UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT X.

(SEPTEMBER 1928 — DEZEMBER 1928).

REDIGIERT

VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1929.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

4. Zu wirklichen Mitgliedern der Sektion wurden die Hrn Dr. C. Purkyné (Prag), Dr. V. Svambera (Prag) und General St. Boskovitch (Belgrad) gewählt.

CLI. Sitzung am 13. November 1928.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Laut Punkt 2, der vorigen Sitzung berichtet der Vorsitzende über seine zwei Arbeiten, die unlängst in der ukrainischen Sprache erschienen, und zwar: a) zusammen mit Prof. Kravčuk „Über die Stirlingsche Formel" (Berichte des Kyjiver wirtschaftl. Institutes III 1927. b) „Die Traktrix als Evolvente einer Kettenlinie" (Sammelschrift des Institutes für Volksaufklärung Kyjiv III 1928).

ad a) Die Stirlingsche Fornel wird mit Zuhilfenahme des Laplaceschen Integrals und der Γ-Funktion abgeleitet. ad b) Ein neuer Beweis, dass die Evolvente einer Kettenlinie die Traktrix ist.

2. Hrn Polanśkyj gibt zur Kenntnis der Sektion, dass er in der letzten Zeit folgende Abhandlungen veröffentlicht hat: a) Neue archäologische Ausgrabungen in Galizien (Zapyski der historischen Sektion der Ševčenko-Gesellschaft Bd CXLVI, ukrainisch), b) der geschichtete Loess im Lichte der Forschungen des weil. L. Sawicki (Wiad. arch. polnisch), c) loess, terrasses et morphologie de Podolie (Pamiętn. Zjazdu słowiań. geogr. i etnogr. w Polsce — französisch.

3. Der Vorsitzende legt die Arbeit des Hrn Kravčuk (Kyjiv) u. T. „sur un probleme de minimum" vor.

RÉSUMÉ.

Sur un problème de minimum.

Note de M. Krawtchouk.

Soit $\varphi(x)$ une fonction qui vérifie les conditions

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y} \geqq 0 \tag{1}$$

et

$$\frac{\varphi(x+y+z)-\varphi(x+z)-\varphi(x+y)+\varphi(x)}{yz} \geqq 0 \tag{2}$$

pour toutes les valeurs réelles des variables x, $x+y$, $x+z$, $x+y+z$ appartenant à un ensemble quelconque $M \geqq 0$. Dans le cas où la fonction $\varphi(x)$ est deux fois dérivable, les conditions (1) et (2) sont respectivement équivalentes aux inégalités

$$\varphi'(x) \geqq 0$$
$$\varphi''(x) \geqq 0$$

Ils expriment que notre fonction est non-décroissante et convexe.

Nous voulons démontrer la proposition suivante:

Si la suite des nombre réels:

$$A_0, A_1, \ldots A_n$$

est non décroissante, et si tous les nombres $|A_i - A_j|$ appartiennent à l'ensemble M, alors la valeur la plus petite de la somme

$$S_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n\alpha_0} = \varphi(|A_{\alpha_1} - A_{\alpha_0}|) + \varphi(|A_{\alpha_2} - A_{\alpha_1}|) + \ldots$$
$$+ \varphi(|A_{\alpha_n} - A_{\alpha_{n-1}}|) + \varphi(|A_{\alpha_0} - A_{\alpha_n}|),$$

où les indices α_i sont distincts et pris de la suite

$$0, 1, \ldots, n,$$

est

$$S_{013 \ldots 6420} = \varphi(A_1 - A_0) + \varphi(A_n - A_{n-1}) +$$
$$+ \varphi(A_2 - A_0) + \varphi(A_3 - A_1) + \varphi(A_4 - A_2) + \ldots + \varphi(A_n - A_{n-2})$$

Démonstration. Sans restiction de la généralité on peut poser

$$\alpha_0 = 0.$$

En supposant de plus que

$$\alpha_k = n,$$

arrangeons les nombres

$$A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}$$

dans une suite non décroissante

$$A_{\beta_0}, A_{\beta_1}, \ldots, A_{\beta_k}$$
$$(0 = \beta_0 \leqq \beta_1 \leqq \ldots \leqq \beta_k = n)$$

et les nombres

$$A_{\alpha_k}, A_{\alpha_{k+1}}, \ldots, A_{\alpha_n}$$

dans une suite non croissante

$$A_{\beta_k}, A_{\beta_{k+1}}, \ldots, A_{\beta_n}$$
$$(n = \beta_k \geqq \beta_{k+1} \geqq \ldots \geqq \beta_n).$$

Grâce á l'inégalité (1) on a alors

$$S_{\beta_0\beta_1 \ldots \beta_n\beta_0} \leqq S_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n\alpha_0}; \tag{3}$$

donc, en cherchant le minimum de la somme $S_{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n\alpha_0}$ on peut se borner aux sommes du type $S_{\beta_0\beta_1 \ldots \beta_0\beta_n}$ où la suite des nombres

$$\beta_1 - \beta_0,\ \beta_2 - \beta_1,\ .\qquad \beta_n - \beta_{n-1},\ \beta_0 - \beta_n \qquad (\beta_0 = 0)$$

ne présente qu'un changement de signe.

D'autre part, toute somme du type $S_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_n\beta_0}$, à l'exception de $S_{013\ldots 6420}$, contient un terme de la forme

$$\varphi(A_{k+l+m} - A_k), \tag{4}$$

où

$$l > 1,\ l + m > 2,\ m > 0;$$

donc, elle contient aussi des termes suivants:

$$\varphi(A_{k+2} - A_{k+1}),\ \varphi(A_{k+3} - A_{k+2}), \ldots,\ \varphi(A_{k+l+m-1} - A_{k+l+m-2}$$

En remplaçant dans $S_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_n\beta_0}$ le terme (4) par

$$\varphi(A_{k+l} - A_k) + \varphi(A_{k+l+m} - A_{k+l-1})$$

et en supprimant le terme

$$\varphi(A_{k+l} - A_{k+l-1})$$

on obtiendra une nouvelle somme $S_{\beta_0'\beta_1'\ldots\beta_n'\beta_0'}$ du même type et on aura:

$$S_{\beta_0'\beta_1'\ldots\beta_n'\beta_0'} \leqq S_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_n\beta_0}, \tag{5}$$

parce que, d'après les conditions (2), la différence

$$S_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_n\beta_0} - S_{\beta_0'\beta_1'\ldots\beta_n'\beta_0'} =$$
$$= \varphi(A_{k+l+m} - A_k) - \varphi(A_{k+l} - A_k) - \varphi(A_{k+l+m} - A_{k+l-1}) + \varphi(A_{k+l} - A_{k+l-1})$$

n'est pas négative.

Si la somme $S_{\beta_0'\beta_1'\ldots\beta_n'\beta_0'}$ ne contient pas des termes de la forme (4), alors elle n'est autre chose que $S_{013\ldots 6420}$, et notre raisonnement est fini. Dans le cas contraire on peut apliquer le même raisonnement à la somme $S_{\beta_0'\beta_1'\ldots\beta_n'\beta_0'}$, etc... De la sorte, on arrive plus ou moins tard à la somme $S_{013\ldots 6420}$; donc,

$$S_{013\ldots 6420} \leqq S_{\alpha_0\alpha_1\ \ldots\alpha_n\alpha_0} \tag{6}$$

Si l'on supprime le signe d'égalité dans les conditions (1) et (2), on peut le supprimer aussi dans les inégalités (5) et (6).

On peut énoncer évidemment le résultat suivant qui est un peu plus complêt: si les nombres $|A_i - A_j|$ sont arbitraires dans l'ensemble M, alors les conditions (1) et (3) sont équivalentes; une d'elles étant remplie les conditions (2) et (6) sont aussi équivalentes[1].

Le 19 Junin 1928.

CLII. Sitzung am 9. Dezember 1928.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Die im Punkt 3. der CXLVII. Sitzung Heft IX. angeführte Arbeit des Hrn Ing. Tworydło wurde der physiographischen Kommission zur Publikation in ihrer Sammelschrift übergeben.

2. Der Plan eines Lehrbuches der Metalurgie sowie einiger teoretischen Arbeiten des Hrn Prof. Feščenko-Čopivśkyj (Krakau, Bergakademie), und seiner Schüler wurde zur Kenntnis genommen.

CLIII. Sitzung am 27. Dezember 1928.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. Zaryćkyj berichtet über seine Arbeit u. T. „Allgemeine Eigenschaften der Cantor'schen Cohärenzen", die unlängst in Transactions of American Matemat. Society erschien.

Mit Hilfe von Formeln der algebraischen Logik bekommt man auf Grund der drei als Axiome angenommenen Eigenschaften des Begriffes einer Cohärenz einen Komplex der allgemeinen Teoreme über die Cohärenz.

2. Der Vorsitzende legt die Arbeit des Hrn. M. Kurenśkyj (Kyjiv) u. T. „Über die Riccati'sche Gleichung" vor.

BERICHT.

Über die Riccati'sche Gleichung.

von M. Kurenśkyj (Kurensky).

§ 1. Die Riccatische Gleichung:

$$y' = Py^2 + Qy + R \tag{1}$$

transformiert man, wie bekannt, mittelst der Substitution:

$$y = \frac{z}{P} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{P}\right)' - \frac{Q}{P}\right]$$

auf die kanonische Form:

[1] C'est la question spéciale sur le minimum de la somme $S_{\sigma_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \alpha_0}$ dans le cas

$$\varphi(x) = x^2$$

(Voir Jahresb. d. Deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 37, Aufgabe 54) qui a attiré l'attention de l'auteur au problème résolu dans cette note.

$$z' = z^2 + y, \tag{2}$$

wobei:

$$y = \frac{1}{4}\left[4PR - Q^2 + 2\left(\frac{P'}{P}\right)' + 2P\left(\frac{Q}{P}\right) - \left(\frac{P'}{P}\right)^2\right]$$

bedeutet.

Das allgemeine Integral des Gleichung (1) kann in der Form:

$$y = \frac{c\,\omega_1 + \omega_2\,\omega_3}{c + \omega_3} \tag{3}$$

dargestellt werden [1]).

Dann ist ω_1 ein partikuläres Integral der Gleichung (1) für $c = \infty$, ω_2 ein partikuläres Integral für $c = 0$, und die Funktionen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ und mit den Koëffizienten der Gleichung (1) mittelst der Formeln:

$$\begin{gathered} P = \frac{\omega_3'}{\omega_3(\omega_1 - \omega_2)}, \quad Q = \frac{\omega_3(\omega_1' - \omega_2') - \omega_3'(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_3(\omega_1 - \omega_2)}, \\ R = \frac{(\omega_1\,\omega_2' - \omega_1'\,\omega_2)\,\omega_3 + \omega_1\,\omega_2\,\omega_3'}{\omega_3(\omega_1 - \omega_2)} \end{gathered} \tag{4}$$

verknüpft.

Für die kanonische Form (2) finden wir, daß die Funktion ω_3 ein partikuläres Integral der folgenden Differentialgleichung der 3. Ordnung:

$$\frac{\omega_3'''}{\omega_3'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\omega_3''}{\omega_3'}\right)^2 = 2J \tag{5}$$

ist, oder — anders ausgedrückt — ω_3 ist eine Schwarz'sche Funktion, durch die Gleichung

$$\{\omega_3, x\} = 2J$$

ausgedrückt, und ist mit der Normalform einer linearen Gleichung zweiter Ordnung

$$v'' + Jv = 0 \tag{6}$$

verknüpft, wobei:

$$\frac{v'}{v} = -z, \quad z = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_3''}{\omega_3'}$$

bedeuten. Es ist also ω_3 ein Verhältnis von zwei partikulären Integralen $v_1\ v_2$ der Gleichung (6), d. h.

$$\omega_3 = \frac{v_1}{v_2}.$$

Für eine allgemeine Gleichung (1) bekommen wir auf Grund eines Theoremes über das anharmonische Verhältnis von 4 verschiedenen Integralen y_1, y_2, y_3, y_4:

---

[1]) vgl. M. Kourensky. — Proceedings of the London Maf. Soc., vol. 24, 1925, p. 205; 498.

$$\frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)}=C,\; y=\frac{C\,y_2+y_1\,\dfrac{y_3-y_2}{y_1-y_3}}{C+\dfrac{y_3-y_2}{y_1-y_3}},$$

also:

$$\omega_3=\frac{y_3-y_2}{y_1-y_3} \tag{7}$$

§ 2. Indem wir die Riccati'sche Gleichung mit Hilfe der Elimination der willkürlichen Konstante c aus dem allgemeinen Integral (3) in der Form:

$$y'=\frac{p}{s}\,y^2+\frac{q}{s}\,y+\frac{r}{s} \tag{8}$$

schreiben, so können wir nur folgende zwei mögliche Fälle unterscheiden.

I. Alle Zähler p, q, r des Koëffizienten der Gleichung (8) sind mit dem Nenner s teilerfremd. Dann können wir schreiben:

$$p=\omega_3',\; q=\omega_1'\omega_3-\omega_1\omega_3'-\omega_2\omega_3'-\omega_3\omega_2',\; r=\omega_2'\omega_1\omega_3+$$
$$+\,\omega_3'\omega_1\omega_2-\omega_1'\omega_2\omega_3 \tag{9}$$
$$s=\omega_3(\omega_1-\omega_2),\; s'=\omega_1'\omega_3+\omega_3'\omega_1-\omega_3'\omega_2-\omega_2'\omega_3\,.$$

Die esten zwei Relationen, so wie die letzte geben uns als partikuläres Integral ω_1:

$$\omega_1=\frac{s'-q}{2p} \tag{10}$$

Indem wir diese Formel in die dritte Formel (9) einsetzen, bekommen wir:

$$r=\frac{s'-q}{2p}\,\omega_2'\omega_3-\omega_2 s'+\frac{s'-q}{2}\,\omega_2-p\,\omega_2^2-$$
$$-\,\omega_2\omega_3\omega_2'-\frac{s'-q}{2}\,\omega_2\,.$$

Da nun ω_2 ein partikuläres Integral der Gleichung (8) ist, so bekommen wir auf Grund der ersten Formel (9) für ω_2 folgende kubische algebraische Gleichung:

$$\omega_2^3+\left[\frac{ps+q\int p\,dx}{p\int p\,dx}+\frac{p(q-s')}{2p^2}\right]\omega_2^2+\left[\frac{qs+r\int p\,dx}{p\int p\,dx}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{q(p-s')}{2p^2}\right]\omega_2+\frac{rs}{p\int p\,dx}+\frac{r(q-s')}{2q^2}=0.$$

Indem wir aus der Gleichung (11) ein partikuläres Integral $y_1=\omega_2$ finden (alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Koëffiziente irreduzibele Funktionen sind, sind — wie Antonne (C. R. t. 96, 1883) bewies — partikuläre Integrale der Gleichung), und indem wir beachten, dass

$$\omega_1 = y_2 = \frac{s' - q}{2p}, \quad \omega_3 = \int p\,dx = \frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_3}$$

sind, so bekommen wir noch ein partikuläres Integral y_3 aus des Formel:

$$y_3 = \frac{y_1 \int p\,dx + y_2}{\int p\,dx + 1}. \tag{12}$$

Von der dritten der Gleichungen (9) können wir für ω_2 noch folgende quadratische algebraische Gleichung:

$$\omega_2^2 + \left\{\frac{p}{q} - \frac{s}{p}\left[\frac{(s' - q)'}{s' - q} - \frac{p'}{p}\right] + \frac{s}{\int p\,dx}\right\}\omega_2 +$$
$$+ \frac{r}{p} - \frac{2sr}{(s' - q)\int p\,dx} = 0 \tag{13}$$

leicht bekommen.

II. Geben die Formeln (10) — (13) keine Integrale der Gleichung (8), so bedeutet das, daß die Zähler $p\,q\,r$ einen gemeinsamen Faktor λ mit dem Nenner s besitzen. Dann ist es:

$$\omega_1 = \frac{(\lambda s)' - \lambda q}{2\lambda p},$$

$$\omega_1 = \frac{s' - q + st}{2p} \quad \left(t = \frac{\lambda'}{\lambda}\right) \tag{14}$$

Da ω_1 ein partikuläres Integral ist, so bekommen wir für t folgende Riccati'sche Gleichung:

$$t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{p'}{p}t + \frac{1}{2s^2}\left[4pr - q^2 + s'^2 - 2ps\left(\frac{s' - q}{p}\right)'\right] \tag{15}$$

Für jedes partikuläre Integral t_1 dieser Gleichung bekommen wir aus (14) ein partikuläres Integral der Gleichung (8). Andere Integrale bekommen wir aus der Formeln (11) — (13), indem wir statt p, q, r, s entsprechend:

$$e^{\int t\,dx}\cdot p, \quad e^{\int t\,dx}\cdot q, \quad e^{\int t\,dx}\cdot r, \quad e^{\int t\,dx}\cdot s$$

einsetzen.

Beispiel:

$$y' = \frac{3}{x^2 - 2}y^2 - \frac{2x^2 + 4}{x^3 - 2x}y + \frac{2}{x^2 - 2}$$

Die Formel (10) gibt kein partikuläres Integral. Die Gleichung (15) schreiben wir nun in der Gestalt:

$$t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{x}t - \frac{5}{2x^2}.$$

Aus (10) folgt $t_1 = \frac{1}{x}$, aus (14) $\omega_1 = y_2 = x$.

Die Gleichung (13) bekommt nun die Form:

$$\omega_2^2 - \frac{8}{3x}\,\omega_2 + \frac{4}{x^2} = 0.$$

Ihre Koëffizienten sind reduzibel; ihr Integral wird eine Wurzel $\omega_2 = y_1 = \frac{2}{x}$ sein und die Formel (12) lautet:

$$y_2 = \frac{2x^2 + x}{x^3 + 1}.$$

§ 3. Für jede Riccati'sche Gleichung (8) haben wir — auf Grund der ersten Formel (9) — für den gemeinsamen Faktor λ der Funktionen ω_3' und $\omega_3(\omega_1 - \omega_2)$ den Ausdruck

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2$$

wobei λ_1 den gemeinsamen Faktor für ω_3 und ihre Ableitung ω_3', λ_2 den gemeinsamen Faktor für ω_3', $\omega_1 - \omega_2$, $(\omega_1 - \omega_2)'$, $\omega_1 \omega_2' - \omega_2 \omega_1'$ bedeutet.

Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, bekommen wir die Funktionen ω_1, ω_2, ω_3, aus den Formeln (10), (11), (13) und der ersten Formel (9). Ist $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 = 1$, dann geben wir der Riccati'schen Gleichung (8), indem wir

$$\omega_3 = \lambda_1 \mu, \quad \omega_3' = \lambda_1 \mu_1$$

bezeichnen, folgende Gestalt:

$$y' = \frac{\mu_1}{\mu(\omega_1 - \omega_2)}\,y^2 + \frac{\mu(\omega_1' - \omega_2') - \mu_1(\omega_1 + \omega_2)}{\mu(\omega_1 - \omega_2)}\,y + \frac{\mu(\omega_1 \omega_2' - \omega_2 \omega_1') + \mu_1 \omega_1 \omega_2}{\mu(\omega_1 - \omega_2)};$$

ihre „Resolvente" (15) ist von den Funktionen ω_1, ω_2 unabhängig und hat die Form:

$$t' = \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{\mu_1'}{\mu_1}\,t + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^2\right] - \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{\mu'}{\mu_1}\right)' \tag{16}$$

Für diese „Resolvente" bekommen wir folgende zwei „conjugierte" partikuläre Integrale:

$$t_1 = -\frac{\mu' - \mu_1}{\mu}, \quad t_2 = -\frac{\mu' + \mu_1}{\mu}.$$

Indem wir t_1 und t_2 in die Formel (14) einsetzen, bekommen wir zwei partikuläre Integrale ω_1, ω_2; um dieselben zu finden, braucht man die „verbesserten" Gleichungen (11) und (13) nicht aufzulösen.

Die obenangeführten Formeln kann man auch für die Riccati'sche Gleichung (1) im Falle $s = 1$ verwenden. Dann kann man z. B. die Formeln (14) und (15) folgendermaßen:

$$\omega_2 = \frac{S' - Q + T}{2P}.$$

$$T' = \frac{1}{2}T^2 + \frac{P'}{P}T + \frac{1}{2}\left[4PR - Q^2 + 2P\left(\frac{Q}{P}\right)'\right]$$

schreiben.

§ 4. Ist $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$, also im Falle einer allgemeinen Riccati'schen Gleichung (8), welche wir nicht lösen können, d. h. deren allgemeines Integral wir auf Grund einer endlichen Anzahl von mathematischen Operationen weder mittelst der bekannten algebraischen, noch der bekannten transzendenten Funktionen darstellen können, dann haben für ihre Resolvente (14), analog wie im Falle $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 = 1$, die ersten zwei Koeffizienten dieselbe Gestalt, und zwar $\frac{1}{2}$ und die logarithmische Ableitung der Funktion $f(x)$, die in den Gleichungen (15) und (16) die Funktionen $p(x)$ und $\mu_1(x)$ vertritt.

Wir könnten also die Gleichung (15), indem wir dieselbe in der Form:

$$t' = \frac{1}{2}t^2 + \frac{f'(x)}{f(x)}t + F(x)$$

schreiben, lösen, wenn wir die Funktion $F(x)$ in der Gestalt des letzten Koeffizienten der Gleichung (16) darstellen könnten, d. h. wenn wir die Gleichung:

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{f}{\mu}\right)^2 + \frac{2f}{\mu}\left(\frac{\mu'}{f}\right)' + 2F$$

oder: (17)

$$2\mu\mu'' - \mu'^2 - 2\frac{f'}{f}\mu\mu' + 2F\mu^2 + f^2 = 0$$

integrieren könnten.

Wenn wir statt f und F die Koeffizienten $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s^2}$ einsetzen, bekommen wir:

$$4pr - q^2 + s'^2 - 2ps\left(\frac{s'-q}{p}\right)' = s^2\left[\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{p}{\mu}\right)^2 - \frac{2p}{\mu}\left(\frac{\mu'}{p}\right)'\right]$$

oder:

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 - \frac{2p}{\mu}\left(\frac{\mu'}{p}\right)' + \left(\frac{p}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{s'}{s}\right)^2 - 2\frac{p}{s}\left(\frac{s'-q}{p}\right)' - \left(\frac{q}{s}\right)^2 + \frac{4pr}{s^2}.$$

Indem wir aus der letzten Gleichung μ berechnen, bekommen wir:

$$t_1 = +\frac{p - \mu'}{\mu}, \qquad t_2 = -\frac{p + \mu'}{\mu}$$

$$\omega_1 = y_2 = \frac{s' - q + st_1}{2p}, \qquad \omega_2 = y_2 = \frac{s' - q + st_2}{2p}$$

Wir sehen also, dass die Riccati'sche Gleichung mit den quadratischen und kubischen Gleichungen (13) und (11) einerseits, und mit den Differentialgleichungen (5), (6) und (17) andererseits im Zusammenhange steht.

Kyjiv, November 1928.

II.

Tätigkeit der physiographischen Kommission.

XXIX. Sitzung am 1. Oktober 1928.

Vorsitzender Hr. Melnyk.

1. Die Hrn. Polańskyj, Kordiuk, Čajkovśkyj u. Kozij berichten über ihre Ferien-Exkursionen und Resultate derselben.

2. Hr. E. Čajkovśkyj legt einen Bericht über den jetztigen Zustand der naturwissenschaftlichen Abteilung des Museums vor.

3. Es wurden einige administrativen Angelegenheiten erledigt.

BERICHTE.

Geologische Exkursion in das Quellengebiet der beiden Tscheremosch-flüsse

(von B. Kordiuk).

In dieser südlichsten Ecke Galiziens gibt es keine parallel gegliederte Bergrücken, sondern lauter unregelmässige, oft unterbrochene Berggruppen, und zwar deswegen, weil dieser Bergteil aus lauter krystallinischen Felsarten besteht. Die Grenze dieser krystallinischen Gruppe vom letzten karpathischen Massiv ist auf der Karte von Zuber sehr ungenau bezeichnet und es gelang dem Verfasser, dieselbe auf einigen Stellen zu korrigieren.

Der Verfasser hat im weiterem Verlaufe auf der Karte verschiedenartige Sedimentgesteine bestimmt, die auf der Zuber'schen Karte gar nicht bezeichnet sind; ihr Alter geht bis in die Permformation zurück. Es zeigt sich, dass das Gebiet der krystallinischen Schiefer nur auf eine sehr schmale Zone begrenzt ist, und dass nördlich und südlich dieser Zone Sedimentgesteine, und zwar die dem sg. Magura-Sandstein ähnlich vorwiegend dickkörnigen Sandsteine liegen.

Der Verfasser hat bei der Untersuchung des mit der sg. Maguraformation bedeckten Terrains Merkmale gefunden, die zur Ansicht führen, dass diese ganze Formation oder wenigstens ihr grösster Teil zur Kreide zu rechnen sei. War die Tektonik anbelangt, so kann der Verfasser infolge einer zu kleinen Zahl der Schichtenmessungen nichts genaueres sagen.

Bis jetzt stellt sich die Sache folgendermassen dar: In der östlichen Seite gibt es eine grosse stark in der nordöstlichen Richtung geneigte