КОРОТКИЙ НАЧЕРК

ТЕОРИЇ ФУНКЦИЙ АВТОМОРФНИХ*)

НАПИСАВ

ВОЛОДИМИР ЛЕВИЦКИЙ.

Загальна функция автоморфна є то однозначна функция аналїтична $F(z)$, яка не зміняє своєї вартости, наколи ми до єї арґументу стосувати-мем якусь субституцию з ґрупи субституций:

$$G = \left(z,\ f_{\alpha}(z) \right),$$

де функция $f_{\alpha}(z)$ може мати ріжне значінє.

З тих всїх родів функций автоморфних ми займем ся лиш такими функциями, що не зміняють ся для т. зв. **ґруп нетяглих** або **ґруп Фухса** (як їх зове Poincaré), себ-то ґруп, утворених з субституций:

---

*) Важнїйша лїтература до сеї теориї містить ся в слїдуючих творах: Poincaré: Sur les fonctions uniformes qui ses reproduisent par les substitutions linéaires (Math. Annalen XIX); той-сам: Théorie des groupes fuchsiens Acta matem. I. pag. 1. i pag. 193. i т. III. (Mémoire sur les groupes kleinéens). Rausenberger: Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen. Biermann: Theorie der analyt. Functionen ст. 409 et sqts.; той-сам: Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen (Sitz. Berichte der k. Akad. der Wissensch. Bd. XCII, Abth. II). Picard: Traité d'Analyse т. I. ст. 435 et sqts. i т. II. ст. 268 et sqts. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen. Fricke u. Klein: Vorlesungen ü. Theorie der automorphen Functionen Bd. I, дальше ріжні розвідки Кляйна в Mathem. Annalen; Forsyth: Theory of Functions. Пор. також Левицкий: Ґрупа модулова (Справозданє академічної ґимназиї у Львові 1895) i Wstęp do teoryi elipt. funkcyj modułowych (Prace mat. fiz. XIII. Варшава).

$$S_n z = \left(z, \frac{\alpha_n z + \beta_n}{\gamma_n z + \delta_n}\right),$$

де сочинники є числа дїйсні або зложені.

Очевидна є річ, що ґрупа G може бути утворена з ітераций одної лише субституциї $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + b}\right)$, отже $G = (1, Sz, S^2z, S^3z, \quad)$ і тодї маємо функцию з одною субституциєю основною, або ґрупа є утворена з двох субституций перемінних основних:

$$Sz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad Tz = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

отже $$G = \left(S^\alpha T^\beta z, T^\alpha S^\beta z\right), \quad \alpha \gtreqless \beta,$$

або таких основних субституций може бути більше, а тодї функция називаєсь після Poincaré функциєю Фухса.[1])

Заки приступимо до ґруп і функций, які не зміняють ся при субституциях даної ґрупи, перейдім по коротцї важнїйші свойства субституциї Sz.

Субституция $Sz = \left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right)$,

де $z = x + iy$, а сочинники є числа дїйсні або мнимі.

Так як свойства ті подав я в наведених мною розвідках, проте повторю їх тут лиш дуже коротко.

1. Наколи напишемо субституцию сю в видї:

$$t = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad 1)$$

отже рівнаєм тим звяжемо площу (t) і (z), то те підставленє відтворює одну площу в другу і то так, що обі ті площі є до себе подібні в елементарних (безконечно малих) трикутниках, значить ся відтворенє є частинкове [conform] (доказ пор. в другій моїй розвідцї). Є оно далї ізоґональне, значить ся кут утворений між двома перетинаючими ся кривими на однїй площі остає по відтвореню без зміни; є оно в кінци і колове, бо коло на однїй площі переходить через сю субституцию на коло і на другій площі.

2. Наколи возьмем місто двох площий ту саму площу (z) і будем єї перетворювати в нїй самій, то кожда єї точка перейде в иньшу, лиш т. зв. точки подвійні, визначені рівнаєм:

---

[1]) Докладнїйшу дефініцию функций Фухса і Кляйна опісля подамо.

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

спадуть на себе; є се точки:

$$\alpha, \beta, = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{2\,c} \qquad 2)$$

Таких точок є дві; лиш на случай:

$$(a - d)^2 + 4\,bc = 0 \qquad 3)$$

обі ті точки спадають на себе і маєм лиш одну точку подвійну.

При помочи тих точок подвійних можемо субституциї нашій надати вид (пор. згадану мною роботу [1]):

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = K\,\frac{z - \alpha}{z - \beta}, \qquad 4)$$

де K є т. зв. множником субституциї:

$$K = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4\,bc}}, \qquad 5)$$

або:

$$\frac{t - \beta}{t - \alpha} = K'\,\frac{z - \beta}{z - \alpha},$$

де:

$$\left(\sqrt{K} + \sqrt{K'}\right)^2 = \frac{(a + d)^2}{ad - bc} \qquad 6)$$

Наколи возьмем точки безконечно близькі точки α, т. є:

$$t = \alpha + \tau, \quad z = \alpha + \zeta,$$

то по розвиненю в формі 4) дістанемо:

$$\frac{|\tau|}{|\zeta|} = \left|K\right|, \qquad 7)$$

в такім отже відношеню остають точки безконечно близькі до точки подвійноï.

3. Наколи положимо:

$$Sz = t_1\,, \quad S^2 z = t_2\,, \qquad\qquad S^m z = t_m \qquad 8)$$

то ітерация послїдна має значінє:

---

[1]) Пор. Lewicki: Wstęp do teoryi funkcyj eliptycznych modułowych loc. cit.

$$\frac{t_m - \alpha}{t_m - \beta} = K^m \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{8}$$

Відворотна субституция дасть нам:

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = \frac{1}{K} \frac{t - \alpha}{t - \beta} \text{ і т. д.}$$

або коли напишемо t_{-1} місто z, а z місто t, то дістанемо:

$$\frac{t_{-m} - \alpha}{t_{-m} - \beta} = \frac{1}{K^m} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \tag{9}$$

Наколи вернем до первісної точки, т. є.:

$t_m \equiv z$, $K^m = 1$, то субстисуция має **періо д** m, т. є.:

$$K = e^{\frac{2s\pi i}{m}}$$

Наколи: $K=1$, $\alpha = \beta$, $(a-d)^2+4\,bc=0$, субст.: є параболїчна.

$K>1$, $\alpha \gtrless \beta$, $(a-d)^2+4\,bc>0$, „ є гіперболїчна.

$K=e^{\sigma i}$, $|K|=1$, $(a-d)^2+4\,bc\angle 0$, є елїптична.

$K=re^{\sigma i}$, $r>0$, субст.: є льоксодромічна.

Субституция елїптична, де:

$$\sigma = \frac{m}{n} 2\pi \left(\frac{m}{n} \text{ дроб істий}\right)$$

має період n, бо:

$$\frac{t_n - \alpha}{t_n - \beta} = \frac{z - \alpha}{z - \beta}, \quad t_n \equiv z,$$

наколиж $\frac{\sigma}{2\pi} = e$ (невиміриме), то:

$t_m \equiv z$ доперва для $m = \infty$ т. є. по довершеню безконечно многого числа ітераций; субституция елїптична є тодї інфінітезімальна.

Субституция гіперболїчна і льоксодромічна — як легко ся можна пересьвідчити — не є анї періодичні, анї інфінітезімальні, а в субституциї параболїчній, якій можна дати вид:

$$\frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + \frac{4\,c}{2\,(a + d)} \tag{10}$$

$$t_m \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty} \text{ і } t_{-m} \equiv \alpha \Big\}_{m=\infty}$$

т. є.: точки ті зміряють до точки подвійної α.

4. Ґрупа, де не входять субституциї еліптичні інфінітезімальні, є нетягла, т. є. наколи якусь точку $z = x + iy$ піддамо субституциї групи, то ся точка перейде на иньшу, яка не лежить в окруженю даної точки. Точки, де ґрупа тратить нетягліcть, є точками особливими ґрупи.

Наколи сочинники a, b, c, d є дійсні, то ґрупа тратить нетягліcть на цілїй оси перворядній і еї безпосередно близькім окруженю (пор. мою роботу про ґрупу модулову); всюди над осию xx є нетягла кромі ту і там порозкиданих точок, які належать до субституций елїптичних ґрупи.

5. В субституциї Sz можна все довести до того, щоби еї модул

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1; \text{ бо наколи:}$$

$$ad - bc = \mu', \ \mu' \lesseqgtr -1, \text{ то положім:}$$

$$\mu'' = (\sqrt{\mu'})^2 = \mu^2; \text{ дістанем:}$$

$$\frac{a}{\mu}\ \frac{d}{\mu} - \frac{b}{\mu}\ \frac{c}{\mu} = 1 \text{ і ті вирази } \frac{a}{\mu}, \quad \text{берем за сочинники.}$$

Наколи $\mu' = -1$, то берем:

$$bc - ad = +1, \text{ т. є. берем субституцию:}$$

$$t' = \frac{cz + d}{az + b}.$$

6. Щоби перевести ґеометрично відтворене точки z на точку t на тій самій площі, беремо:

$$z' = t - \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} = -\frac{1}{c^2\left(z + \frac{c}{d}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{c^2\zeta} = \frac{\mu^2}{\zeta}, \ \mu^2 = -\frac{1}{c^2}, \ \mu = k^2 e^{2\gamma i}$$

Точкою зеровою площи ζ є 0; наколи маємо дану точку z (ζ), то дістанемо z', наколи поведемо через 0 просту *PP* під кутом γ (фіґ. I), а з 0 лучем k зачеркнемо коло; точку z відбиваємо в простій *PP* яко точку z_1 а далї відвертаємо z_1 через коло (k) на точку z'; а то $t = z' + \frac{a}{c}$, то наколи на площи (xy) маємо точку $\frac{a}{c}$, то з z' провадимо відтинок $\#\ \frac{a}{c}$ і дістанемо t. (Узасаднене сего способу конструкції гл. мою розвідку про ґрупу модулову, де є подана конструкция для субституциї $-\frac{1}{z}$.)

Маємо ту отже три рухи: відбите в простій *PP*, відвернене образа в колї і пересунене, Poincaré доказав однак, що ті три рухи заступити можна двома відверненями в двох колах, але лиш для трох перших родів субституциї (для льоксодромічної нї).

7. Напишім субституцию $t = \frac{az + b}{cz + d}$ в формі:

$$ctz + dt - az - b = 0$$

і возьмім чотири пари відповідних точок t і z, то дістанем:

$$ct_1 z_1 + dt_1 - az_1 - b = 0$$
$$ct_2 z_2 + dt_2 - az_2 - b = 0$$
$$ct_3 z_3 + dt_3 - az_3 - b = 0$$
$$ct_4 z_4 + dt_4 - az_4 - b = 0$$

а з відси через елїмінацию сталих a b c d дістанем:

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_4} \cdot \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \quad \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \qquad 11)$$

Виберім на площі z довільні точки $(\alpha\ \beta)$ і спряжені з ними $(\alpha'\ \beta')$, то на пл. t відповідять їм $(\gamma\ \delta)$ і спряжені $(\gamma'\ \delta')$. Наколи то вставимо в 11), дістанемо:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \quad \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'},$$

а Poincaré значить се:

$$(\alpha\ \beta) = (\gamma\ \delta) \qquad 12)$$

Poincaré впроваджує еще одну реляцию. Наколи на пл. z возьмемо точки $(\alpha\ \beta)$ такі, що часть дїйсна

$$\Re\ (\alpha) \angle \Re\ (\beta)$$

і наколи через ті точки і спряжені з ними поведемо коло (Фіґ. II), яке вісь xx перетинає в точках h і k, то Poincaré творить виражене:

$$\frac{\alpha - h}{\alpha - k} \quad \frac{\beta - k}{\beta - h} = \left[\dot{\alpha}\ \beta\right].$$

Наколи на колї возьмем еще точку γ, то дістанемо:

$$\left[\alpha\ \gamma\right] = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} \cdot \frac{\gamma - k}{\gamma - h}$$

$$\left[\gamma\ \beta\right] = \frac{\gamma - h}{\gamma - k} \cdot \frac{\beta - k}{\beta - h},$$

а з відси:

$$[\alpha\ \gamma]\ [\gamma\ \beta] = [\alpha\ \beta] \tag{13)}$$

При помочи тих реляций найдемо:

$$(\alpha\ \beta) = \frac{4\ [\alpha\ \beta]}{\left[1 + [\alpha\ \beta]\right]^2},\ (\gamma\ \delta) = \frac{4\ [\gamma\ \delta]}{\left[1 + [\gamma\ \delta]\right]^2},$$

а що:

$$(\alpha\ \beta) = (\gamma\ \delta),$$

то дістанемо реляцию:

$$[\alpha\ \beta] = [\gamma\ \delta] \tag{14)}$$

8. Наколи $\alpha \equiv z$, $\beta \equiv z + dz$ (отже α і β безконечно близькі), то тодї:

$$\left[z,\ z + dz\right] = \frac{z - h}{z - k} \cdot \frac{z - k + dz}{z - h + dz} =$$

$$= \left(1 + \frac{dz}{z - k}\right)\left(1 - \frac{dz}{z - h} + \cdots\right) = 1 + dz\left[\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h}\right].$$

Наколи $\sphericalangle\, ho\alpha = \sphericalangle\, hoz = \varphi$, то:

$$dz = \left| dz \right| e^{\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)i} = -\, i \left| dz \right| e^{\varphi i},$$

а що:

$$\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z - h} = -\frac{h - k}{(z - h)(z - k)} = -\frac{2\ r}{(z - h)(z - k)},$$

то:

$$\left[z,\ z + dz\right] = 1 + \frac{|\, dz\, |}{y}$$

Poincaré називає інтеґрал $\int_k \frac{|dz|}{y}$ браний по луку k якоїсь кривої, L тої кривої, а $\iint \frac{dxdy}{y^2}$, браний з огляду на часть площи, замкненої якимсь контуром, S того поля.

Наколи $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$, а луки k і k' кривих собі відповідають, то так як:

$$[z, z + dz] = [t, t + dt],$$

то також:

$$\int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dt|}{\eta} \tag{15}$$

і:

$$\iint \frac{dxdy}{y^2} = \iint \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \tag{16}$$

т. є.: два відповідні луки відповідних кривих мають однаке L, а два відповідні поля однаке S.

Наколи:

$$t = \xi + \eta i = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$z = x + iy$$

то часть другорядна рівнає ся части другорядній, отже:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

З другого боку:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}, \text{ отже по виконаню:}$$

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{\left[\sqrt{(cx + d)^2 + c^2y^2}\right]^2} = \frac{1}{(cx + d)^2 + c^2y^2},$$

отже:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{\eta}{y}. \tag{17}$$

9. Наколи возьмем ґрупу субституций утворену з ітераций та добутків одної або більше основних субституций, і ті всї субституциї

пристосуєм до всїх точок площи z, то покаже ся, що на площі (z) найде ся поле замкнене т. зв. фундаментальний (основний) район такий, що яка-небудь субституция примінена до якої-небудь точки єго випроваджує ту точку поза сей район; всї місця того району по примінению одної субституциї ґрупи найдуть ся також всї в иньшім рівнож замкненім районї; по примінению другої субституциї ґрупи всї точки району основного найдуть ся знов в иньшім замкненім районї і т. д., цїла площа розпаде ся на ряд відповідаючих собі районів, так що основний район зовсїм вистарчає до пізнаня і схарактеризованя ґрупи. — При такім подїлї площи на райони бере ся тільки додатну півплощу (горішну), бо все, що ся дїє під осию xx, повстає через відбите горішної півплощи в оси xx.

Такий поділ для ґрупи модулової о двох основних субституциях з дійсними та цїлковитими сочинниками перевів я в розвідцї про ґрупу модулову[1]); подібний подїл можнаби перевести для ґрупи з одною субституциєю основною (площа розпаде ся тодї на 3 райони рівноважні). Подїл представить ся дуже гарно, наколи по довершеню подїлу на площи xx відібємо єго — як Кляйн робить — на площи $t = \frac{az + b}{cz + d}$; тодї пр. для ґрупи модулової вісь xx перейде за коло, а в колї тим відтворить ся цїла півплоща.

По тих загальних увагах про райони основні перейдім до районів основних ґрупи з кількома основними субституциями, с. є. ґрупи Фухса і їх власностий.

Райони специяльних ґруп Фухса.[2])

Специяльна ґрупа Фухса є утворена з кількох основних субституций типу $\left(z, \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}\right)$, де a_s, b_s, c_s, d_s є числа дійсні які-небудь, такі що їх модул $\begin{vmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{vmatrix} = 1$.

До такої ґрупи мусить належати район фундаментальний (основний), т. є. такий якийсь район замкнений, що кожда єго точка z за примінением якої небудь субституциї сеї ґрупи виходить поза сей район. Сей район, а проте і всї райони, які з него вийдуть через

---

[1]) Пор. Левицкий: ґрупа модулова loc. cit.

[2]) Цїла та теория в нарисї містить ся у Poincaré: Théorie des groupes fuchsiens (Acta mat. m. I.).

ріжні підставленя, будуть творити continuum; площа цїла (очевидно берем — як висше сказано — лиш додатну півплощу) розпаде ся на райони R_s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) такі, що район R_s відповідає якійсь субституциї $f_s(z) = \frac{a_s z + b_s}{c_s z + d_s}$, ($a_s$, b_s, c_s, d_s дійснї).

1. Приймім R_0 (Фіґ. III) за район основний, то всї лїнїї, які его замикають, такі, що до них прибуває иньший район R_s, називають ся **боками** (пр. λ_p, λ_q, $\ldots$) і то **першої катеґориї** (рода, Poincaré), наколи они не є частями оси xx, а **другого рода** (катеґориї), наколи они є частями оси xx (пр. a b).

Наколи возьмемо якусь точку z на боцї λ_p, то она піддана субституциї $f_p(z)$ перейде на ограничене району R_p, отже $f_p(z)$ належить до обводу району R_p. Наколи тепер точку z (на боцї λ_p) зачислимо до району R_p і застосуємо до неї відворотну субституцию $\left[f_p(z)\right]^{-1} = f_{-p}(z)$, то дістанемо точку на боцї λ_{-p}; точка та буде належати і до R_0 і до району R_{-p}. Звідси слїдує, що до боку λ_p першого рода найде ся все в районї R_0 другий відповідний бік λ_{-p} такий, що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$, а $f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}$.

Такі два боки λ_p і λ_{-p} є після Poincaré **спряжені**.

Наколи $R_p \equiv R_{-p}$, т. є. $f_p(z) = f_{-p}(z)$, або $\left[f_p(z)\right]^2 = z$, або $\lambda_p \equiv \lambda_{-p}$, то субституция $f_p(z)$ є еліптична о періодї 2, а точка z на боцї λ_p через ту субституцию посуне ся лиш по тім самім боцї; з того слїдує, **що такий бік** (позаяк субституция є еліптична) **складає ся з двох боків, які творять лук кола** розділений точкою подвійною α; половина того боку з одної сторони точки α буде λ_p, половина з другої сторони точки α буде λ_{-p}; такий бік є проте лиш мнимо поєдинчий, бо точка α на ним є вершком району R_0. **Район R_0 має проте паристе число спряжених боків першого рода.**

Боки другого рода не є з собою спряжені; бік ab не може ніяким чином перейти в бік cd, бо колиб пр. точка z на ab відповідала точцї z' на cd, тоби і їх безпосередні окруженя δ і δ' відповідали собі (бо точки по над осию відповідають точкам по над осию), а се неможливо, бо в районї R_0 нема точок рівноважних.

Боки першого рода — а тих є число паристе λ_1 λ_2 λ_{2n} — можна подїлити на пари спряжені: λ_p і λ_{p+n} ($p = 1, 2, \ldots n$); тодї:

$$f_{n+p}(\lambda_p) = \lambda_{n+p}, \quad f_p(\lambda_{n+p}) = \lambda_p .$$

Субституциї f_p і f_{n+p} є проте відворотні. Вистане проте знати лиш половину субституций, які район R_0 перетворюють в райони сусїдні. Вистане знати:

$$f_1(z),\ f_2(z), \qquad f_n(z) \qquad (1)$$

то иньші субституциї є:

$$f_1^{-1}(z),\ f_2^{-1}(z), \qquad f_n^{-1}(z) \qquad (2)$$

При помочи субституций (1) можна район R_0 перемінити на якийнебудь сусїдний район.

Не тяжко доказати, що субституциї ряду (1) є субституциями основними ґрупи, а що ґрупа — як ми заложили — має скінчене число субституций основних, проте n є числом скінченим, значить ся район має скінчене число боків I. рода.

В однім вершку сходить ся певне скінчене число районів; пр. в вершку S (Фіґ. IV) сходить ся R_0, R_1, R_2, —; найже R_0 перейде через субституцию $f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}(z)$ в R_1, R_1 через $f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}(z)$ в R_2, — і т. д. в кінци вернемо до R_0, отже:

$$f_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\ f_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}\ f_{\alpha_3}^{\varepsilon_3} \qquad f_{\alpha_\mu}^{\varepsilon_\mu}(z) = z \qquad 18)$$

Подібні вираження дістанемо для кождого вершка в районї R_0 і дістанемо певну скількість реляций між основними субституциями ґрупи (т. зв. основні реляциї ґрупи) під заложенем, що з R_0 безпосередно переходить ся до R_1, з R_1 до R_2 і т. д.

2. Наколи маємо район, якого боки є які-небудь лїнiї, то можна район сей замінити на район обмежений самими луками коловими і то так, що боки другого рода останутъ боками другого рода, а боки першого рода будуть луками о середоточках на оси xx. Се легко зрозуміти, бо 1^0 можна з одної сторони кавалок района відкинути, а з другого боку додати кавалок рівноважний, а 2^0 через кінцї одного боку можна завсїгди повести лук кола о середочцї на оси xx, а так само через кінцї відповідного спряженого боку; через се повстануть між одним боком спряженим а луком кола і між другим боком спряженим а другим луком рівноважні поля, з яких одно можна відкинути; сим способом район дістане самі колові обмеження. В той сам спосіб можна район, якого боки ся перетинають самі, замінити на район о боках неперетинаючих ся.

Район так уформований є зложений з самих кіл нормальних, зве ся проте після Pincaré районом нормальним.

3. Возьмім тепер в так унормованім районі два боки спряжені $\lambda_p = AB$ і $\lambda_{-p} = CD$, то:

$$f_{-p}(\lambda_p) = \lambda_{-p}.$$

Точції z на боку λ_p відповідає на λ_{-p} точка t так, що:

$$t = f_{-p}(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \text{ дїйсне})$$

або як в уст. 5 попереднього роздїлу:

$$z' = t - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{z + \frac{d}{c}} = -k^2\,\frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

Наколи напишемо:

$$z + \frac{d}{c} = r_z\, e^{\varphi_z i} \qquad z' = r_t\, e^{\varphi_t i}$$

то:

$$r_z\, e^{\varphi_z i} = -k^2\, e^{-\varphi_t i}$$

а з відси — так як части другорядні мусять бути рівні — є:

$$\varphi_z = \pi - \varphi_t\,, \quad \pi = \varphi_t + \varphi_z\,.$$

З відси слїдує, що наколи z порушає ся від A до B, то на відворот t порушає ся від D до C, отже два спряжені боки відповідають собі напрямами противними; вершкови A відповість вершок D, вершкови B відповість вершок C.

4. Перейдім тепер до уґруповання вершків (очевидно будем узглядняти лиш райони нормальні).

Возьмім якийсь район R_0 (Фіґ. V), то вершки, які розділяють два боки першого рода (пр. B, C, D) називаємо вершками першого рода; вершки на оси xx, де сходять ся два боки першого рода (пр. E) є вершками другого рода, а вершки, де сходять ся боки першого і другого рода (пр. F, G, H, A) є вершками третого рода.

Наколи ми вийдем від якогось вершка першого рода (пр. B) і зачнем іти по якімсь боцї в якімсь напрямі, то по спраженім боцї треба іти в напрямі противнім; відповідні вершки — як знаєм — відповідають собі в противнім порядку, тож переходячи так вершки першого рода вернем знов до початкового вершка. Ті вершки першого рода, які ми в тім окружаню району перейшли, утворять цикль першого рода, все замкнений.

Наколи вийдем від вершка другого рода (пр. E), то всї відповідаючі собі вершки є або другого або третого рода. Наколи вершків третого рода не ма зовсїм, то і ту цикль вершків — який буде зложений з самих вершків другого рода т. є. цикль другого рода буде замкнений. Наколиж є вершки третого рода, то процес окружаня района мусить десь задержати ся, бо боки другого рода собі не відповідають, до початкового вершка не вернемо і дістанемо отвертий цикль третого рода.

Наколи боків другого рода є l, то боки ті мають 2l вершків, на цикль іде по два вершки, отже циклїв третого рода є тілько, кілько район має боків другого рода.

5. Перейдім тепер до кутів району і то до кутів при вершках першого рода $\left(\text{бо кут при вершку другого рода є } 0, \text{ при вершку третого рода } \frac{\pi}{2}\right)$.

Ту докажемо важне твердженє, яке подав Poincaré, а іменно, що сума кутів циклю першого рода в районї основнім мусить рівнати ся 2π, подїленому через число цїле.

Наколи в районї R_0 (Фiґ. VI) вершки першого рода є A_1, A_2, A_3, A_4, , які творять цикль замкнений (A_1, A_2, A_3, A_4 —— A_1), то бокови λ_α, який виходить з A_1 відповідати-ме спряжений бік $\lambda_{-\alpha}$, що кінчить ся в a_2, так що $f_\alpha(\lambda_{-\alpha}) = \lambda_\alpha$ [1]; λ_α належить рівночасно до сусїдного району R_α (до котрого і A_1 належить). Наколи другий бік, що виходить з A_2, є λ_r, то він через субституцию f_α перейде на бік виходячий також з A_1, а належачий до району R_α, так що $f_\alpha(R_0) = R_\alpha$, причім $\sphericalangle A_2$ відтворить ся в районї R_α при вершку A_1, бо субституция є — як знаєм — ізоґональна.

Подібно через субституцию f_β перейде район R_0 на сусїдний район R_β, а третий кут при третім вершку цикля A_3 відтворить ся при вершку A_1 і т. д., аж вкінци по довершеню ряду субституций і по вичісноваию цїлого циклю вернем назад до S_0, так що $f_\alpha f_\beta f_\gamma \cdots (R_0) = U(R_0) = R_0$.

Наколи перейшовши цїлий цикль (A_1, A_2, A_3 — A_1) не дістанем R_0, але $U(R_0) = R_\mu$, де R_μ має вершок A_1, то будем доконувати тілько оборотів, аж прийдем до R_0, так що:

$$U^p(R_0) = R_0. \tag{19}$$

[1]) Кляйн доказав, що субституция заміняюча λ_α на $\lambda_{-\alpha}$ мусить бути все параболїчна, а нїколи гіперболїчна.

Очевидно, що тепер — так як нїякі два кути не накривають ся — є:

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) p = 2\pi ,$$

отже:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = \frac{2\pi}{p} \qquad 20)$$

і твердженє Poincaré є доказане.

6. З реляциї 19) виходить, що:

$$U^p = 1 .$$

Є се реляция основна ґрупи; таких реляций є стілько, кілько циклїв першого рода є в основнім районї.

Субституция U є елїптична о періодї p, отже ґрупа в окруженю вершків першого рода не тратить нетяглости.

Для циклю другого рода є очевидно:

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = 0 \quad \text{або:}$$

$$\sum A_\nu = \frac{2\pi}{p} \Big\}_{p=\infty} ,$$

с. з. що докола вершків другого рода маємо $pn = \infty$ районів, отже в окруженю вершків другого рода ґрупа тратить нетяглість.

Для циклю третого рода лиш кути скрайні є по $\frac{\pi}{2}$, кути середні (в вершках другого рода) є 0, отже для такого цикля

$$\sum A_\nu = \pi ,$$

значить ся в кождім вершку є скінчене число районів, отже в окруженю вершків третого рода ґрупа задержує характер нетяглий.

7. Наколи зреасумуєм усе, то дістанемо ось-що:

Основний район специяльної ґрупи Фукса є обмежений луками кіл о середоточках на оси xx; декотрі з тих боків можуть бути відтінками оси xx або відтінками до неї прямовісними. Боки першого рода виступають в числї паристім і є парами спряжені (λ_p і λ'_{-p}), так що $f_p(\lambda_{-p}) = \lambda_p$. Така субституция зміняє R_0 на R_p, віддїлений від R_0 боком λ_p. Вершки дїлять ся на циклї трох родів: в циклю першого рода сума кутів є $\frac{2\pi}{p}$, в циклю другого рода 0, третого рода π. Районы одержані з R_0 не прикривають анї R_0 анї себе (навіть в части), між ними нема перерви, а ґрупа, що належить до R_0, є нетягла над осию xx, а лиш там, де R_0 має цикль другого рода, тратить на оси xx в вершках того циклю нетяглість. Субституцві сеї ґрупи не нарушають оси xx, тож коли R_0 має вершки на оси xx, то і другі райони мусять мати вершки на оси xx; наколи R_0 не має вершків на оси xx, то і иньші райони не мають їх також.

Наколи будем мати якийсь район, котрого боки є луками кіл з середоточками на оси xx, а покаже ся, що хотяйби для одного циклю першого рода сума кутів була $\frac{2\pi}{p}$, але p не було би числом цїлим, то до такого району ґрупа не належить.

Загальні ґрупи Фухса.

Дотепер узглядняли ми ґрупи утворені з субституций основних: $S_\nu = \left(z, \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}\right)$, де $a_\nu\, b_\nu\, c_\nu\, d_\nu$ були числа дїйснї о модулї 1; (наколи числа ті були цїлї, ґрупа була модулова). Були се специяльні ґрупи Фухса. — Наколи тепер введемо посвоячене площ

21) $t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ є числа зложені і в повисшій ґрупі вставимо субституцию 21) за z, то дістанемо загальну ґрупу Фухса і площа z відтворить ся на площи t.

Наколи возьмем ґрупу утворену з субституций S_ν (ν і ту скінчене число), але що до сочинників a_ν, b_ν, c_ν, d_ν не зробимо нїякого застереженя (отже є се в загалї числа зложені) і до сеї ґрупи застосуєм субституцию 21), то дістанем зовсїм загальну ґрупу, яку Poincaré зве ґрупою Кляйна. Студия тих загальних ґруп є дуже трудна; перевів её по части Poincaré при помочи метод анальоґічних до метод ґеометриї неевклїдової о трох розмірах[1]). В звязи з такими загальними ґрупами стоїть подїл півпросторони на райони

[1]) Пор. Poincaré: Mémoire sur les groupes kleinéens (Acta matem. m. III).

о трох розмірах [1]); но ми в се не входимо, а перейдем до загальних ґруп Фухса.

1. Очевидна є річ, що загальна ґрупа Фухса перетворює вісь xx на коло на площи t. Через добір α, β, γ, δ можна вісь xx заміннти на коло о лучу 1, а о середоточці $t = 0$ так, щоби $t = 0$ відповідало якійсь точцї над осию xx на площи z. Тодї райони R_0, R_1, пл. z перейдуть на райони R_0', R_1', , що ся будуть містити в серединї кола; коло се називає Фухс **колом граничним**, а Кляйн **головним**.

Ґрупа кола того не нарушує, лиш в єго серединї переводить подїл на райони; поза колом дістанемо подїл, який повстане через відбите подїлу внутрішного в колї граничнім.

Кождий район R_0' R_1', має боки колові, ортоґональні до кола головного; і тут R_0' має боки першого і другого рода і вершки першого, другого і третого рода; так само є ту циклї трох родів.

Після сих циклїв дїлить Poincaré ґрупи на 7 **родин**:

I. родина:	R_0 має лиш циклї	$I^{ого}$		рода.
II.	R_0	$II^{ого}$		
III.	R_0	$III^{ого}$		
IV.	R_0 „	$II^{ого}$ і $III^{ого}$		
V. „	R_0	$I^{ого}$ і $III^{ого}$		
VI. „	R_0	$I^{ого}$ і $II^{ого}$		
VII.	R_0	всїх трох родів.		

Наколи в родинї, де є циклї першого рода, є в всїх циклях $p = 1$, то родина є після Poincaré **першого степеня**, наколи хоч би одно $p > 1$, то родина є **другого степеня**.

Родини, де не ма циклїв II рода, нїде не тратять нетяглости, противно родини, де такі циклї є, тратять в деяких точках кола головного (зглядно оси xx) характер нетяглости.

2. Возьмім тепер район R_0 з родини I, II або VI, то спряжений з ним район R_0' лежить під осию xx і не має з ним вспільного боку, — бо район R_0 не має боків другого роду — R_0 і R_0' не творять проте цїлости.

R_0 має лиш 2n боків першого рода і q циклїв замкнених (першого і другого рода). Наколи-мем уважати R_0 за поверхню

[1]) Пор. Picard: Traité d'Analyse I p. 451.

пластичну (Фіґ. VII), то можна еї позгинати і постягати так, щоби боки спряжені відповідними точками впали на себе (то два боки утворять одну лїнїю); дістанемо тодї поверхню, а на нїй n лїнїй, які утворять одно пасмо розгалужене незамкнене; точки, де сходять ся кілька лїнїй, є вершками, а є їх тілько, що циклїв. Лїнїя AB складаєсь з n гранок і q вершків, а що она є незамкнена, то поверхня, на яку перейшов район R_0, є поверхнею з одним ограниченем (обмеженем), а еї спійність (connexion) є:

$$N = 2p + 1 \text{ [1]},$$

де p (число цїле) є **рядом** (клясою).

Зауважмо розширене твердженє Euler'а:

$$S + W = K + 2 - 2p \text{ [2]}.$$

де S є число стін, K гранок, W вершків, то для R_0 $S = 1$, $K = n$ $W = q$, отже:

$$1 + q = n + 2 - 2p$$

$$p = \frac{n - q + 1}{2} \qquad 22)$$

Така є **кляса** родини I., II. і VI.

Для родини III., IV., V., VIII. район R_0 має боки другого рода, отже з районом спряженим R_0' творить одну цїлїсть; Poincaré бере тому R_0 і R_0' за один район і обчисляє его клясу (ряд), анальоґічно як висше, з тою зміною, що ту лїнїя AB буде замкнена, отже $S = 2$, гранок K є $2n + m$ (n гранок з R_0, n з R_0', m боків другого рода), вершків W є ту $2q + m$ (q з R_0, q з R_0' і m циклїв третого рода); отже ту з твердженя Euler'а вийде:

$$p = \frac{2n - 2q}{2} \qquad 23)$$

і се є **кляса** (ряд) родин III., IV., V., VII.

3. Наколи возьмем район з родини I., який цїлий лежить над осию xx, то точки его при помочи субституцый ґрупи можна приближати без кінця до оси xx, так що в родинї I. райони дуже густо громадять ся над осию xx, але не на оси xx; **вісь xx є проте цїла лїнїєю особливою тої родини.** Те саме буде і для ро-

---

[1]) Пор. Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques, ст. 229.
[2]) ibid. ст. 231.

дини II. і VI, які лиш вершками другого рода дотикають оси, бо довкола вершків другого рода громадить ся безконечне число районів, а в партиях вільних можна також безконечно приближати ся до оси xx.

В иньших родинах, де є боки другого рода, є на оси xx точки особливі, але ті є лиш ізольовані, бо на боках другого рода не ма точок особливих.

Функциї Фухса.

Є се функциї автоморфні, що не зміняють ся, наколи до їх арґументу застосуєм субституциї загальної ґрупи Фухса. Анальоґічно функциї автоморфні з огляду на ґрупу Кляйна будуть функциями Кляйна.

1. Возьмім коло головне о середоточцї $z = 0$; в колї тім возьмім район R_0 і в нїм точку z, то наколи довкола того z зачеркнемо коло k_0 (в районї R_0), то єму в відповіднім районї R_s відповість k_s довкола відповідної точки z_s.

А що: $$z_s = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}, \text{ де } \begin{vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{vmatrix} = 1,$$

то: $$\frac{dz_s}{dz} = \frac{1}{(\gamma_s z + \delta_s)^2}, \text{ а:}$$

$$\frac{|dz_s|}{|dz|} = \frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} = \mu_s \qquad 24)$$

де μ_s є лїнїове збільшене елементарних лучків $|dz|$ і $|dz_s|$ через субституцию (z, z_s). Квадрати тих елементів є елементами поверхнї, начеркненої в z і z_s, отже μ_s^2 є збільшенем елементів поверхний в відповідних точках. Наколи отжеж возьмем:

$$\min \mu_s = m_s,$$

то поверхнї колес:

$$\frac{k_s}{k_0} > m_s^2. \qquad 25)$$

$z_s = \dfrac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = \infty$ для $z = -\dfrac{\delta_s}{\gamma_s}$, отже субституция $\left(z = -\dfrac{\delta_s}{\gamma_s}\right)$ переносить точку в безконечність, а що $z_s = \infty$ лежить поза колом головним, а ніяка субституция ґрупи не переносить точки поза коло головне, то точка $z = \infty$ і точка $z = -\frac{\delta_s}{\gamma_s} = P_s$ лежить поза колом головним; до кождої субсти- S_s належить така точка P_s.

2. Возьмім коло головне (K) і коло k_0 (Фіґ. VIII) довкола точки z, а поза колом точку P_s, то тоді збільшене для точки z є:

$$\mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 \left| z + \frac{\delta_s}{\gamma_s} \right|^2} = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z P_s)^2}$$

Для иньшої точки z' в колї k_0 є збільшене:

$$\mu_s' = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (z' P_s)^2},$$

а що лїнїя PP_s з усїх подібних лїнїй є найбільша, то:

$$m_s = \min \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (PP_s)^2},$$

а $$M_s = \max \mu_s = \frac{1}{|\gamma_s|^2 (RP_s)^2},$$

отже: $$\frac{M_s}{m_s} = \frac{(PP_s)^2}{(RP_s)^2} \tag{26}$$

Но понеже — як се очевидно —

$$\frac{PP_s}{RP_s} < \frac{GH}{JH} = \sqrt{c} \text{ (стала)},$$

то:

$$\frac{M_s}{m_s} \leq c, \quad M_s \leqq m_s c,$$

$$\mu_s < M_s \leq cm_s,$$

а вставивши відповідні вартости дістанемо:

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^2} \leq cm_s, \text{ або:}$$

$$\frac{1}{|\gamma_s z + \delta_s|^4} < c^2 \frac{k_s}{k_0},$$

а звідси:

$$\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-4} \angle \frac{c^2}{k_0} \sum{}' k_s \quad (\gamma_s = 0 \text{ опускаєм}), \qquad 27)$$

а що сума по правім боцї дає поверхню майже цїлого кола головного К, то сума по лївім боці, а тим більше сума $\sum{}' \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$ $(m = 2, 3, 4, —)$ є безглядно збіжна.

Цїле те розумоване можна розширити і на случай $\gamma_s = 0$, т. є. для $P_s = \infty$ (якому в колї головнім відповість $z = 0$), а тодї повна сума

$$\sum_s \left| \gamma_s z + \delta_s \right|^{-2m}$$

є безглядно збіжна для всїх точок кола К.

По за колом сума та стаєсь рівна ∞ в точках P_s, а в иньших точках $z \gtrless P_s$ сума та має значінє і є збіжна. Того доказувати не будем (се є майже очевидне, бо поодинокі вирази суми $| \gamma_s z + \delta_s |^{-2m}$ будуть для z по за колом k меньші як для z в колї).

На обводї кола К сума та єсть збіжна для родин III., IV., V., VII. кромі точок дїйсно особливих, де стає ся розбіжна, бо в їх безконечно близькім окруженю находять ся точки P_s. Що так є, легко можна доказати.

Най ξ буде вершком з циклю другого рода (на обводї кола К), то там збігає ся безконечно много районів; район R_0 переходить на R_s — як знаєм — через субституцию параболїчну (Кляйн) т. є.:

$$\frac{1}{t - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + \alpha_\sigma \qquad \sigma = 1, 2, 3, — \qquad 28)$$

Наколи субституцию ту будемо ітерувати, дістанемо з R_0 цїлий ряд районів, які всї мають вершок ξ. Для $t = \infty$ є $z = P_s$, а тодї з 28) слїдує:

$$z = P_s = \xi - \frac{1}{\alpha_\sigma}.$$

Наколи субституцию ітеруєм без кінця, то α_σ росте in inf., отже довкола ξ громадить ся безконечне число тих P_s. Q. e. d.

3. Poincaré узагальняє [1]) сей ряд в сей спосіб, що бере довільну функцию рациональну $H(z)$ о місцях ∞-них $a_1\, a_2 — a_p$.

---

[1]) Пор.: Math. Annalen, т. XIX.

Возьмім функцию $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$, де $\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \beta_s}$ є субституция ґрупи, то місця ∞-ні сеї функциї є:

$$a_\mu = \frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} \quad \mu = 1, 2, \cdots p.$$

Наколи
$$\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s} = f(z),$$
то навідворот:

$$z = \left[f_s(a_\mu)\right]^{-1} = f_{-s}(a_\mu).$$

f_{-s} є також субституция ґрупи. Функция $H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)$ — а є їх безконечне число — утворена з огляду на всї субституциї ґрупи має місця ∞-ні $f_s(a_\mu)$.

Poincaré творить тепер функцию:

$$\Theta(z) = \sum_s H\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)\left(\gamma_s z + \delta_s\right)^{-2m} \qquad 29)$$

яку називає функциєю Θ — Фухса або Кляйна після того, чи ґрупа є ґрупою Фухса чи Кляйна.

На всїх місцях z і їх окруженях, таких що $z \gtrless a_\mu$, $z \gtrless f_s(a_\mu)$ і $z \lesseqgtr P_s$ функция ся є збіжна безглядно і одностайно, бо все можна зробити, щоби решта від далекого s почавши була меньша як ε (довільно мале). Точки дїйсно особливі ґрупи (на обводї кола головного) є дїйсно особливими точками функциї $\Theta(z)$. — В деяких случаях можна точки a_μ і P_s так дібрати, щоби всї безконечности повідпадали, а тодї функция $\Theta(z)$ не має безконечностних місць анї в колї головнім анї по за ним.

Poincaré дїлить функциї Θ на родини після того, який район до них належить. Для функций Θ родини I., II., VI. є обвід кола головного лїнїю особливою — як каже Poincaré, для прочих родин находять ся на обводї кола головного лиш ізольовані місця особливі.

Возьмім функциї Θ родини I., II., VI.; функций тих по за коло перевести не можна, а що точцї z по за колом відповідає точка $\frac{1}{z}$ в колї, то маєм властиво дві функциї в колї K: $\Theta(z)_K$ і $\Theta\left(\frac{1}{z}\right)_K$.

Противно функциї Θ прочих родин можна переводити по за коло, а функция $\Theta(z)_z$ дефініює одну функцию на площи z.

Наколи місце зерове функциї находить ся в районї R_0, то в R_0 не ма до него рівноважного місця зерового. Наколи місце зерове находить ся на боцї першого рода, то рівноважне місце лежить також на боці першого рода; з таких двох місць зачисляєм до району лиш одно. Так само, коли місцем зеровим є вершок першого рода, а в ним сходить ся r районів, а місце зерове є степеня n, то до одного района зачисляєм місце зерове степеня $\frac{n}{r}$.

В загалї Poincaré приймає звичайно вершки першого рода за місця зерові, вершки другого рода за місця зерові першого степеня.

4. Возьмім функцию $\Theta(z)_K$ і належачий до неї район R_0, який обводу кола головного дотикає лиш в декотрих точках. Повідти наймо на хвилю вершки R_0 маленькими лучками і приймім після Poincaré, що по боках району не ма місць зерових, то тодї остануть лиш ті місця зерові для функциї Θ, які лежать в самім районї. Тодї — як з теориї Cauchy звісно — є, наколи m_0 є сількість місць зерових, а m_∞ скількість місць безконечностних в контурі:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\,dz = m_0 - m_\infty = E',$$

де за контур приймаєм R_0 з пообтинаними верщками. Наколиж в вершках району є ν місць зерових, то для функциї $\Theta(z)_K$ вийде ріжниця місць зерових і безконечностних:

$$E = E' + \nu,$$

що по обчисленю інтеґрала буде мало — після Poincaré — загальний вид:

$$E = m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \qquad 30)$$

де m є число, що характеризує функцию Θ (пор. 29), n скількість пар боків спряжених, p число, відносяче ся до поодиноких циклїв (порівнай рівн. 20); сума відносить ся до всїх циклїв.

Для функциї $\Theta(z)_z$ (родин III., IV., V., VII.) за район треба брати — як знаєм — R_0 і спряжений з ним R_0', то ту ріжниця:

$$E = 2m\left[n - 1 - \sum\frac{1}{p}\right] \qquad 31)$$

5. Піддаймо функцию Θ (z) субституциї ґрупи:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

то:

$$\frac{\alpha_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \beta_s}{\gamma_s \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \delta_s} = \frac{\alpha_\sigma z + \beta_\sigma}{\gamma_\sigma z + \delta_\sigma},$$

а тодї по підставленю в 29) випаде:

$$\Theta\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta(z) \qquad 32)$$

значить ся функция Θ є лиш функциєю псевдоавтоморфною.

Возьмім однак дві функциї Θ_1 і Θ_2, що належать до тої самої ґрупи, то:

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_1(z)$$

$$\Theta_2\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta_2(z).$$

Їх квот:

$$\frac{\Theta_1\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)}{\Theta_2\left(\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)} = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)} = F(z) \qquad 33)$$

Та функция F(z) є проте функциєю автоморфною.

Очевидно що і функциї автоморфні ділити ся будуть на родини, залежно від родини функций Θ.

Наколи з тої самої ґрупи возьмем функциї

$\Theta_1\ \Theta_2 \quad \Theta_s$ з параметрами $m_1\ m_2 \quad m_s$

і функциї $\overline{\Theta}_1\ \overline{\Theta}_2 \quad \overline{\Theta}_s$ з параметрами $\overline{m}_1\ \overline{m}_2 \cdots \overline{m}_s$ і утворимо квот їх добутків, то:

$$\frac{\Theta_1 \Theta_2 \cdots \Theta_s}{\overline{\Theta}_1 \overline{\Theta}_2 \cdots \overline{\Theta}_s}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2\left(\sum\limits_{\nu=1}^{s} m_\nu - \sum\limits_{\nu=1}^{s} \overline{m}_\nu\right)} \frac{\Theta_1 \Theta_2 \cdots \Theta_s}{\overline{\Theta}_1 \overline{\Theta}_2 \cdots \overline{\Theta}_s}(z)$$

Наколи доберемо $\Sigma m_\nu = \Sigma \overline{m}_\nu$, то сей квот станесь загальнїйшою функциєю автоморфною.

Місця зерові чисельника і безконечностні знаменника є місцями зеровими функциї автоморфної, а місця безконечностні чисельника та зерові знаменника є ії місцями безконечностними.

До функциї Θ_ν належить E_ν, до $\overline{\Theta}_\nu$ $\overline{E}_\nu$,

де:
$$E_\nu = m_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right]$$
$$\overline{E}_\nu = \overline{m}_\nu \left[n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{В чисельнику:} & \Sigma E_\nu = M_0 - M_\infty \\ \text{В знаменнику:} & \Sigma \overline{E}_\nu = \overline{M}_0 - \overline{M}_\infty \end{array}\right\}$$

де ті M мають значіне як повисше. Ріжниця:

$$\Sigma E_\nu - \Sigma \overline{E}_\nu = (M_0 + \overline{M}_\infty) - (\overline{M}_0 + M_\infty) =$$

$=$ сума місць зерових — сума місць безконечностних $=$

$$= \left(n - 1 - \sum \frac{1}{p}\right) \left[\Sigma m_\nu - \Sigma \overline{m}_\nu\right] = 0.$$

Кожда функция має проте ту власність, що в районї R_0 сума місць зерових рівнає ся сумі місць безконечностних.

Кожда функция автоморфна приймає кожду якунебудь вартість в районї R_0 тілько разів, кілько вартість 0 або ∞.

Бо наколи $F(z)$ є функциєю автоморфною, то і $f(z) = F(z) - C$ є такою функциєю; $f(z)$ стаєсь тілько разів безконечностию що $F(z)$, пр. n разів, то і зером стає n разів, т. є. $F(z)$ приймає вартість C n разів.

6. Возьмім дві функциї автоморфні, що належать до тої самої ґрупи т. є. $F_1(z)$ і $F_2(z)$. Функция $F_1(z) = C$ на місцях $z_1\, z_2 \cdots z_m$ району R_0; на тих місцях приймає функция $F_2(z)$ вартости $C_1\, C_1 \quad C_m$, ріжні між собою. Видко отже що до одної вартости функциї $F_1(z)$ належить m вартостий функциї $F_2(z)$, отже $F_2(z) = y$ є m-вартостнею функциєю функциї $F_1(z) = x$. Наколи сю залежність представимо рівнанєм:

$$y^m + g_1(x)\, y^{m-1} + \quad + g_m(x) = 0.$$

то рівнане се буде альґебраічне, а y буде альґебраічною функциєю x. Відворотно до одної вартости y належить n вартостий функциї x, x є проте альґебраічною функциєю y.[1])

Між двома функциями автоморфними з тої самої ґрупи заходить проте все неприводне рівнане альґебраічне:

$$G\left(x^{(n)}\, y^{(m)}\right) = 0. \qquad 35)$$

Так як всї вартости функций x і y находять ся в районї R_0, а функциї ті є однозначними функциями кождої точки z, а район R_0 дасть ся — як знаєм — замінити на поверхню ряду p, то після теориї поверхний Riemann'а мусить бути рівнане 35) ряду p.

Наколи возьмем три функциї автоморфні тої самої ґрупи:

$$x = F_1(z),\ y = F_2(z),\ X = F_3(z),$$

то після попередного будуть істнувати реляциї:

$$G_1(Xx) = 0$$

$$G_2(Xy) = 0.$$

Рівнаня ті яко неприводні не мають повтаряючих ся коренів X; а коли так є, то сей корінь є рациональною функциєю сочинників обох рівнань, отже:

$$X = R(xy) \qquad 36)$$

Кожда автоморфна функция є проте рациональною функциєю яких-небудь двох функций автоморфних з тої самої ґрупи.

7. a. Возьмім тепер функцию явтоморфну:

$$F(t) = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = F(z),$$

то через ріжничковане дістанемо ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$)

$$\frac{F'(t)}{(\gamma z + \delta)^2} = F'(z)$$

а з відси:

$$\left[F'(t)\right]^m = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m}\left[F'(z)\right]^m,$$

[1]) Пор. Biermann: Zur Theorie der Fuchsschen Functionen (Sitz. Ber. der k. Akad. der Wiss. in Wien Bd. XCII, Abth. II).

а що:

$$\Theta(t) = \left(\gamma z + \delta\right)^{2m} \Theta(z),$$

то квот:

$$\frac{\Theta(t)}{\left[F'(t) \right]^m} = \frac{\Theta(z)}{\left[F'(z) \right]^m} =$$

$$= R\left(F(z)\ F_1(z)\right)$$

(після 36), бо сей добуток є функциєю автоморфною).

Отже функция псевдоавтоморфна виражає ся в сей спосіб через дві функциї автоморфні, що:

$$\Theta(z) = \left[F'(z) \right]^m R(F, F_1) \qquad 37)$$

б. Знаєм, що $G(F_1 F_2) = 0$.

Звідси через ріжничковане вийде:

$$\frac{\partial G}{\partial F_1} d F_1 + \frac{\partial G}{\partial F_2} d F_2 = 0,$$

або:

$$\frac{d F_2}{d F_1} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial F_1}}{\frac{\partial G}{\partial F_2}} = R_1 (F_1 F_2),$$

де R_1 є функциєю рациональною, отже між двома функциями автоморфними заходять звязь:

$$\frac{d F_2}{d F_1} = R_1 (F_1 F_2) \qquad 38)$$

в. Для функциї автоморфноЇ $F(z)$ маєм:

$$F'(t) = (\gamma z + \delta)^2 F'(z)$$

Наколи збудуємо вираженє:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2,$$

яке Cayley назвав **шварциян ом**, а яке Кляйн значить: $\left[F(t)\right]_t$, а Forsyth (Theory of Functions) через $\left\{F(t),\ t\right\}$ то дістанемо:

$$\frac{F'''(t)}{F'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(t)}{F'(t)}\right)^2 = \left(\gamma z + \delta\right)^4 \left[\frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2\right],$$

а що:

$$\left[F'(t)\right]^2 = \left(\gamma z + \delta\right)^4 \left[F'(z)\right]^2,$$

то через поділене обох тих рівнань дістанемо:

$$\frac{\left[F(t)\right]_t}{\left[F'(t)\right]^2} = \frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2} \qquad 39)$$

Шварциян функциї автоморфноï, поділений через квадрат походноï сеї функциï, є функциєю автоморфною.

А що між двома функциями артоморфними все заходить звязь альґебраїчна, тому кожда функция автоморфна сповняє рівнане ріжничкове третого ряду:

$$G\left(F(z),\ \frac{\left[F(z)\right]_z}{\left[F'(z)\right]^2}\right) = 0. \qquad 40)$$

8. Poincaré впроваджує даліï[1]) так звані функциï Z — Фухса. Називає він іменно n функций:

$$Z_1(z),\ Z_2(z), \qquad Z_n(z)$$

тодіï функциями Z Фухса, наколи сповняють реляцию:

$$Z_\lambda\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right) = \overset{(s)}{A}_{1\lambda} Z_1(z) + \overset{(s)}{A}_{2\lambda} Z_2(z) + \qquad + \overset{(s)}{A}_{n\lambda} Z_n(z) \qquad 41)$$

де визначник сталих рівнає ся 1, а дана субституция є взята з ґрупи G Фухса. (Наколи ґрупа є ґрупою Кляйна, то ті функциї будуть функциями Z-Кляйна).

Ґрупа H субституций лініїних:

$$y_\lambda' = \overset{(s)}{A}_{1\lambda}\, y_1 + \overset{(s)}{A}_{2\lambda}\, y_2 + \cdots\cdots \overset{(s)}{A}_{n\lambda}\, y_n$$

є очевидно ізоморфна до ґрупи G Фухса.

---

[1]) Пор. Math. Annalen. т. XIX.

Возьмім тепер яке-небудь рівнане ріжничкове лінїове:

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \qquad 42)$$

— де через відповідну трансформацию P_{n-1} ідентично стало ся 0 що всегда дасть ся зробити — і де сочинники P є функциї рациональні двох арґументів x і y, звязаних рівнанем альґебраічним:

$$G(x\,y) = 0,$$

і приймім, що $a_1\ a_2 \cdots a_n$ є точками особливими рівнаня $G(xy) = 0$, а безконечностними виражень P.

Наколи положим $x = F(z)$, де $F(z)$ є функциєю Фухса, істнуючою лиш в колї K — що як передше сказано можна зробити, — то тодї і y є такою самою функциєю Фухса, а n інтеґралами рівнаня 42) є функциї $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_n(z)$, які є однозначні і які істнують лиш в колї K. Інтеґрали ті — так як і $F(z)$ — можна розвинути на ряди збіжні після арґументу $(z - z_0)$, а їх сочинники способом зворотним (recurrent) обчислити. Інтеґрали ті — як легко пізнати — є однак функциями Z-Фухса, маєм отже твердженє:

Кожде рівнанє ріжничкове лїнїове з сочинниками альґебраічними дасть ся з'інтеґрувати через функциї Z-Фухса (подекуди через функциї автоморфні Фухса).

Результат сей очевидно не є одинокий. Ми могли місто x вставити безконечне число иньших функций Фухса, а навіть функций Кляйна і булибисьмо дістали на інтеґрали рівнаня 42) безконечне число системів функций Z-Фухса або Z-Кляйна. Скількість інтеґралів рівнаня 42) за ужитєм нових змінних перестуиних стаєсь проте безконечно велика.

9. Постараймо ся тепер о представленє тих функций Z, анальоґічно як функциї Фухса представили ми при помочи функций Θ.

Най $\quad a^{(s)}_{1\lambda},\ a^{(s)}_{2\lambda}, \quad a^{(s)}_{n\lambda}$

будуть мінорами визначника, утвореного з величин $A^{(s)}$.

Приймім тепер, що обі ґрупи G і H є дані і возьмім n функций рациональних $H_1(z)$, $H_2(z)$, $\cdots H_n(z)$ — як в уступі 3. сего роздїлу. Збудуймо після Poincaré n рядїв:

$$\Phi_\lambda(z) = \sum_s \sum_{t=1}^{n} a^{(s)}_{\lambda t}\, H_t\left(\frac{\alpha_s z + \beta_s}{\gamma_s z + \delta_s}\right)\left(\gamma_s z + \delta_s\right)^{-2m} (\lambda = 1, 2, \cdots n), \quad 34)$$

то ті ряди для достаточно великого m є збіжні і мають очевидне свойство:

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_s z+\beta_s}{\gamma_s z+\delta_s}\right)=\sum_{t=1}^{n}\overset{(s)}{A}_{t\lambda}\,\Phi_t(z)\left(\gamma_s z+\delta_s\right)^{2m} \qquad 44)$$

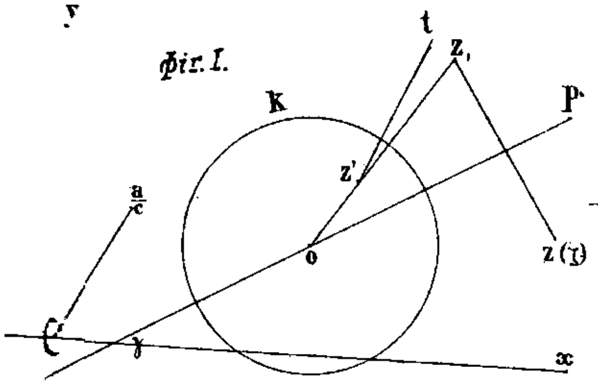
Наколи утворимо тепер n функций: $\frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)}$, де Θ є функцією Θ-Фухса, то ті функциї будуть функциями Z-Фухса, так що:

$$Z\lambda(z)=\frac{\Phi\lambda(z)}{\Theta(z)} \qquad 45)$$

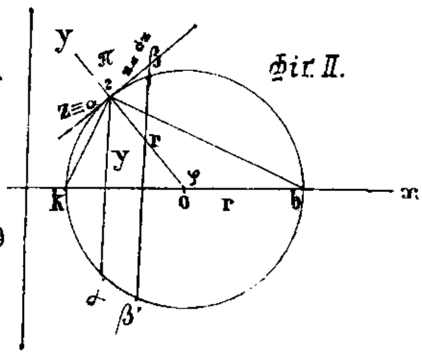
Наколи возьмем який-небудь систем функций Z, то можна доказати, що функциї ті дадуть ся всегда виразити рационально через певне число рядів анальоґічних до $\Theta(z)$ і рядів форми 43).

На тім кінчимо короткий перегляд сеї інтересної теориї; очевидно сей начерк далекий є від точного та повного представленя теориї функций явтоморфних, а має лиш на цїли запізнати та впровадити читачів в самі ессенциональні єї моменти.

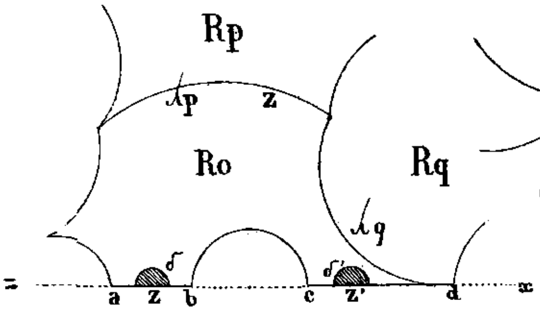
Тернопіль, в липню 1900.



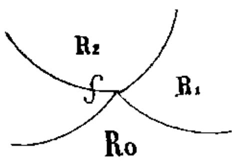
фiг. I.



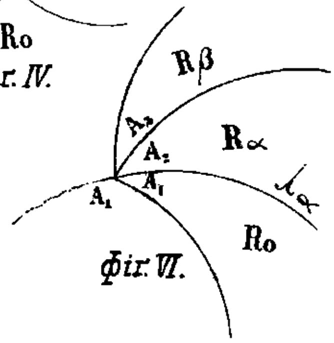
фiг. II.



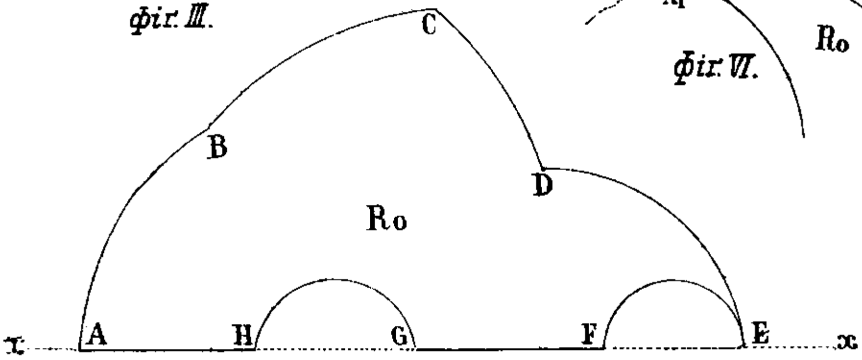
фiг. III.



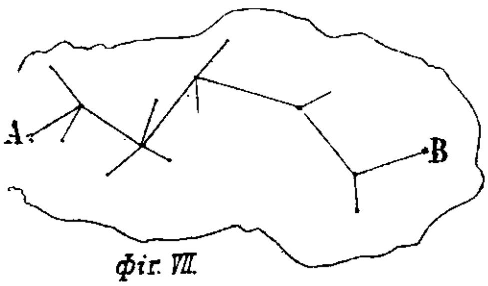
фiг. IV.



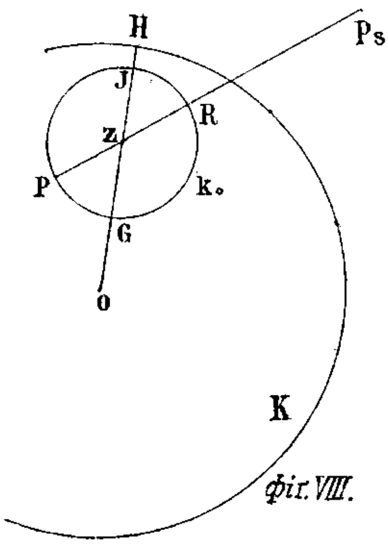
фiг. VI.



фiг. V.



фiг. VII.



фiг. VIII.