UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

HEFT XI.

(JÄNNER 1929 — JUNI 1929).

REDIGIERT

VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1929.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

„Über die Hydratation des Acetylens“ für die Sammelschrift der Sektion vor.

10. Es wurde beschlossen, den laufenden Band der Sammelschrift dem Hrn. Prof. Dr. Horbačevśkyj (Prag) aus Anlaß seines 75-Geburtstages zu widmen. Hr. Ing. Kandiak wurde beauftragt eine Monographie über die Bedeutung dieses großen Chemikers für die Sammelschrift zu bearbeiten.

11. Die Sektion beschliesst die oberste Aufsicht über das naturwissenschaftliche Museum der Gesellschaft selbst zu übernehmem.

12. Dieselbe beschliesst die Journale „Zeitschrift für Rassensphysiologie“ und „Die Eiszeit“ zu abonnieren.

BERICHTE.

Sur la methode de Laguerre pour la résolution approchée des équations.

(par M. Krawtchouk.)

Soit

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \quad (x-\alpha_n) = 0$$

une équation aux racines réelles. Alors, sous la condition

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} \geqq 0$$

le nombre x_{r+1} déterminé par l'égalité

$$(1) \quad \frac{1}{x_r - x_{r+1}} = \frac{1}{n}\frac{f'(x_r)}{f(x_r)} + \sqrt{\frac{n-1}{n}\sum_i\left(\frac{1}{x_r-\alpha_i} - \frac{1}{n}\frac{f'(x_r)}{f(x_r)}\right)^2}$$

$$(r = 1, 2, \ldots)$$

converge vers un de nombres α_i.

La rapidité de la convergence n'est pas moindre que celle du procédé de Newton et peut être augmentée si l'on prend au lieu de (1) la formule plus générale

$$(2) \quad \frac{1}{x_r - x_{r+1}} = \frac{1}{n}\frac{f'(x_r)}{f(x_r)} + \sqrt[2l]{\frac{(n-1)^{2l-1}}{(n-1)^{2l-1}+1}\sum_i\left(\frac{1}{x_r-\alpha_i} - \frac{1}{n}\frac{f'(x_r)}{f(x_r)}\right)^{2l}}$$

En augmentant indéfiniment l'exposant $2l$ on réduit le procédé à la méthode de Graeffe qui est applicable sans restriction à toutes les équations algébriques.

La formule simplifiée

$$\frac{1}{(x_{r+1} - x_r)^{2l}} = \sum_i \frac{1}{(x_r - \alpha_i)^{2l}}$$

est aussi applicable aux certaines équations transcendantes.

2. Es wurde zur Kenntnis genommen, dass die technisch-wissenschaftliche Kommission zu ihrem Obmann den Hrn. Dr. Pavloff, zum Obmannstellvertreter den Hrn. Ing. Kandiak, zu den Sekretären die Hrn. Ing. Pasternak u. Romanenko gewählt hat.

3. Es wurde beschlossen bei der Sektion eine Sammelschrift der obigen Kommission nicht periodisch herauszugeben.

CLIX. Sitzung am 18. Mai 1929.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. Kravčuk (Kyjiv) legt seine Arbeit u. T. „Sur la résolution approchée des équations linéaires intégrales et différentielles" (sieh unten) vor.

2. Hr. Kurenśkyj (Kyjiv) legt seine Arbeit u. T. „Die Methoden der Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. u. 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen" vor.

Die Arbeit erscheint im Bd. XXVIII der Sammelschrift der Sektion, unten erscheint vorläufig ein Résumé derselben.

3. Es wurde über die Anteilnahme der Sektion an dem im September l. J. stattzufindenden Kongress slavischer Mathematiker in Warschau diskutiert, ohne einen Beschluss zu fassen.

BERICHTE.

Sur la résolution des systémes des équations integrales linéaires.

(Par M. Krawtchouk.)

Soit $y(x)$ la solution unique de l'équation

$$L\,[y] = y\,(x) + \int_0^1 K\,(x,\,\xi)\,y\,(\xi)\,d\xi = f\,(x).$$

Dans une de mes notes antérieures (voir Comptes rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 188, p. 978) il est demontré le théorème suivant:

1. Si le systéme des fonctions

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$$

est complet, alors la somme

$$y_m\,(x) = a_0\,\varphi_0\,(x) + a_1\,\varphi_1\,(x) + \qquad + a_m\,\varphi_m\,(x)$$

définie par les équations

$$\int_0^1 L\,[y_m]\,\varphi_i dx = \int_0^1 f\varphi_i dx \qquad (i = o,\ 1,\ 2,\dots,\ m)$$

vérifie l'égalité:

$$\int_0^x y dx = \lim_{m=\infty} \int_0^x y_m \, dx$$

si de plus la dérivée $y^{(1+\delta)}$ $(\delta > o)$ existe, on a aussi

$$y = \lim_{m=\infty} y_m$$

Par la même voie on peut établir des résultats plus généraux. Soit par exemple

$$z_1 (x, y), z_2 (x, y), \ldots, z_k (x, y)$$

la solution unique du système des équations

$$L_j [z_1, z_2, \ldots, z_k] = z_j (x,y) + \iint\limits_{(s)} \sum_{i=o}^{k} K (x, y; \xi, \eta) z_i (\xi, \eta) \, d \xi \, d \eta =$$
$$= f_j (x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

dans le domaine S, et soit

$$\varphi_0 (x, y), \varphi_1 (x, y), \varphi_2 (x, y), \ldots$$

un système complet des fonctions dans le même domaine. Alors on a le théorème suivant:

2. Si les dérivées des fonctions $z_j (x, y)$ sont continues, alors les sommes

$$z_{jm} (x, y) = a_0 \varphi_0 (x, y) + a_1 \varphi_1 (x, y) + \ldots + a_m \varphi_m (x, y)$$

définies par les équations

$$\iint\limits_{(s)} L_j \, [z_{1m}, z_{2m}, \ldots, z_{km}] \, \varphi_i \, d x \, d y = \iint\limits_{(s)} f_j \, \varphi_i \, d x \, d y$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k; \ i = o, 1, \ldots, m)$$

vérifient les égalites:

$$\lim_{m=\infty} z_{jm} = z_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

A titre d'application prenons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - A (x, y) \frac{\partial z}{\partial x} - B (x, y) \frac{\partial z}{\partial y} - C (x,y) z = f (x,y).$$

Soit z sa solution unique dans le domaine s satifaisant aux certaines conditions frontièrés homogénes. En introduisant les notations

$$u = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial z}{\partial y}$$

on obtient:

$$(1) \quad z (x, y) - \iint\limits_{(s)} \mathfrak{G} \, [A (\xi,\eta) \, u (\xi,\eta) + B (\xi,\eta) v (\xi,\eta) + C(\xi,\eta) \, z (\xi,\eta)] \, d\xi d\eta$$
$$= \iint\limits_{(s)} \mathfrak{G} s f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$2)\ u(x,y)-\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathfrak{G}s}{\partial x}\,[A\,(\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)+B\,(\xi,\eta)\,v\,(\xi,\eta)+C\,(\xi,\eta)z\,(\xi,\eta)]\,d\xi d\eta$$

$$=\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathfrak{G}s}{\partial x}\,f\,(\xi,\,\eta)\,d\,\xi\,d\,\eta$$

$$(3)\ v\,(x,\,y)-\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathfrak{G}s}{\partial y}\,[A\,(\xi,\eta)u(\xi,\eta)+B(\xi,\eta)v(\xi,\eta)+C(\xi,\eta)z(\xi,\eta)]\,d\xi d\eta$$

$$=\iint\limits_{(S)} \frac{\partial \mathfrak{G}s}{\partial y}\,f\,(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

ou $\mathfrak{G}$s ne diffère de la fonction de Green de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=o$$

que par un facteur constant.

Si l'on applique maintenant au système (1), (2), (3) le theorème 2., on obtiendra une méthode convergente d' intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique.

Diverses autres applications et quelques généralisations s' imposent immédiatement.

Die Grundformen zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhägingen Variablen.

(von M. K. Kurenśkyj (Kurensky)).

I. Die in Jacobischen Determinanten lineare Gleichungen haben folgende Gestalt:

$$M+\sum_i^k M_i^k P_i^k+\sum_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} P_{j_1 i_2}^{k_1 k_2}+\ldots+\sum_{1\,2\ldots m}^{k_1 k_2\ldots km} M_{1\,2\ldots m}^{k_1 k_2\ldots km} P_{1\,2\ldots m}^{k_1 k_2\ldots km}=0$$

$$(i;\ i_1,\ i_2;\quad =1,\ 2,\quad m;\ k;\ k_1,\ k_2;\ \ldots\ k_m=1,\ 2,\ldots\ n,$$
$$i_1 \neq i_2,\ldots;\ k_1 \neq k_2,\ldots)$$

für $\qquad n \geqq m, \qquad$ und

$$M+\sum_i^k M_i^k P_i^k+\sum_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} M_{i_1 i_2}^{k_1 k_2} P_{i_1 i_2}^{k1\,k2}+\ldots+\sum_{i_1 i_2\ldots in}^{1\,2\ldots n} M_{i_1 i_2\ldots in}^{1\,2\ldots n} P_{i_1 i_2\ldots i_n}^{1\,2\ldots n}=0$$

$$(i;\ i_1,\ i_2,\ \ldots i_1,\ i_2,\ldots i_n=1,\ 2,\ldots m;\ k;\ k_1,\ k_2,=1,\ 2,\ldots n;$$
$$i_1 \neq i_2,\ldots;\ k_1 \neq k_2,\ldots)$$

für $\qquad n \leqq m \qquad$ wobei

$$p_i^k=\frac{\partial z_k}{\partial x_i};\ P_{i_1 i_2}^{k_1 k_2}=D\left(\frac{z_{k_1}\ z_{k_2}}{x_{i_1}\ x_{i_2}}\right);\ldots P_{1\,2\ldots m}^{k_1 k_2\ldots km}=D\left(\frac{z_{k_1}\ z_{k_2}\ldots z_{km}}{x_{i_1}\ x_{i_2},\ldots x_{in}}\right)$$

$$P_{i_1 i_2\ldots}^{1\,2\ldots}=D\left(\frac{z_1,\ z_2\ldots z_n}{x_{i_1},x_{i_2},\ldots x_{in}}\right)$$

$$D\left(\frac{z_{k1}, z_{k2}}{x_{i1}, x_{i2}}\right) = \frac{\partial\ (z_k\ \ z_{k2})}{\partial\ \ (x_{i1}, x_{i2})}$$

Ein spezieller Fall der Gleichungen (1), (2) ist die im Bezug auf die Ableitungen lineare Gleichung:

$$M + \sum_i^k M_i^k \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = o \tag{3}$$

Die Hamburger'schen Bedingungen in der Anzahl $C^m_{m+n} - mn - 1$, haben für die Gleichung (1) die Form:

$$M \neq 0 \tag{4}$$

$$M^{k1\,k2}_{i1\,i2} M = \begin{vmatrix} M^{k1}_{i1} & M^{k1}_{i2} \\ M^{k2}_{i1} & M^{k2}_{i2} \end{vmatrix} \qquad M^{k1\,k2\,k3}_{i1\,i2\,i3}\ M^2 = \begin{vmatrix} M^{k1}_{i1} & M^{k1}_{i2} & M^{k1}_{i3} \\ M^{k2}_{i1} & M^{k2}_{i2} & M^{k2}_{i3} \\ M^{k3}_{i1} & M^{k3}_{i2} & M^{k3}_{i3} \end{vmatrix}$$

$$\ldots.M^{k1\,k2\ldots km}_{1\,2\ldots m} M^{m-1} = \begin{vmatrix} M^{k1}_1 & M^{k1}_2 & \ldots M^{k1}_m \\ M^{k2}_1 & M^{k2}_2 & \ldots M^{k2}_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M^{km}_1 & M^{km}_2 & \ldots M^{km}_m \end{vmatrix} \tag{5}$$

Sind alle algebraischen Bedingungen (4) (5) erfüllt, dann ist das allgemeine Hamburger'sche Integral der Gleichung (1)

$$\varphi\ (u_1,\ u_2, \ldots\ u_m) = 0 \tag{6}$$

wobei φ eine beliebige Funktion, und $u_1,\ u_2, \ldots\ u_m$ Funktionen von $x_1, \ldots\ x_m;\ z_1, \ldots\ z_n$, partikuläre Integrale des Systems:

$$M\frac{\partial u}{\partial z_1} = M'_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + M'_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \quad + M'_m \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$\tag{7}$$

$$M\frac{\partial u}{\partial x_1} = M''_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + M''_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + M''_{n} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$ bedeuten.

Für der Gleichung (3) haben wir $(m-1)(n-1)$ algebraische Hamburger'sche Bedingungen:

$$\frac{M^{k1}_{i1}}{M^k_{i1}} = \frac{M^{k1}_i}{M^k_i}\ , \text{ oder } \frac{M^{k1}_{i1}}{M^{k1}_i} = \frac{M^k_{i1}}{M^k_i} \tag{8}$$

Um ein System von $\underline{\underline{n}}$ linearen Gleichungen (3) zu integrieren

$$M_r = M^k_i\ M^k_{r\,i} \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots n),$$

muss man mit Hinsicht darauf, dass

$$(\lambda M) = \lambda_1 \underset{1}{M} + \quad + \lambda_n \underset{n}{M}; \; (\lambda M_i^k) = \lambda_1 \underset{1}{M}_i^k + \quad + \lambda_n \underset{n}{M}_i^k$$

$$\frac{\left(\lambda M_2^{\prime}\right)}{\left(\lambda M_1^{\prime}\right)} = \frac{\left(\lambda M_2^{2}\right)}{\left(\lambda M_1^{2}\right)} = \ldots = \frac{\left(\lambda M_2^{n}\right)}{\left(\lambda M_1^{n}\right)} = \mu \, ,$$

bedeuten, die charakteristische Gleichung n-ten Grades für u:

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{M}_2^{\prime} - \mu \underset{1}{M}_1^{\prime}, \ldots \underset{n}{M}_2^{\prime} - \mu \underset{n}{M}_1^{\prime} \\ \underset{1}{M}_2^{n} - \mu \underset{1}{M}_1^{n}, \ldots \underset{n}{M}_2^{n} - \mu \underset{n}{M}_1^{n} \end{vmatrix} = 0$$

auflösen, wobei jeder Wurzel μ_k die Gleichung:

$$(\lambda^k M) + \sum_i^k (\lambda^k M_i^k) \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 0 \; (k = 1\; 2, \ldots\; n)$$

für welche das Integral die Form (6) besitzt, entspricht [1].

Für ein System von n linearen Gleichungen (3) müssen $(m-2)\;(n-1)$ algebraische Bedingungen erfühllt werden.

Wird die Bedingung (4) nicht erfüllt und kommt dabei eine der Bedingungen

$$M_i^k \lesseqgtr 0$$

dann änderen sich für die Gleichung (1) entsprechend die Bedingungen (5) und das System (7) bekommt die Form:

$$M_i^k \frac{\partial z}{\partial z_1} = M_{i1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{\prime} \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{in}^{k1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_{k1}} = M_{i1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{k-1} \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kk-1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$- M_i^k \frac{\partial u}{\partial x_i} = M_1^k \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{i-1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} - M \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{i+1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_m^k \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_{k+1}} = M_{i1}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^{k+1} \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kk+} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kk+1} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$M_i^k \frac{\partial u}{\partial z_n} = M_{i1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_{ii-1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} + M_i^n \frac{\partial u}{\partial z_k} + M_{ii+1}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \ldots + M_{im}^{kn} \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

[1]) Hamburger. — Crelle Journ., Bd. 100, 1886, pp. 390—404.

Für eine lineare Gleichung (3) bleiben die Bedingungen der Proportionalität (8) so wie auch das System (7) ohne Änderung [1]).

Das System von $\mu n+\nu$ Gleichungen, vobei $1 \leqq \mu \leqq m-1$; $0 \leqq \nu \leqq n-1$, müssen noch die Bedingungen, die wir im nächsten Abschnitt anführen, erfüllen.

Für ein System von mn Gleichungen 1. Ordnung, das in Bezug auf alle Ableitungen gelöst ist, von der Gestalt

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = f_{ik}(x_1, \dots x_m; z_1, \dots z_n) \qquad (i = 1, \dots m;\ k = 1, \dots n)$$

bekommen wir die Bedingungen der Integrirbarkeit aus der Identität

$$\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_j \partial x_i} \quad (j = 1, \dots m) \dots$$

Mittelst der Mayer'schen Substitution der Variablen:

$$x_1 = x_1^{\circ} + y_1;\ x_l = x_l^{\circ} + y_1 y_{\circ} \qquad (l = 2,\ 3, \qquad m)$$

kann man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Gestalt:

$$\frac{dz_1}{dy_1} = F_1(y_1, y_2, \dots y_m; z_1, \dots z_n), \dots \frac{dz_n}{dy_1} = F_n(y_1, y_2, \dots y_m; z, \dots z_n)$$

integrieren [2]).

Im Hamburger'schen allgemeinen Integral $\varphi_1(u_1', u_2', \dots u_m') = 0$; $\varphi_2(u_1^2, u_2^2, \dots u_m^2) = 0$; für ein System der Gleichungen von der Form (1), (2), (3), muss ein jedes Paar der beliebigen Functionen φ wenigstens in einem ihrer Argumente u verschieden sein.

Für ein System von $\mu n+\nu$ Gleichungen, linearen oder nichtlinearen, hat das vollständige Integral die Form:

$$z_k = \Phi_k[x_1, \dots x_m;\ C_1,\ C_2, \dots C_{n(m-\mu+1)-\nu}] \quad (k = 1, \dots n)$$

wobei C_1, C_2,... beliebige Konstanten bedeuten.

Das allgemeine Integral eines Systemes von $\mu n+\nu$ Gleichungen bestimmt man mittelst des Theoremes von C. Bourlet — E. von Weber, auf Grund welches dasselbe $n-\nu$ beliebige Funktionen von $m-\mu$ Argumenten sovie ν beliebige Functionen von $m-\nu-1$ Argumenten haben muss [3]).

Die Variation der beliebigen Konstanten für der Über-

---

[1]) M. Куренський. Записки фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. II. в. 1, 1926; Труди фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. V, в. 3, 1927, ст. 119.

[2]) C. Bourlet: Annales de l'Ec. Norm., s. (3), t. 8, 1891; suppl., pp. 7—8.

[3]) E. von Weber: Mathem. Annalen, Bd. 49, 1897, s. 551.
C. Bourlet: Annales de l'Ec. Norm., (3) s., t. 8, 1891, suppl., p. 43.

gang vom vollständigen zum allgemeinen Integral behandeln die Untersuchungen von L. Königsberger und M. Kurenškyj [1]).

Für die Gleichungen ven Typus (1), (2), (3) kann man sich, wenn die Hamburger'schen algebraischen Bedingungen nicht genügen, der Integrationsmethode von M. Kurenškyj bedienen [2]), welche derselbe für zwei und drei Funktionen, wie auch für m unabhängige Variablen genau durchgeführt hat. Diese Methode geht in die Hamburger'sche über, wenn für die Koeffizienten die Hamburger'schen algebraischen Bedingungen durchgeführt werden.

Das Integrieren von nichtlinearen Gleichungen mit nur zwei unabhängigen Variablen erlernt man in den Arbeiten von Hamburger, Nasimoff, E. von Weber und Beudon [3]).

II. Das Integrieren der nichtlinearen Gleichungen 1. und 2. Ordnung beruht auf meinen Untersuchungen, welche ich eben in der Sammelschrift der math. natur. Sektion der Ševčenko — Gesellschaft publizieren.

Die Bedingungen dem Übereinstimmung eines Systemes von $\mu n+\nu$ Gleichungen 1. Ordnung

$$F_g\,(x_1, .\, x_m;\ z_1, \dots z_n;\ p_1', p_2', \dots p_m^n) = 0 \quad (g = 1, 2, \dots \mu n+\nu) \tag{9}$$

wobei
$$1 \leqq \mu \leqq m-1;\ 0 \leqq \nu \leqq n-1$$
$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}\,(i = 1, \dots m;\ k = 1, \dots n),$$

reduzieren sich zur Nullgleichheit der

$$(\varrho - \sigma + 1)(\tau - \sigma + 1)$$

Determinanten σ Ordnung einer Matrix mit ϱ Zeilen und τ Kolumnen, wo:

$$\sigma = (m-\mu)\ \nu\ +\ \tfrac{1}{2}\ \mu n\,(2m\ -\ \mu+1)\ +\ 1$$
$$\varrho = m\,(\mu n\ +\ \nu);\ \tau = \tfrac{1}{2}\ m\,(m\ +\ 1)\ n\ +\ 1,$$

von den Gestalt:

---

[1]) Z. Königsberger: Crelle Journ., Bd. 109.
М. Куренський: Труди фіз.-мат. Від. Укр. Ак. Наук, т. 5, в. 3, розд. VI, VII.

[2]) M. Kourensky: Proceedings of the London Math. Soc., vol. 27, 1927; § 3; Труди фіз. мат. Від. Укр. Ак. Наук, Т. 5. в. 3, розд. IX.

[3]) Hamburger: Crelle Journ., Bd. 81, 1875; Bd. 93. 1892. — П. С. Назимовъ: Объ интегрированіи нѣкоторыхъ классовъ уравненій, Москва, 1883. — E. von Weber: Crelle Journ., Bd. 118, 1897; J. Beudon: C. R. t. 125, 1897.

$$
\begin{array}{c|cccc|ccc|ccc|c}
\underset{1}{X_1} \vdots \underset{q}{X_1} & (1) & (2) & (3) & (m) & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\hline
\underset{1}{X_2} \vdots \underset{q}{X_2} & 0 & (1) & 0 & 0 & (2) & (3) & (m) & 0 & & 0 & 0 \\
\hline
\underset{1}{X_3} \vdots \underset{q}{X_3} & 0 & 0 & (1)\,. & 0 & 0 & (2) & 0 & (3)\,. & & (m) & 0 \\
\hline
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
\underset{1}{X_m} \vdots \underset{q}{X_m} & 0 & 0 & 0 & (1) & 0 & 0 & .\,(2) & 0 & & (3) & \ldots (m)
\end{array}
$$

vo: $q = \mu n + \nu$

$$
\left\| \begin{matrix} \underset{1}{P_i'} & \underset{1}{P_i^n} \\ & \\ \underset{q}{P_i'} & \underset{q}{P_i^n} \end{matrix} \right\| = (i)\,; \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ & . \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = 0;
$$

$$
\underset{g}{X_h} = \frac{\partial F_g}{\partial x_h} + \sum_{l=i}^{n} \frac{\partial F_g}{\partial z_l} p_h^l\,; \quad \underset{g}{P_i^k} = \frac{\partial F_g}{\partial p_i^k} (\lambda, i = 1, \ldots m; k = 1, \ldots n; g = 1,
$$

ınd zwar so, dass

$$
\sigma = mq - \left[\frac{q-\nu}{2n}(\nu + q - n) - 1\right]
$$

$$
\varrho = mq; \ \tau = \tfrac{1}{2}\, m\,(m + 1)\, n + 1.
$$

Um alle Bedingungen der Übereinstimmung des Systemes (9) zuschreiben, muss mann irgend eine von Null verschied Determinante $\triangle$ $(\sigma - 1)$ Ordnung der Matrix (10) wählen zur selben eine nach den anderen von den restierenden Zeilen und lumnen zuschreiben; die auf solche Weise zusammengesetzten Dete nanten von der Ordnung σ muss mann gleich Null setzen. Die Be gungen der Übereinstimmung 1. Kategorie sind solche, che in ihren Gliedern die Ableitungen von F_g nach allen Variablen x_m; $z_1, \ldots z_m$ nach einigen von p_i^k besitzen; die Bedingungen den Ü einstimmung 2. Kategorie haben die Ableitungen von F_g nur nacl Das System von Gleichungen, deren Anzahl der Anzahl der unbekan Funktionen $z_1, \ldots z_n$ entspricht, wenn dasselbe die Ableitungen p_i^k der schiedenen Unbekannten $z_1 \ldots z_n$ besitzt, wird immer: $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\sigma > \varrho$

Die Bedingung der Übereinstimmung 1. Kategorie wird nur eine sein, und zwar, wenn $\sigma = \varrho$ d. h. für

$$\mu n + 2 = \mu\,(\mu n + 2\nu).$$

Mann kann sich leicht überzeugen, dass es für ein System von 2 Gleichuugen mit einer Funktion z und für ein solches System, dass die Anzahl seiner Gleichungen um Einheit die Anzahl der Funktionen $z_1,..\, z_n$: $\mu = 1$, $\nu = 1$ übersteigt, sein wird.

Für diesen speziellen Fall, wenn wir ein System von 2 Gleichungen mit einer Funktion z

$$F_g\,(x_1,\dots x_m;\, z,\, p_1,\dots p_m) = 0 \qquad (g = 1,\, 2)$$

haben, reduziert sich die Bedingung der Übereinstimmung 1. Kategorie auf die Nullgleichheit der Poisson-Weiler'schen Klammern $[F_1, F_2] = 0$, und alle Bedingungen der Übereinstimmung zweiter Kategorie werden zu den Identitäten.

Für ein System von q Gleichungen 1. Ordnung mit einer Funktion z:

$$F_g\,(x_1,\dots x_m;\, z,\, p_1,\dots p_m) = 0 \qquad (g = 1,\, 2,\dots\, q)$$

kann mann die Bedingungen der Übereinstimmung für jedes Paar der Gleichungen besonders untersuchen, — dann werden wir bekannte Bedingungen $[F_h, F_l] = 0$ und $(F_h, F_l) = 0$, oder für Gesammtheit aller 3, 4... und q Gleichungen haben und dann bekommen wir neue, den Bedingungen der Nullgleichheiten der Poisson-Weiler'schen Klammern aequivalente Bedingungen; das wird die erste Verallgemeinirung der Poisson-Weiler'schen Klammern sein.

Für ein System von der Form

$$F_g\,(x_1,\dots x_m;\, z_1,\dots z_n;\, p_1^k,\quad p_m^k) = 0 \qquad (g = 1, 2)$$

wir die Bedingung der Übereinstimmung $\{F_1,\, F_2\} = 0$ sein, wobei

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F_1}{\partial p_i^k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial z_l}p_i^l\right) - \frac{\partial F_2}{\partial p_i^k}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial z_l}p_i^l\right)\right]$$

das gibt die zweite Verallgemeinerung der Poisson-Weiler'schen Gleichungen; spezielle Fälle für $n = 1$ werden:

$$[F_1,\, F_2] = 0; \qquad (F_1,\, F_2) = 0 \qquad \text{sein.}$$

Um ein System von n Gleichungen 1. Ordnung mit n unbekannten Funktionen

$$F_g\,(x_1,\dots x_m;\, z_1,\dots z_n;\, p_1',\, p_2',\dots p_m^n) = 0 \qquad (g = 1,\, 2,\dots\, n) \quad (13)$$

zu integrieren, nehmen wir die Gleichungen

$$\Phi\,(x_1,\dots x_m;\, z_1,\dots z_n;\, p_1',\, p_2',\dots p_m^n) = Const. \qquad \text{dazu.}$$

Wir bekommen eine Bedingung der Übereinstimmung der $(n+1)$ Gleichungen (13), (14) 1. Kategorie und $\frac{1}{2}\, m\, (m-1) - m + 1$ Bedingungen der Übereinstimmung 2 Kategorie. Alle diese Bedingungen der Übereinstimmung geben ein System von Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ, von der Form:

$$\Psi\left(x_1,\dots x_m;\, z_1,\dots z_n;\, p_1',\dots p_m^n;\, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\dots\frac{\partial\Phi}{\partial x_m};\, \frac{\partial\Phi}{\partial z_1},\dots\frac{\partial\Phi}{\partial z_r};\, \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'},\dots\frac{\partial\Phi}{\partial p_m^n}\right) = 0 \quad (15)$$

$$\Psi_h\left(x_1,\dots x_m;\, z_1,\dots z_n;\, p_1',\dots p_m^n;\, \frac{\partial\Phi}{\partial p_1'},\dots\frac{\partial\Phi}{\partial p_m^n}\right) = 0 \qquad [h = 1,\, 2,\dots \tfrac{1}{2}\, m\,(m-1) - m + 1]. \quad (16)$$

Aus $n\,(m-1)$ partikulären Integralen $\Phi_1 = C_1,\dots \Phi_{n\,(m-1)} = C_{n\,(m-1)}$ des Systems (15), (16), falls dasselbe ein übereinstimmendes System ist, solchen, dass dieselben mit dem gegebenen System (13) ein übereinstimmendes System von mn Gleichungen bestimmen, bekommen wir $p_1',\dots p_m^n$ als Funktionen von $x_1,\dots x_m;\, z_1\dots, z_n;\, C_1,\dots C_{n\,(m-1)}$ und finden mittelst der Quadraturen die Funktionen $z_1,\dots z_n$ aus den Abhängigkeiten:

$$dz_k = p_1^k\, dx_1 + \qquad + p_m^k\, dx_m \qquad (k = 1, \qquad n).$$

Bei der Integration eines übereinstimmenden Systems von $\mu n+\nu$ Gleichungen von der Gestalt (13), mit der gleichzeitigen Benützung der Gleichung (14), bekommen wir ein System der Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ; dieses System wird aus einigen Gleichungen (15) und einigen Gleichungen (16) bestehen.

Für den partiellen Fall einer einzigen unbekannten Funktion z haben wir die Jakobische Integrations-Methode. Für eine Gleichung (13) mit $n = 1$ bekommen wir nur eine Gleichung von der Form (15), für ein System von q Gleichungen (13) bekommen wir ein System der Gleichungen (15).

III. Um ein System von 2 Gleichungen 1. Ordnung mit zwei abhängigen Variablen z_1, z_2 und zwei unabhängigen x_1, x_2:

$$F_g\,(x_1,\, x_2;\, z_1,\, z_2;\, p_1',\, p_2';\, p_1^2,\, p_2^2) = 0 \qquad (g = 1, 2), \qquad (17)$$

wo

$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}\ (i,\, k = 1,\, 2),$$

zu integrieren, adiungieren wir zum System (17) die Gleichung von der Gestalt:

$$\Phi\,(x_1, x_2;\, z_1,\, z_2;\, p_1',\, p_2';\, p_1^2,\, p_2^2) = Const.$$

Wenn wir die Bezeichnungen:

$$\underset{g}{X_h} = \frac{\partial F_g}{\partial x_h} + \frac{\partial F_g}{\partial z_1}p_h' + \frac{\partial F_g}{\partial z_2}p_h^2\,;\ \ \underset{3}{X_h} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_h} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p_h' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p_h^2$$

$$\underset{g}{P_h^k} = \frac{\partial F_g}{\partial p_h^k};\ \ \underset{3}{P_h^k} = \frac{\partial\Phi}{\partial p_h^k}\ (h,\, g,\, k = 1,\, 2),$$

einführen, bekommen wir die Bedingungen der Übereinstimmung in der Form der Nullgleichheit von 2 Determinanten 6. Ordnung der Matrix

$$\begin{Vmatrix} {}_{3}X_{1} & {}_{3}P^{2}_{2} & {}_{3}P'_{2} & {}_{3}P'_{1} & {}_{3}P^{2}_{1} & O & O \\ {}_{1}X_{1} & {}_{1}P^{2}_{2} & {}_{1}P'_{2} & {}_{1}P'_{1} & {}_{1}P^{2}_{1} & O & O \\ {}_{2}X_{1} & {}_{2}P^{2}_{2} & {}_{2}P'_{2} & {}_{2}P'_{1} & {}_{2}P^{2}_{1} & O & O \\ {}_{1}X_{2} & {}_{1}P^{2}_{1} & {}_{1}P'_{1} & O & O & {}_{1}P'_{2} & {}_{1}P^{2}_{2} \\ {}_{2}X_{2} & {}_{2}P^{2}_{1} & {}_{2}P'_{1} & O & O & {}_{2}P'_{2} & {}_{2}P^{2}_{2} \\ {}_{3}X_{2} & {}_{3}P^{2}_{1} & {}_{3}P'_{1} & O & O & {}_{3}P'_{2} & {}_{3}P^{2}_{2} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

indem wir zu der von Null verschiedenen Determinante 5. Ordnung $\triangle$ der Matrix eine nach der anderen von den Zeilen und Kolumnen zuschreiben.

Die Aufgabe der Integration der Gleichung (17) reduziert sich zum Bestimmen von zwei mit den Gleichungen (17) übereinstimmenden partikulären Integralen $\Phi_1 = C_1$; $\Phi_2 = C_2$ einer linearen Gleichung erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ, wenn die Gleichungen (17) keine einzige Ableitung p_i^k enthalten.

Hat (17) nur eine Ableitung p_i^k, dann gibt die Elimination derselben $f(x_1, x_2; z_1, z_2) = O$; wenn wir von da z_2 finden und in (17) einsetzen, bekommen wir eine Gleichung 1. Ordnung mit einer einzigen Funktion z_1.

Hat (17) nur zwei Ableitungen von p_i^k, dann bekommen wir bei den Bezeichnungen:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_i^k, p_j^l}\right) = D_{ij}^{kl};\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_i^k, x_j}\right) = D_{ij}^{ko}\ (i, j;\ k,\ l = 1,\ 2)$$

folgende Fälle:

1) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_1^2}\right) \neq O$ muss man partikuläre Integrale, die wenigstens eine Variable p'_2, oder p_2^2 haben, aus der Gleichung

$$D_{11}^{'2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p_1^2\right) + D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D_{12}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + D_{11}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} = O$$

suchen;

2) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2^2, p'_2}\right) \neq O$ partikuläre Integrale, die wenigstens p'_1 oder p_1^2 haben, aus der Gleichung

$$D_{22}^{12}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p_2^2\right) + D_{12}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + D_{21}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} = O$$

3) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p_2^2}\right) \neq O$ kann man partikuläre Integrale von einem

der zwei Systeme

$$D^{2'}_{21}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_1\right)+D^{02}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}+D^{02}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+D^{'0}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}=0,$$

bei $\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}=0$, oder

$$D^{2'}_{21}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_1\right)+D^{02}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}+D^{10}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}+D^{10}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}=0,$$

bei $\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}=0$ suchen;

4) Für $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2,\ p^2_1}\right)\gtrless 0$ kann man partikuläre Integrale von irgend einem der zwei Systeme

$$D^{2'}_{12}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_1\right)+D^{02}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+D^{'0}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}+D^{'0}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0,$$

bei $\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}\gtrless 0$, oder

$$D^{2'}_{12}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_2\right)+D^{02}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}+D^{02}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+D^{'0}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}=0;\frac{\partial\Phi}{\partial p^2}=0,$$

bei $\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0$ suchen;

5) Für $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_1,\ p'_2}\right)=0$ ist die Bedingung der Übereinstimmung folgend: $\{F_1,\ F_2\}=0$; die Elimination vom System (17) der Funktion z_2 führt zum Integrieren der Gleichung 1. Ordnung mit einer Funktion z_1: $f\ (x_1,\ x_2,\ z_1,\ p'_1,\ p'_2)=0$.

6) Für $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p^2_1,\ p^2_2}\right)\lessgtr 0$ bekommt man den Fall 5), wenn wir den oberen Index 1 mit 2 vertauschen.

Hat (17) nur drei Ableitungen von allen p^k_i, dann haben wir folgende Fälle:

1) Für $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2,\ p^2_1}\right)\lessgtr 0$, oder $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2,\ p^2_2}\right)\gtrless 0$, wie auch $D^{22}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+D^{2'}_{2}\frac{\partial\Phi}{\partial p^1_2}+D^{'2}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}\gtrless 0$, findet man die Funktion Φ aus:

$$D^{2'}_{12}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_1+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_1\right)+D^{2'}_{22}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}p'_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z_2}p^2_2\right)+\left(D^{02}_{11}+D^{02}_{22}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}$$

$$+\ D^{'0}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1}+D^{'0}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0;$$ die Elimination der Variab-

len p'_2 aus den Gleichungen $F_1 = O$, $F_2 = O$, $\Phi = Const.$ führt zum Fall 6).

2. Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p^2_2}\right) \lessgtr O$ oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p^2_1}\right) \gtrless O$, wie auch $D^{22}_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{2'}_{21}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1} + D^{'2}_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2} \lessgtr O$ haben wir für Φ:

$$D^{2'}_{11}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p^2_1\right) + D^{2'}_{21}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p^2_2\right) +$$
$$\left(D^{02}_{11} + D^{02}_{22}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{'0}_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1} + D^{'0}_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2} = O;\ \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = O;$$

3) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p^2_2}\right) \lessgtr O$, oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p^2_2}\right) \lessgtr O$, wie auch $D^{'2}_{22}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{21}_{21}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + D^{''}_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2} \lessgtr O$ haben wir für Φ:

$$D^{'2}_{12}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p'_2\right) + D^{12}_{22}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p^2_2\right)$$
$$+ D^{20}_{21}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{20}_{22}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + \left(D^{0}_{11} + D^{1}_{22}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2} = O;\ \frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1} = O;$$

4) Für $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_1, p^2_1}\right) \gtrless O$, oder $D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p^2_1}\right) \gtrless O$, wie auch $D^{'2}_{21}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{'1}_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + D^{'}_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1} \gtrless O$ ist für Φ:

$$D^{'2}_{11}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p^2_1\right) + D^{2}_{21}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}p'_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}p^2_2\right)$$
$$+ D^{'0}_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + D^{20}_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + \left(D^{0'}_{22} + D^{0'}_{11}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1} = O;\ \frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2} = O.$$

IV. Um die allgemeine Gestalt des Systems von zwei Gleichungen erster Ordnung (17) zu integrieren, wenn wir eine von Null verschiedene Determinante $\triangle$ 5. Ordnung, z. B. von 5 letzten Zeilen und Kolumnen der Matrix (18) nehmen, hat man die Beschränkungen:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_2, p^2_1}\right) \gtrless O;\qquad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p'_2, p^2_2}\right) \gtrless O; \tag{19}$$

bei welchen wir ein folgendes System der nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der unbekannten Funktion Φ:

$$\begin{cases} D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p^2_2, x_2}\right)D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p^2_1, \underline{p'_2}}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p^2_1, x_1}\right)D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p^2_2, \underline{p'_1}}\right) \\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p^2_2, x_2}\right)D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p^2_1, \underline{p^2_2}}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p^2_1, x_2}\right)D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p^2_2, \underline{p^2_1}}\right) \end{cases}$$

bekommen; dieser System behält seine Bedeutung auch bei folgenden zwei Beschränkungen statt (19):

$$1)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2,\ p^2_2}\right) \lesseqgtr 0;\quad 2)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{p'_1, p'_2, p^2_1}\right) \lesseqgtr 0.$$

Die Aufgabe das System (17) zu integrieren reduziert sich auf die Aufgabe zwei mit (17) übereinstimmende partikuläre Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ des Systems der Gleichungen 1. Ordnung (20) mit einer unbekannten Funktion Φ zu finden.

Das Integrieren des Systems (20) reduziert sich zur Integration einer von folgenden Systemen von linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer Funktion Φ: (I)

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 D^{\prime 2}_{11}\frac{d\Phi}{dx_1} + D^{\prime 1}_{22}\frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_1 D^{20}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D^{02}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \lambda_1 D^{0\prime}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + D^{0\prime}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0\\
&\left(\lambda_1 D^{2\prime}_{12} + D^{21}_{12}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + \left(\lambda_1 D^{\prime 2}_{11} + D^{12}_{12}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \lambda_1 D^{\prime\prime}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + D^{\prime\prime}_{21}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_2 D^{\prime 2}_{11}\frac{d\Phi}{dx_1} + D^{2\prime}_{22}\frac{d\phi}{dx_2} + \lambda_2 D^{20}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D^{02}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \lambda_2 D^{\prime 1}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + D^{\prime 0}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0\\
&\lambda_2 D^{22}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D^{22}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \left(\lambda_2 D^{2\prime}_{21} + D^{2\prime}_{22}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + \left(\lambda_2 D^{\prime 2}_{11} + D^{\prime 2}_{21}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

wenn

$$1)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p^2_1, p^2_2}\right) \lesseqgtr 0;\quad 2)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_1, p^2_2}\right) \gtrless 0;\quad 3)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2, p'_1}\right) \lesseqgtr 0,$$

wo λ_1, λ_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichnng

$$D^{\prime 2}_{11}\lambda^2 + \left(D^{\prime 2}_{21} + D^{\prime 2}_{12}\right)\lambda + D^{\prime 2}_{12} = 0, \tag{21}$$

bedeuten; wenn

$$1)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2, p^2_2}\right) \gtrless 0;\quad 2)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_1, p^2_2}\right) \lesseqgtr 0;\quad 3)\; D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_2, p'_1}\right) = 0,$$

dann ist: (III)

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_3 D^{\prime 2}_{11}\frac{d\Phi}{dx_1} + D^{2\prime}_{21}\frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_3 D^{20}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D^{02}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \lambda_3 D^{0\prime}_{11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + D^{\prime 0}_{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0\\
&\lambda_3 D^{22}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + D^{22}_{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + \left(\lambda_3 D^{2\prime}_{21} + D^{2\prime}_{22}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_1} + \left(\lambda_3 D^{\prime 2}_{11} + D^{\prime 2}_{21}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\lambda_3 = \frac{D^{\prime 2}_{21}}{D^{2\prime}_{12}} = \frac{D^{2\prime}_{21}}{D^{\prime 2}_{11}}$$

wenn

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right)=0;\ 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1',\ p_2^2}\right)\gtrless 0;\ 3)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2',\ p_1'}\right)\gtrless 0,$$

dann ist (IV)

$$\left.\begin{aligned}\lambda_4 D_{11}^{'2}\frac{d\Phi}{dx_1}+D_{22}^{2'}\frac{d\Phi}{dx_2}+\lambda_4 D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}+\lambda_4 D_{11}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}+D_{22}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2}&=0\\ \left(\lambda_4 D_{12}^{2'}+D_{22}^{2'}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+\left(\lambda_4 D_{12}^{'2}+D_{12}^{'2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}+\lambda_4 D_{21}^{''}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}+D_{21}^{''}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2}&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\lambda_4=\frac{D_{22}^{'2}}{D_{21}^{'2}}=\frac{D_{12}^{'2}}{D_{11}^{'2}}$$

wenn

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right)=0;\ 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1',\ p_2^2}\right)\lesseqgtr 0;\ 3)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2',\ p_1'}\right)=0;\ D_{21}^{2'}\lesseqgtr D_{12}^{2'}$$

dann ist:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_3 D_{11}^{'2}\frac{d\Phi}{dx_1}+D_{22}^{2'}\frac{d\Phi}{dx_2}+\lambda_3 D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}+\lambda_3 D_{11}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}+D_{22}^{00}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2}&=0\\ D_{22}^{'2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}+D_{11}^{2'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2}&=0\end{aligned}\right\}(V)$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_4 D_{11}^{'2}\frac{d\Phi}{dx_1}+D_{22}^{2'}\frac{d\Phi}{dx_2}+\lambda_4 D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}+\lambda_4 D_{11}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}+D_{22}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2}&=0\\ D_{22}^{'2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1'}+D_{21}^{2'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}&=0\end{aligned}\right\}(VI)$$

wenn

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right)=0;\ 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1',\ p_2^2}\right)\lesseqgtr 0;\ 3)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2',\ p_1'}\right)=0;\ D_{21}^{2'}=D_{12}^{2'}$$

dann haben wir zum Bestimmen von Φ nur eine Gleichung (V) oder eine Gleichung (VI); wenn

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right)\gtrless 0;\ 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1',\ p_2^2}\right)=0;\ 3)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2',\ p_1'}\right)\gtrless 0,$$

dann sind in der Gleichung (21) die Koeffizienten von $\lambda\ D_{21}^{'2}$, in der 2. Gleichung des Systems (I) ist der Koeffizient bei der Ableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial p_2'}$ $\lambda_1 D_{11}^{'2}$ und in der 2. Gleichung des Systems (II) ist der Koeffizient bei $\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2}$ $D_{22}^{2'}$; wenn

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right)\lesseqgtr 0;\ 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1',\ p_2^2}\right)=0;\ 3)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2',\ p_1'}\right)=0,$$

dann ist $D_{22}^{'2} = 0$, und wir haben ein System von zwei gleichwertigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{'}} + D_{22}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{12}^{22}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{'}} + D_{21}^{12}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{VII}$$

und ein System

$$\left.\begin{aligned} \lambda_5 D_{11}^{'2}\frac{d\Phi}{dx_1} + \lambda_5 D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{'}} + D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{'}} + \lambda_5 D_{11}^{0'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{12}^{2'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{'}} + D_{11}^{2'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{'}} &= 0 \end{aligned}\right\}; \tag{VIII}$$

$$\lambda_5 = \frac{D_{12}^{2'}}{D_{11}^{'2}};$$

wenn

1) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2^{'},\ p_2^2}\right) = 0$; 2) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^{'},\ p_2^2}\right) = 0$; 3) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^{'},\ p_2^{'}}\right) \gtrless 0$,

dann ist $D_{11}^{'2} = 0$, und

$$\left.\begin{aligned} D_{22}^{2'}\frac{d\Phi}{dx_2} + \lambda_6 D_{11}^{20}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^{'}} + D_{22}^{02}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^{'}} + \lambda_6 D_{11}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2} + D_{22}^{'0}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \\ D_{22}^{2'}\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^2} + D_{21}^{'2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_2^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{IX}$$

$$\lambda_6 = \frac{D_{22}^{'2}}{D_{12}^{2'}};$$

wenn

1) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^2,\ p_2^2}\right) = 0$; 2) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_1^{'},\ p_2^2}\right) = 0$; 3) $D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_2^{'},\ p_1^{'}}\right) = 0$,

dann ist $D_{11}^{2'} = 0$, $D_{23}^{'2} = 0$, $D_{21}^{'2} = 0$; die Funktionen F_1 und F_2 sind von den Ableitungen p_i^k abhängig; die Elimination der Ableitung p_i^k aus zwei Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ führt zur Relation

$$f\,(x_1,\ x_2;\ z_1,\ z_2) = 0. \tag{X}$$

V. Die Bedingungen der Übereinstimmung des Systemes der Gleichungen 2. Ordnung mit mehreren Funktionen: (22)

$$F_q\,(x_1,\dots x_n;\ z_1,\dots z_n;\ p_1^{'},\ p_2^{'},\dots p_m^n;\ p_{11}^{'},\ p_{12}^{'},\dots p_{mm}^n) = 0 \quad (q = 1, 2,\dots \mathrm{M}n + \nu)$$

wo

$$1 \leqq M \leqq \tfrac{1}{2} m (m + 1) - 1; \qquad o \leqq \nu \leqq n - 1$$

$$p_i^k = \frac{\partial z_k}{\partial x_i}; \quad p_{ij}^k = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots m; \; k = 1, \ldots n),$$

bekommen wir, indem wir neue Funktionen z auf Grund der Formeln:

$$p_i^k = z_{n + (k - 1) m + i}$$

einführen, auf Grund der Regeln des § 2; das System (1) übergeht dann in des System der Gleichungen 1. Ordnung. Die Bedingungen der Übereinstimmung bekommt man auf andere Weise; wenn wir die Zahl M in der Form·

$$M = m + (m - 1) + (m - 2) + \ldots + [m - (i - 1)] + k$$

$$(i = o, 1, \ldots m - 1; \; k = 1, 2, \ldots m)$$

schreiben, wobei, wenn $i = 0$, auch $M = k = 1, 2, \ldots$ und wenn $i = 1$, dann $M = m + k = m + 1, m + 2, \ldots$, ist, und wenn wir gleich Null $(R - S + 1)(T - S + 1)$ Determinanten Grades S von den Elementen der Matrix mit den R Zeilen und T Kolumnen setzen, welche aus den Koeffizienten bei den Ableitungen 2. Ordnung und freien Gliedern der linearen Gleichungen, die wir aus den Gleichungen (22) durch die Differentiation mit $x_1, x_2 \ldots x_n$ bekommen, besteht

$$S = \left[\frac{m (m + 1)(m + 2) - (m - i - 1)(m - i)(m - i + 1)}{1 \; 2 \; 3} - \right.$$

$$\left. - \frac{(m - i - k)(m - i - k + 1)}{1 \; 2} \right] n + (m - i - k) \nu + 1$$

$$R = m (Mn + \nu); \qquad T = \tfrac{1}{6} m (m + 1)(m + 2) n + 1.$$

Um alle Bedingungen der Übereinstimmung des Systems (22) aufzuschreiben, muss man irgend welche von Null verschiedene Determinante $\triangle$ von der Ordnung $S - 1$ der obigen Matrix wählen und zur selben eine nach der anderen von übrigen Zeilen und Kolumnen zuschreiben; alle solche Determinanten von der Ordnung S muss man gleich Null setzen.

Einen speziellen Fall dieser Bedingungen der Übereinstimmung bilden die Darboux-schen Bedingungen der Übereinstimmung für zwei Gleichungen zweiter Ordnung mit einer unbekannten Funktion z von der Gestalt

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0; \qquad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Die Matrix ist dann folgende:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial z} & O \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & O \\ \frac{dF}{dy} & O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{matrix} \right\|, \tag{23}$$

wobei

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s\,; \quad \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t\,; \dots$$

wählen wir eine von Null verschiedene Determinante dritter Ordnung $\frac{\partial F}{\partial z} D\left(\frac{F, \Phi}{r, s}\right)$, dann bekommen wir bekannte Bedingungen[1]):

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dF}{dx} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{dF}{dy} & O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \frac{d\Phi}{dy} & O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{matrix} \right\| = O\,; \quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} & O \\ O & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & O \\ O & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{matrix} \right\| = O. \tag{24}$$

Um das System der Gleichungen 2. Ordnung

$$F_k(x_1, \dots x_m; z_1, \dots z_n; p'_1, \dots p^n_m; p'_{11}, p'_{12}, \dots p^n_{mm}) = O \quad (k = 1, 2, \dots n) \tag{25}$$

zu integrieren, adiungieren wir zum System (23) die Gleichungen von der Gestalt

$$\Phi\ (x_1, \dots x_m;\ z_1, \dots z_n;\ p'_1, \dots p^n_m;\ p'_{11}, p'_{12}, \dots p^n_{mm}) = Const. \tag{26}$$

und trachten, dass das System der Gleichungen (23), (24) übereinstimmend sei. Dann haben wir

$$S = m\,(n + 1); \quad R = m\,(n + 1); \quad T = \tfrac{1}{6} m\,(m + 1)(m + 2)\,n + 1.$$

Dadurch bekommen wir ein System von $(T - S + 1)$ Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ und mit mehreren unabhängigen Variablen x_i, z_k, p^k_i, p^k_{ij}. Indem wir p partikuläre Integrale $\Phi_1 = C_1, \dots \Phi_p = C_p$, wo $p = \frac{1}{2}[m\,(m + 1) - 2]\,n$, solche, dass dieselben mit dem Systeme der n Gleichungen (23) übereinstimmen, durch die Quadraturen bestimmen, bekommen wir $z_1, \dots z_k$ aus den Relationen

$$dp^k_i = p^k_{i1}\,dx_1 + \dots + p^k_{im}\,dx_m; \quad dz_k = p^k_i\,dx_1 + \dots + p^k_m\,dx_m.$$

---

[1]) A. R. Forsyth: Theory of differ. equations, vol. VI, p. 317.

Für ein System von q Gleichungen von der Form (23), wo $n < l < \frac{1}{2}\, m\, (m + 1)\, n$, muss man zuerst die Übereinstimmung des Systemes von q Gleichungen untersuchen und dann die Gleichungen (24) adiungieren.

Die Integrationsmethode von Darboux, nach der Vorlesung von Forsyth[1], der Gleichung $F(x\, y, z, p, q, r, s, t) = O$ bildet einen speziellen Fall der allgemeinen Methode der Integration des Systemes (25).

Das System der Hilfsgleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ reduziert sich auf dasselbe System von 2 linearen Gleichungen; man muss eine von den drei folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d\Phi}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{d\Phi}{dy} + \left(\lambda\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{dF}{dy}\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0 \; * \qquad (27)$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d\Phi}{dx} \quad + \quad \frac{\partial F}{\partial t}\frac{d\Phi}{dy} \quad - \lambda\frac{dF}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad * - \frac{dF}{dy}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

$$\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{d\Phi}{dx} \quad + \lambda\frac{\partial F}{\partial t}\frac{d\Phi}{dy} \quad * \; - \lambda\frac{dF}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \left(\frac{dF}{dx} - \lambda\frac{dF}{dy}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

wie auch eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial t}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \left(\frac{\partial F}{\partial s} - \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} - \lambda\frac{\partial F}{\partial s}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z}\;\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \qquad (28)$$

wo λ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z}\,\lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\,\lambda + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ ist, nehmen.}$$

Ein System von zwei solchen linearen Gleichungen vertrit das unbequeme Forsyth'sche System

$$\frac{d\Phi}{dx} + \lambda\frac{d\Phi}{dy} - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \lambda\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

$$\lambda^2\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0,$$

welches bei den Beschränkungen 1) $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$; 2) $D\left(\frac{F_1\;\Phi}{r,\, s}\right) \neq 0$; 3) $\lambda \neq 0$ behilflich ist.

Ein System von zwei linearen Gleichungen — einer von (27) und einer von (28) — ist dann ausreichend, wenn **wenigstens** eine von

[1] A. R. Forsyth: Theory of differ. equations, vol. VI, p. 314.

den 40 Determinanten $\triangle^{r}_{pq}$ der 3. Ordnung der Matrix (23) von Null verschieden ist; wir bekommen $\triangle^{r}_{pq}$ dann, wenn wir in der Matrix (23) r-te Zeile und p-te und q-te Kolumne durchstreichen. Die Forsyth'sche Beschränkungen (29) übergehen in irgend eine oder zwei von den Beschränkungen folgender Tabelle:

1. $\triangle^{2}_{12},\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] \gtrless 0$

2. $\triangle^{4}_{1},\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right] - \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \gtrless 0$

3. $\triangle^{2}_{23},\ \dfrac{d\Phi}{dy}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left(\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right) + \left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial s} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] \lessgtr 0$

4. $\triangle^{4}_{25},\ \dfrac{d\Phi}{dx}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] - \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial s} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \right.$
$\left. - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right] \gtrless 0$

5. $\triangle^{2}_{21},\ \dfrac{d\Phi}{dy}\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right) - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left(\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right] \lessgtr 0$

6. $\triangle^{4}_{35},\ \dfrac{d\Phi}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right) - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial s} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] - \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \lessgtr 0$

7. $\triangle^{2}_{25},\ \dfrac{d\Phi}{dy}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial s}\right)^2 - \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial s} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial t}\right] + \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \right.$
$\left. - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right) \gtrless 0$

8. $\triangle^{4}_{15},\ \dfrac{d\Phi}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\left[\dfrac{dF}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial s}\right] - \dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\left(\dfrac{dF}{dy}\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) \gtrless 0$

9. $\triangle^{2}_{15},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \lessgtr 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{z, s}\right) \lessgtr 0;$ 10. $\triangle^{2}_{13},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{s, t}\right) \lessgtr 0$

11. $\triangle^{2}_{14},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \lessgtr 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{z, t}\right) \gtrless 0;$ 12. $\triangle^{4}_{12},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \lessgtr 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{s, t}\right) \lessgtr 0$

13. $\triangle^{4}_{13},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{z, t}\right) \gtrless 0;$ 14. $\triangle^{4}_{14},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \lessgtr 0;\ D\left(\dfrac{F, \Phi}{z, s}\right) \lessgtr 0$

15. $\triangle^{2}_{45},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{y, z}\right] \gtrless 0;$ 16. $\triangle^{2}_{35},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \lessgtr 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{y, s}\right] \gtrless 0$

17. $\triangle^{2}_{34},\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \lessgtr 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{y, t}\right] \gtrless 0;$ 18. $\triangle^{4}_{34},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{x, z}\right] \gtrless 0$

19. $\triangle^{4}_{24},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \lessgtr 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{x, s}\right] \gtrless 0;$ 20. $\triangle^{4}_{23},\ \dfrac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0;\ D\left[\dfrac{F, \Phi}{x, t}\right] \lessgtr 0.$

20 andere Kombinationen der Beschränkungen bekommen wir aus den obigen durch Vertauschung von F und Φ und umgekehrt.

VI. Für das Integrieren eines Systemes von Gleichungen 2. Ordnung mit 2 abhängigen und 2 unabhängigen:

$$\left\{\begin{array}{l} F_1\,(x_1,\ x_2;\ z_1,\ z_2;\ p'_1,\ p'_2,\ p^2_1,\ p^2_2;\ p'_1,\ p'_{12},\ p'_{22},\ p^2_{11},\ p^2_{12},\ p^2_{22}) = 0 \\ F_2\,(x_1,\ x_2;\ z_1,\ z_2;\ p'_1,\ p'_2,\ p^2_1,\ p^2_2;\ p'_{11},\ p'_{12},\ p'_{22},\ p^2_{11},\ p^2_{12},\ p^2_{22}) = 0 \end{array}\right. \tag{30}$$

mit dem Adiungieren zum System (30) der Gleichung: (31)

$$\Phi\ (x_1,\ x_2;\ z_1,\ z_2;\ p'_1,\ p'_2,\ p^2_1,\ p^2_2;\ p'_{11},\ p'_{12},\ p'_{22},\ p^2_{11},\ p^2_{12},\ p^2_{22}) = Const.,$$

und auf Grund von Bezeichnungen:

$$\frac{dF_g}{dx_i} = \underset{g}{X_i} = \frac{\partial F_g}{\partial x_i} + \frac{\partial F_g}{\partial z_1}\,p'_i + \frac{\partial F_g}{\partial z_2}\,p^2_i + \frac{\partial F_g}{\partial p'_1}\,p'_{1i} + \frac{\partial F_g}{\partial p^2_1}\,p^2_{1i} + \frac{\partial F_g}{\partial p'_2}\,p'_{2i} +$$

$$+ \frac{\partial F_g}{\partial p^2_2}\,p^2_{2i}\,;\quad \underset{g}{P}{}^k_{ij} = \frac{\partial F_g}{p^k_{ij}}\quad (g,\ i,\ k = 1,\ 2)$$

$$\frac{d\Phi}{dx_i} = \underset{3}{X_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\,p'_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}\,p^2_i + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}\,p'_{1i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p^2_1}\,p^2_{1i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}\,p'_{2i} +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial p^2_2}\,p^2_{2i}\,;\quad \underset{3}{P}{}^k_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial p^k_{ij}},$$

bekommen wir 4 Bedingungen der Uebereinstimmung, indem wir entsprechende Determinanten 6. Ordnung der Matrix

$$\left\|\begin{array}{c|ccccc|ccc} \underset{3}{X_1} & \underset{3}{P}{}'_{11} & \underset{3}{P}{}'_{12} & \underset{3}{P}{}'_{22} & O & \underset{3}{P}{}^2_{11} & O & \underset{3}{P}{}^2_{12} & \underset{3}{P}{}^2_{22} \\ \hline \underset{1}{X_1} & \underset{1}{P}{}'_{11} & \underset{1}{P}{}'_{12} & \underset{1}{P}{}'_{22} & O & \underset{1}{P}{}^2_{11} & O & \underset{1}{P}{}^2_{12} & \underset{1}{P}{}^2_{22} \\ \underset{2}{X_1} & \underset{2}{P}{}'_{11} & \underset{2}{P}{}'_{12} & \underset{2}{P}{}'_{22} & O & \underset{2}{P}{}^2_{11} & O & \underset{2}{P}{}^2_{12} & \underset{2}{P}{}^2_{22} \\ \underset{1}{X_2} & O & \underset{1}{P}{}'_{11} & \underset{1}{P}{}'_{12} & \underset{1}{P}{}'_{22} & O & \underset{1}{P}{}^2_{22} & \underset{1}{P}{}^2_{11} & \underset{1}{P}{}^2_{12} \\ \underset{2}{X_2} & O & \underset{2}{P}{}'_{11} & \underset{2}{P}{}'_{12} & \underset{2}{P}{}'_{22} & O & \underset{2}{P}{}^2_{22} & \underset{2}{P}{}^2_{11} & \underset{2}{P}{}^2_{12} \\ \underset{3}{X_2} & O & \underset{3}{P}{}'_{11} & \underset{3}{P}{}'_{12} & \underset{3}{P}{}'_{22} & O & \underset{3}{P}{}^2_{22} & \underset{3}{P}{}^2_{11} & \underset{3}{P}{}^2_{12} \end{array}\right\| \tag{32}$$

gleich Null setzen.

Das Nichtverschwinden der Determinante 5. Ordnung $\triangle$, die in der Matrix (32) umstrichen ist, gibt die Beschränkungen:

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p'_{11},\ p^2_{11}}\right) \lesseqgtr 0;\quad 2)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2,\ \Phi}{p'_{11},\ p'_{12},\ p'_{22}}\right) \gtrless 0.$$

Die Bedingungen der Uebereinstimmung der Systeme (30), (31) geben folgendes System von 4 nichtlinearen Gleichungen zum Bestimmen von Φ:

$$
\begin{aligned}
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{22}}\right) \underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right)} = \underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{22}}\right)}} D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) \\
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) \underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right)} = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right) \underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right)}} - \qquad (33) \\
&\qquad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, p^2_{12}}\right) \underline{\underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}}\right)}}} \\
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, p^2_{12}}\right) \underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right)} = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{12}}\right) \underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right)}} - \\
&\qquad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, p^2_{22}}\right) \underline{\underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}}\right)}}} \\
&D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{12}, p'_{22}, x_2}\right) \underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p^2_{11}}\right)} = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, x_2}\right) \underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{22}, p^2_{11}}\right)}} - \\
&\qquad - D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p^2_{11}, x_1}\right) \underline{\underline{\underline{D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_{11}, p'_{12}, p'_{22}}\right)}}}
\end{aligned}
$$

Mann muss 4 partikuläre mit dem System der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ übereinstimmende Integrale des Systemes (33), $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_4 = C_4$ finden; durch Berechnung von den 6 Gleichungen der Ableitungen p_{ij} bekommen wir z_1, z_2 aus der Formel:

$$dp^k_i = p^k_{i1}\, dx_1 + p^k_{i2}\, dx_2; \qquad dz_k = p^k_1\, dx_2 + p^k_2\, dx_2 \qquad (i, k = 1.\ 2).$$

Auf Grund von Bezeichnungen

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p^k_{i_1 i_2}, p^l_{j_1 j_2}}\right) = D^{kl}_{i_1 i_2 j_1 j_2}; \quad D\left(\frac{F_1, F_2}{p^k_{i_1 i_2}, x_j}\right) = D^{k0}_{i_1 i_2 j}$$

$$(i_1, i_2; j_1, j_2, j, k, l = 1, 2),$$

und Identitäten:

$$D^{\prime\prime}_{11\,12} D^{2\prime}_{11\,22} + D^{2\prime}_{11\,11} D^{\prime\prime}_{12\,22} + D^{2\prime}_{11\,12} D^{\prime\prime}_{22\,11} = 0$$

$$D^{2\prime}_{22\,11} D^{\prime\prime}_{22\,12} + D^{\prime 2}_{12\,22} D^{\prime\prime}_{22\,11} + D^{2\prime}_{22\,12} D^{\prime\prime}_{12\,11} = 0$$

reduziert sich das Integrieren des Systemes (33) im Falle:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p'_{22}, p^2_{22}}\right) \gtrless 0,$$

auf das Integrieren des Systemes von 5 linearen Gleichungen:

$$D^{\prime\prime}_{12\,22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{11}}+D^{\prime\prime}_{22\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{12}}+D^{\prime\prime}_{11\,12}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{22}}=O \tag{34}$$

$$\left(D^{\prime 2}_{12\,11}+\lambda D^{2\prime}_{11\,21}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{11}}+D^{2\prime}_{11\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{12}}+\lambda D^{\prime 2}_{11\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{22}}+\left(D^{\prime\prime}_{11\,12}+\lambda D^{\prime\prime}_{22\,11}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{11}}$$
$$=O$$

$$\left(D^{2\prime}_{22\,11}+\mu D^{22}_{12\,11}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{11}}+\lambda D^{2\prime}_{11\,22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{12}}+\left(D^{2\prime}_{11\,11}+\lambda D^{2\prime}_{12\,11}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{22}}+\mu D^{\prime 2}_{11\,12}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{11}}$$
$$+\mu D^{2\prime}_{11\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{12}}=O$$

$$\left(D^{\prime 2}_{22\,12}+\mu D^{22}_{22\,11}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{11}}+\lambda D^{2\prime}_{12\,22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{12}}+\left(D^{2\prime}_{12\,11}+\lambda D^{\prime 2}_{12\,12}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{22}}+\mu D^{\prime 2}_{11\,22}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{11}}$$
$$+\mu D^{2\prime}_{11\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{22}}=O$$

$$\left(D^{\prime 0}_{22\,2}+\mu D^{02}_{1\,11}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{11}}+\lambda D^{0\prime}_{2\,22}\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{12}}+\left(D^{0\prime}_{2\,11}+\lambda D^{0\prime}_{1\,22}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_{22}}+\mu D^{\prime 0}_{1\,11}\frac{\partial\Phi}{\partial p^2_{11}}$$
$$+\mu D^{2\prime}_{11\,11}\frac{d\Phi}{dx_2}=O;$$

Der Fall:

$$D\left(\frac{F_1,F_2}{p'_{22},p^2_{22}}\right)=O$$

führt zum Integrieren des Systemes von 4 letzten Gleichungen des Systemes (34).

Im System (34) bestimmt man die Funktionen λ und μ durch folgendes System von linearen Gleichungen:

$$D^{\prime\prime}_{22\,11}\lambda+D^{\prime 2}_{11\,11}\mu+D^{\prime\prime}_{11\,12}=O$$
$$D^{\prime\prime}_{22\,12}\lambda+D^{\prime\prime}_{11\,22}=O.$$

Im speziellen Falle einer einzigen unbekannten Funktion z bekommen wir die Darboux-sche Methode der Integration der Gleichung $F(x,y,z,p,q,r,s,t)=O$, die im vorigen § angeführt wurde.

CLX. Sitzung am 15. Juni 1929.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. Kurenśkyj (Kyjiv) bedankt sich für die Wahl zum wirklichen Mitglied der Sektion.

2. Prof. M. Baltovskoj (Rostov) übersendet eine Abhandlung „Über ukrainische und weissrussische mathematische Terminologie im Zusammenhang mit der Geschichte der russischen Terminologie“. Die Arbeit erscheint in der Sammelschrift der Sektion.

a) die mineralogisch-geologische	Abteilung	2827	Nummern
b) die diluvialgeologische		326	
c) die botanische		1265	
d) die ornitologische		115	
e) Konchyliensammlung		99	
f) Anatomie und Entomologie	„	4050	„

Die grösseren Spenden opferten die Hrn.: M. Terlećkyj (Lemberg), G. Terlećkyj (Boryslav), I. Ozarkevyč (Boryslav), Ing. Stefanovyč (Lemberg), G. Polanśkyj (Lemberg), I. Fylypčak (Sambor), H. Martyneć (Sambor) u. a., sowie der Verein der ukrainischen Studenten der Bergakademie in Přibram.

3. Es wurden Pläne der Ferialexkursionen diskutiert.

4. Es wurden einige neue Mitglieder der Kommission gewählt.

ERRATA

Sitzungsberichte Heft X.

Seite				statt	soll sein
9	Zeile	1	v. oben	y	J
9	„	3	„	y	J
10	„	6	unten	$\frac{q(p-s')}{2p^2}$	$\frac{q(q-s')}{2p^2}$
10	„	6	unten	$\frac{r(q-s')}{2q^2}$	$\frac{q(r-s')}{2p^2}$

Ausserdem fehlt in dieser Zeile Nummer (11).

11		6	v. oben	$\frac{p}{q}$	$\frac{q}{p}$
12		5		y_2	y_3

Geschlossen am 30. Juni 1929.