UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

HEFT XV.

(JÄNNER 1931 — APRIL 1931).

VERÖFFENTLICHT

VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1931.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

Die Ektodermzellen der Fußscheibe der Chlorohydra bestehen aus einer dichten Schicht großer zylindrischer Zellen; nach der Öffnung des Porus verkleinern sie sich aber einigermaßen. Nach kurzer Zeit erlangen die Zellen ihre Größe wieder zurück. Der Porus öffnet sich vorwiegend nur während der Ablösung der Hydra von der Unterlage, sonst ist er geschlossen. Bei dem Öffnen kann sogar Entoderm für eine kurze Zeit prolabieren.

CLXXII. Sitzung am 24. April 1931.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem verstorbenen Direktor des Dzieduszycki-Museums Prof. J. Łomnicki in Lemberg.

Eine Übersicht der Tätigkeit des Verstorbenen gibt Hr. G. Polanśkyj.

2. Hr. M. Zaryćkyj liest seine Note u. T. „Eine Bemerkung über den Rand der Menge" (sieh unten).

3) Der Vorsitzende legt die Arbeit des Prof. M. Krawtchouk (Kyjiw) u. T. „Note sur les déterminants" vor (sieh unten).

4) Hr. G. Polanśkyj berichtet über den jetzigen Stand des naturwissenschaftlichen Museums der Gesellschaft.

BERICHTE.

Eine Bemerkung über den Rand der Menge

von Miron Zaryćkyj (Lemberg).

1. Ich bezeichne mit A^f die Begrenzung einer Menge A, d. h. die Menge der Punkte der Raumes C, welche keine inneren Punkte von A und keine inneren Punkte von A^c (A^c = Komplementärmenge von A in C, $A^c = C-A$) sind. Mit A^b bezeichne ich den Rand von A, d. h. die Menge der Punkte von A, welche auch Punkte der Begrenzung von A sind, $A^b = AA^f$.

2. H. Hausdorff [1]) beweist die Formel

$(A + B)^f < A^f + B^f$ für offene Mengen A und B.

Janiszewski[2]) hat bewiesen, daß diese Formel für beliebige Mengen gilt.

Ich habe [3]) eine allgemeinere Formel aufgestellt, in welcher anstatt der Relation der Inklusion das Gleichheitszeichen auftritt:

$$(A + B)^f + (A + B)\ (A^f + B^f) = A^f + B^f.$$

Was den Rand anbetrifft, so gilt auch hier die spezielle, sowie die allgemeinere Formel:

$$(A + B)^b + (A + B)\ (A^b + B^b) = A^b + B^b.$$

Beide allgemeinere Formeln lassen sich aber durch noch schärfere Formeln vertreten, die nur von den speziellen Formeln und von den allgemeinen Formeln des Logikkalküls abhängen.

---

1) Grundzüge der Mengenlehre, 1914, S. 219.

2) Sur les coupures du plan, Prace mat.-fiz. XXVI. 1915, s. 20

3) Fund. Math. IX. p. 6.

Es gelten nämlich die Gleichheiten:

$$(A+B)^f + (A+B)^{fc}(A^f+B^f) = A^f + B^f,$$
$$(A+B)^b + (A+B)^{bc}(A^b+B^b) = A^b + B^b.$$

Die linken Summanden dieser Formeln bilden offensichtlich fremde Mengen.

Note sur les déterminants

(par M. Krawtchouk).

§ 1.

Soit

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, \overline{x_j} \qquad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

une forme hermitienne positive. Alors le déterminant de la matrice

$$(1) \qquad A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{matrix} = \begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} A_1 \\ A_3^* \end{matrix}}_{k \text{ colonnes}} \begin{matrix} A_3 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{matrix} \} \; k \textit{ lignes} \\ \} \; n-k \textit{ lignes} \end{matrix} \end{matrix}$$

est positif, ainsi que tous ses mineurs appartenant à la diagonale principale.

Il est connu qu'on peut présenter A sous la forme:

$$(2) \qquad A = YY^*,$$

où

$$Y = \begin{matrix} y_{11} & y_{12} & & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{matrix}, \quad Y^* = \begin{matrix} \overline{y_{11}} & \overline{y_{21}} & & \overline{y_{n1}} \\ \overline{y_{12}} & \overline{y_{22}} & & \overline{y_{n2}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \overline{y_{1n}} & \overline{y_{2n}} & & \overline{y_{nn}} \end{matrix}$$

En introduisant la notation

$$Y = \begin{matrix} Y_1 \; \} \; k \textit{ lignes} \\ Y_2 \; \} \; n-k \textit{ lignes} \end{matrix}$$

on obtient de l'égalité (2):

$$(3) \qquad A = \begin{matrix} Y_1 Y_1^*, & Y_1 Y_2^* \\ Y_2 Y_1^*, & Y_2 Y_2^* \end{matrix}$$

D'autre part le théorème de Laplace donne:

$$(4) \qquad |Y| = \sum \mathrm{Y}(i_1, i_2, \ldots, i_k)\; y(i_1, i_2, \ldots i_\nu).$$

où

$$\mathrm{Y}(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \begin{vmatrix} y_{1i_1} & y_{1i_2} & & y_{1i_k} \\ \\ y_{ki_1} & y_{ki_2} & & y_{ki_k} \end{vmatrix}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy on en tire:

$$(5)\qquad |YY^*| \leq \sum Y(i_1, i_2, \ldots, i_k) Y^*(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

$$\sum y(i_1, i_2, \ldots, i_k)\, y^*(i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

$$(5_1)\qquad |YY^*| \leq |Y_1 Y_1| \quad |Y_2 Y_2^*|\,,$$

se qui donne le résultat suivant:

$$(6)\qquad |A| \leq |A_1| \quad |A_2|$$

Il s'en suit la formule définitive:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \leq$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, & a_{1k} \\ \cdot & \cdot \\ a_{k1}, \ldots, & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1}, \ldots, & a_{k+1,l} \\ \cdot & \cdot \\ a_{l,k+1}, & \ldots, a_{ll} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1}, \ldots, & a_{p+1,n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n,p+1}, & \ldots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

se réduisant dans les deux cas particuliers:

$$1)\ k = l - k = \qquad = n - p = 1$$

$$2)\ k = s,\quad l = n$$

aux inégalités classiques de J. Hadamard:

$$(7)\qquad |A| \leq a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \quad {}^{*)}$$

$$(7_1)\qquad |A| \leq a_{11} \frac{\partial |A|}{\partial a_{11}}$$

Si l'on pose $\quad A = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*,$

où

$$(8)\qquad \mathfrak{A} = \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{matrix} \qquad (m \geq n)$$

est une matrice complexe quelconque, alors on obtient de (6):

$$(9)\qquad 0 \leq |\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*| \leq |\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1^*| \quad |\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2^*| \ldots |\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_r^*|$$

En particulier

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*| \leq \prod_{i=n}^{n} (\alpha_{i1}\overline{\alpha_{i1}} + \alpha_{i2}\overline{\alpha_{i2}} + \ldots + \alpha_{im}\overline{\alpha_{im}})$$

---

*) Cf. les notes de R. Frisch et de J. Hadamard (Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris, 1927, pp. 1244—1246) et l'article de l'auteur de cette note (Memoires der Veterinär-Zootechn. Instituts in Kiew, Bd IV, 1926, p. 57).

§ 2.

Démontrons l'inégalité (6) d'une autre manière.

Pour se but rappellons qu'il existe une matrice carrée P satisfaisant aux égalités:

$$P A_1 P^* = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & & \lambda_k \end{matrix} \right\| , \qquad P P^* = I = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

où $\qquad \lambda_1, \lambda_2, \quad \lambda_k > 0$

sont les racines de l'équation caractéristique:

$$| A_1 - \lambda I | = 0$$

Alors la matrice

$$B = \left\| \begin{matrix} P, & 0 \\ 0, & I \end{matrix} \right\| \quad A \quad \left\| \begin{matrix} P^*, & 0 \\ 0, & I \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{matrix} & B_3 \\ \hline B_3^* & A_2 \end{array} \right\|$$

appartient aussi à une forme hermitienne positive et satisfait aux conditions:

$$(10) \qquad | B | = | A | \qquad \left| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & & \lambda_k \end{matrix} \right| = \lambda_1 \lambda_2 \qquad \lambda_k = | A_1 |$$

En appliquant aux déterminants

$$| B | , \frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1} , \frac{\partial^2 | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \qquad , \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \qquad \partial \lambda_k}$$

la formule (7_1) de J. Hadamard on obtient:

$$| B | \leqq \lambda_1 \quad \frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1}$$

$$\frac{\partial | B |}{\partial \lambda_1} \leqq \lambda_2 \quad \frac{\partial^2 | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$$

$$\frac{\partial^{k-1} | B |}{\partial \lambda_1 \qquad \partial \lambda_{k-1}} \leqq \lambda_k \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \ldots \partial \lambda_{k-1} \partial \lambda_k} ,$$

ce qui donne:

$$(11) \qquad | B | \leqq \lambda_1 \lambda_2 \qquad \lambda_k \frac{\partial^k | B |}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \qquad \partial \lambda_k}$$

L'inégalité (11), à l'aide des formules (10), prend la forme (6):

$$| A | = | A_1 | \quad | A_2 | \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Geschlossen am 30. April 1931.