nicht unendlich fernen Gliede abbrechen. Außerdem wird die Entwickelung das Glied a_0 nicht enthalten, weil für $n = 0$ die ganze Summe, also auch die rechts stehende Entwickelung verschwindet.

Addieren wir nun zu der genannten Summe $(n+1)^k = \sum_{\varkappa=0}^{k} \binom{k}{\varkappa} \cdot n^{\varkappa}$, so nimmt die Entwickelung die Gestalt an:

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + 1 + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 + \ldots + \binom{k}{k-1} n^{k-1} + n^k + \ldots \quad \text{(II)}$$

Andererseits können wir die um $(n+1)^k$ vergrößerte Entwickelung in der Form schreiben:

$$a_0 + a_1 (n+1) + a_2 (n+1)^2 + \ldots \quad \text{(III)}$$

Vergleichen wir die beiden Entwickelungen

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_k n_k + a_{k+1} n^{k+1} + \ldots + 1 + \binom{k}{1} n + \binom{k}{2} n^2 +$$

$$+ \binom{k}{3} n^3 + \ldots + \binom{k}{k-1} n^{k-1} + \binom{k}{k} n^k + \ldots =$$

$$= a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + a_4 n^4 + a_5 n^5 + \quad + a_k n^k + a_{k+1} n^{k+1} +$$

$$+ a_1 + \binom{2}{1} a_2 n + \binom{3}{1} a_3 n^2 + \binom{4}{1} a_4 n^3 + \binom{5}{1} a_5 n^4 + \ldots$$

$$+ \binom{k}{1} a_k n^{k-1} + \binom{k+1}{1} a_{k+1} n^k + \ldots + a_2 + \binom{3}{2} a_3 n + \binom{4}{2} a_4 n^2 + \binom{5}{2} a_5 n_3 + \ldots$$

$$+ \binom{k}{2} a_k n^{k-2} + \binom{k+1}{2} a_{k+1} n^{k-1} + \ldots + a_3 + \binom{4}{3} a_4 n + \binom{5}{3} a_5 n^2 + \ldots$$

$$+ \binom{k}{3} a_k n^{k-3} + \binom{k+1}{3} a_{k+1} n^{k-2} + \ldots$$

$$+$$

$$+ a_k$$

$$+ a_{k+1}$$

$$+ \ldots$$

so erhalten wir durch Vergleichung der Koeffizienten eine Reihe von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
& a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = 1 \\
& \binom{2}{1} a_2 + \binom{3}{2} a_3 + \ldots + \binom{k}{k-1} a_k + \binom{k+1}{k} a_{k+1} = \binom{k}{1} \\
& \binom{3}{1} a_3 + \binom{4}{2} a_4 + \ldots + \binom{k}{k-2} a_k + \binom{k+1}{k-1} a_{k+1} = \binom{k}{2} \\
& \vdots \\
& \binom{k+1}{1} a_{k+1} = \binom{k}{k} = 1
\end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Fassen wir hier die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 usw. als Unbekannte auf, so liegt ein System von (k+1) Gleichungen mit (k+1) Unbekannten vor. Die Determinante des Systems ist:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & & \binom{k+1}{k} \\ 0 & 0 & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & \binom{4}{1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & \binom{k+1}{1} \end{vmatrix} \tag{V}$$

Wie man unmittelbar sieht, ist der Wert dieser Determinante dem Produkte der Hauptdiagonalglieder gleich, also für ganzes rationales k:

$$D = (k + 1)! \tag{VI}$$

Die Zählerdeterminanten D_{a_i}

$$D_{a_i} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\dots & & 1\dots & & 1 & 1 \\ 0 & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{k}{1}\dots & & \binom{k}{k-1} & \binom{k+1}{k} \\ 0 & 0 & \binom{3}{1} & & \binom{k}{2} & & \binom{k}{k-2} & \binom{k+1}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \binom{i-1}{1} & & & & \\ & & & 0 & \binom{k}{i-1} & & & \\ & & & \vdots & \vdots & \binom{i+1}{1} & & \\ & & & & & 0 \;\ddots & & \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \binom{k}{k-1} & 0\dots & \binom{k}{1} & \binom{k+1}{2} \\ 0 & 0 & & 0 & \binom{k}{k} & 0\dots & \dots 0 & \binom{k+1}{1} \end{vmatrix} \tag{VII}$$

erhalten wir, indem wir die i-te Spalte der Determinante D resp.

durch 1, $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ usf. ersetzen. Wie man unmittelbar sieht, stimmt die i-te Spalte mit der vorletzten bis auf das letzte Glied überein, wenn wir bedenken, daß $\binom{k}{k-1} = \binom{k}{1}$, $\binom{k}{k-2} = \binom{k}{2}$ u.s.w. Das letzte Glied der vorletzten Spalte ist 0. Dann lässt sich aber durch Subtraktion der vorletzten Spalte von der i-ten erreichen, daß alle Glieder der i-ten Spalte bis auf das letzte $= 0$, das letzte dagegen $\binom{k}{k} = 1$ wird. Der Wert dieser Determinante ist gleich

$$(i-1)!\begin{vmatrix} 0 & \binom{i+1}{2} & \binom{i+2}{3} \cdots & \binom{k}{k-i} & \binom{k+1}{k-i+1} \\ 0 & \binom{i+1}{1} & \binom{i+2}{2} \cdots & \binom{k}{k-i-1} & \binom{k+1}{k-i} \\ \vdots & 0 & \binom{i+2}{1} \cdots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \binom{k}{1} & \binom{k+1}{2} \\ 1 & 0 & & 0 & \binom{k+1}{1} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k-i+1}(i-1)!\begin{vmatrix} \binom{i+1}{2} & \binom{i+2}{3} \cdots & & \binom{k}{k-i} & \binom{k+1}{k-i+1} \\ \binom{i+1}{1} & \binom{i+2}{2} \cdots & & \binom{k}{k-i-1} & \binom{k+1}{k-i} \\ 0 & \binom{i+2}{1} \cdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 \ddots & & & \\ & \vdots \; 0 & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k+1}{3} \\ & & 0 & \binom{k}{1} & \binom{k-1}{2} \end{vmatrix} \qquad \text{(VIII)}$$

Denken wir uns nun die letztausgeschriebene Unterdeterminante nach der ersten Spalte entwickelt, die weiteren sukzessiven Unterdeterminanten wieder nach der ersten Spalte u. s. f., so ist leicht einzusehen, daß sich zunächst der Faktor i einmal, die weiteren, und zwar $(i+1)$, $(i+2)$, $(i+3)\ldots$ u. s. f. je zweimal, der letzte, u. zw. $(k+1)$ wieder nur einmal vor die Determinante heben läßt, sodaß die Determinante D_{ai} schließlich den Wert erhält:

$$D_{ai} = (-1)^{k-i+1}(k+1)!\;(i+1)(i+2)\ldots k\cdot\Delta_{k-i+1} \qquad \text{(IX)}$$

wobei zur Abkürzung

$$\Delta_{k-i+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & & & \frac{1}{(k-i+1)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{3!} \\ & & 0 & 1 & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \qquad \text{(IXa)}$$

gesetzt werden möge.

Setzen wir der Vollständigkeit halber

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{2!} \qquad \text{(IXb)}$$

so gilt für die Determinanten Δ_ν die Rekursionsformel

$$\Delta_\nu = \frac{1}{2!}\Delta_{\nu-1} - \frac{1}{3!}\Delta_{\nu-2} + \frac{1}{4!}\Delta_{\nu-3} - \quad \dots \quad + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}\Delta_0 \qquad \text{(X)}$$

die mit der Entwickelung nach der ersten Zeile gleichbedeutend ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$\Delta_\nu = \frac{3\cdot 4 \dots \nu\cdot\Delta_{\nu-1} - 4\cdot 5 \dots \nu\cdot\Delta_{\nu-2} + \dots \quad \dots + (-1)^\nu \Delta_0}{\nu!} \qquad \text{(Xa)}$$

Die Formel (IX) gilt nicht mehr für D_{a_k} und $D_{a_{k+1}}$. Für diese beiden Fälle gelten vielmehr die Formeln

$$D_{a_k} = (k-1)!\left[k(k+1) - \binom{k+1}{2}\right] = \frac{1}{2}(k+1)! \qquad \text{(XI)}$$

$$D_{a_{k+1}} = k! \qquad \text{(XIa)}$$

Im Falle $k = 1$ gelten also nur die Formeln (XI) und (XIa). Im Fall $k = 2$ kommt dagegen schon bei D_{a_1} die Formel (IX) zur Geltung. Die Summen $S(n^k)$ lassen sich also leicht berechnen, sobald Determinanten Δ_ν einmal berechnet sind. Auch für die einfachsten Fälle $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ sind die bekannten, sonst gewöhnlich auf anderem Wege erhaltenen Formeln, nach dem angegebenen Prinzip auch ohne Kenntnis der Determinantentheorie leicht ableitbar, und es kann m. e. die angegebene Methode auch an der Schule gebracht werden.

Stryj, 28. März 1938.

QUELLEN UND NACHSCHLAGEWERKE:

Jak. Bernouilli: Ars conjectandi 1713. S. 96.

L. Euler: Institutiones calculi differentialis Bd II. 1755 § 122.

Id: Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748. Kap. 9 u. 10.

Ohm, in Journal f. reine u. angew. Math. Jhg 1840. Bd 20. S. 11.

J. C. Adams: ibid. Bd 85, Jhg 1878.

L. Saalschütz: Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. J. Springer: Berlin 1893.

J. Kn. Puzyna: Teorya funkcyj analitycznych t. II. S. 99 dd.

A. Berger: in Acta mathematica Bd 14 SS. 225—232.

G. Frobenius, in Sitzungsber. d. Berl. Ak. d. W. 1910 SS.: 809—847.

Dr. Konr. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — J. Springer: Berlin 1922.

N. Nielsen: Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. — Gauthiers-Villars, Paris 1923.

Dr. Ludwig Bieberbach: Differential u. Integralrechnung Bd II. Integralrechnung SS. 103—109.