

Д-р ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦЬКИЙ (Львів)

## Деякі типи рівняння Riccati.

1. Загальне рівняння Riccati

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y^2 + 2s(x)y + t(x) \quad 1)$$

можна — як відомо — розв'язати квадратурами лиш тоді, коли існує реляція:

$$r\lambda^2 + 2s\lambda\mu + t\mu^2 = 0 \quad 2)$$

де  $\lambda, \mu$  в сталі сучинники, що не в рівночасно рівні нулі.<sup>1)</sup>

Тема нинішньої ноти — найти такий тип рівняння Riccati, що його інтегралом в відома автоморфна трансформація:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad 3)$$

при чому:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Наколиб  $ad - bc = D$  ( $D$  різне від 0 та 1), тоді возьмемо місто 3)

$$y = \frac{a'x + b'}{c'x + d'}, \text{ де } a' = \frac{a}{\sqrt{D}}, b' = \frac{b}{\sqrt{D}}, c' = \frac{c}{\sqrt{D}}, d' = \frac{d}{\sqrt{D}}$$

(тоді  $a'd' - b'c' = \frac{ad - bc}{D} = 1$ ).

2. Тому, що:

$$y' = \frac{1}{(cx + d)^2}$$

рівняння 1) дасть:

$$1 = r(ax + b)^2 + 2s(ax + b)(cx + d) + t(cx + d)^2 = 0$$

---

<sup>1)</sup> пор. пр. артикул R. Lagrange'a в *Bullet. de la Société mathém. de France* t. LXVI, fascic. III-IV стр. 155 sqts. 1938.

або:

$$(rb^2 + 2sbd + td^2) + r(a^2x^2 + 2abx) + 2s(acx^2 + bcx + adx) + t(c^2x^2 + 2cdx) = 1 \quad 4).$$

Коли рівняння 1) має мати інтеграл при помочи квадратури, тоді на основі 2) мусить бути:

$$rb^2 + 2sbd + td^2 = 0 \quad 5).$$

Тоді з 4) слідує:

$$r(a^2x^2 + 2abx) + 2s(acx^2 + bcx + adx) + t(c^2x^2 + 2cdx) - 1 = 0.$$

Це рівняння розв'язане на  $x$  дасть:

$$x = \frac{-(abr + bcs + ads + cdt) \pm \sqrt{(abr + bcs + ads + cdt)^2 + (a^2r + 2acs + c^2t)}}{a^2r + 2acs + c^2t}.$$

а що  $x$  має мати усякі можливі значення, т. є.  $x = \frac{0}{0}$ , тож з чисельника і знаменника дістанемо:

$$a^2r + 2acs + c^2t = 0 \quad 6).$$

Рівняння 5) і 6) є кінцевою умовою, щоби

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

було інтегралом рівняння Ріссаті.

З рівняння 6) слідує:

$$r + 2\frac{c}{a}s + \frac{c^2}{a^2}t = 0$$

або:

$$\frac{c}{a} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \quad 7).$$

Коли в рівняння 5) вставимо:

$$d = \frac{1 + bc}{a} = \frac{1}{a} + \frac{b}{t} (-s \pm \sqrt{s^2 - rt})$$

тоді рівняння 5) дістане вид:

$$b^2r + \frac{2b}{a}s + 2b^2s \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} + \frac{t}{a^2} + \frac{2b}{a} (-s \pm \sqrt{s^2 - rt}) + \frac{b^2}{t} (-s \pm \sqrt{s^2 - rt})^2 = 0$$

а по обчисленню дістанемо:

$$t \pm 2ab\sqrt{s^2 - rt} = 0$$

або:

$$t^2 = 4a^2b^2(s^2 - rt) \quad 8).$$

а звідси:

$$t = 2a^2b^2(\pm\sqrt{r^2 + s^2}) \quad 9).$$

Отже для рівняння Riccati дістанемо реляції

$$\left. \begin{aligned} \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t} &= \frac{c}{a} \\ \frac{r \pm \sqrt{r^2 + s^2}}{t} &= \frac{1}{2a^2b^2} \end{aligned} \right\} \quad (ad - bc = 1). \quad 10)$$

Впелімінуймо тепер  $t$ .

З рівняння 6) слідує:

$$t = -\frac{a^2 r + 2acs}{c^2}$$

тож в виду цього рівняння 10) дасть:

$$r \pm \sqrt{r^2 + s^2} = -\frac{a^2 r + 2acs}{2a^2 b^2 c^2}$$

або:

$$\pm \sqrt{r^2 + s^2} = -\frac{ar(1 + 2b^2c^2) + 2cs}{2a b^2 c^2} \quad 11).$$

Коли це рівняння розв'яжемо що до  $s$ , дістанемо:

$$s = -\frac{ar}{2c}(1 + 2b^2c^2) \pm \frac{ar}{2c} 2b^2c^2, \text{ т. є дістанемо:}$$

або:

$$s_1 = -\frac{ar}{2c} \quad 12)$$

або:

$$s_2 = -\frac{ar}{2c}(1 + 4b^2c^2) \quad 13).$$

4. Провірмо тепер оба випадки 12) і 13).

Рівняння 12) дасть у злучі з рівнянням 6)

$$a^2 r - a^2 r + c^2 t = 0,$$

тобто  $t$  рівналося 0; тоді рівняння Riccati дістане вид:

$$y' = ry^2 + 2sy$$

або:

$$y' = ry \left( y - \frac{a}{c} \right) \quad 14).$$

А що:

$$y - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c(cx + d)},$$

тож з рівняння 14) дістанемо:

$$r(x) = -\frac{c}{ax + b},$$

а само рівняння Riccati дістане вид:

$$y' = -\frac{cy^2}{ax+b} + \frac{ay}{ax+b}. \quad 15).$$

В цім випадку — як дуже легко перевірити — дійсно інтегралом рівняння є  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

В випадку 13). дістанемо з рівняння 6):

$$a^2 r - a^2 r - 4a^2 b^2 c^2 r + c^2 t = 0$$

т. є.

$$t = 4a^2 b^2 r,$$

а тоді рівняння 11) дасть:

$$\frac{r \pm \sqrt{r^2 + s^2}}{4a^2 b^2 r} = \frac{1}{2a^2 b^2}$$

або:

$$\pm \sqrt{r^2 + s^2} = r$$

т. є.

$$s = 0.$$

Одначе тоді з 13) виходить, що і  $r = 0$ , а з  $t = 4a^2 b^2 r$  і  $t = 0$ .  
Рівняння Riccati редукується тоді до рівняння:

$$y' = 0$$

т. є.

$$y = \text{const.};$$

це в дійсности не є вже рівняння Riccati.

Значиться, що лише рівняння Riccati типу:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cy^2}{ax+b} + \frac{ay}{ax+b}$$

розв'язується інтегралом  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Львів, 26. II. 1939.

