

Über die Erzeugnisse krummer projektiver Gebilde, deren
Träger unikursale Plankurven sind.

(III. Mitteilung).¹⁾

von

Dr. B. Kalicun in Lemberg.

III. Über das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen, einer auf einer Kurve K^n n^{er} Ordnung mit einem $(n - 1)$ -fachen Punkte und einer anderen auf einer Kurve K^p p^{er} Ordnung mit einem $(p - 1)$ -fachen Punkte, wenn die Trägerkurven in zwei verschiedenen Ebenen liegen²⁾.

1. Es seien die Vielfachpunkte der Trägerkurven K^n und K^p beziehungsweise mit V^{n-1} und V^{p-1} bezeichnet. Die Verbindungsgerade v dieser Punkte sei als die Achse zweier projektiver Ebenenbüschel (α) und (α') angenommen. Jede Ebene α des Büschels (α) schneidet die Kurve K^n in je einem Punkte A , und jede Ebene α' des Büschels (α') schneidet die Kurve K^p in je einem Punkte A' . Die Punkte A und A' , welche in den entsprechenden Ebenen der projektiven Ebenenbüschel liegen, werden als entsprechende Elemente der projektiven Punktreihen (A) und (A') betrachtet. Es handelt sich nun um das Gebilde,

¹⁾ Die vorliegende Abhandlung bildet eine Fortsetzung zu den Untersuchungen, welche der Verfasser in den Abhandlungen unter demselben Titel in den Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, und zwar I. Mitteilung im Bd. CXXII. Abt. II a. Februar 1913, II. Mitteilung im Bd. CXXIII. Abt. II a. Februar 1914 — veröffentlicht hat.

²⁾ Anstatt der unikursalen Plankurven können hier mit gewissen Voraussetzungen unikursale Raumkurven angenommen werden.

welches die Verbindungsgeraden der entsprechenden Elemente dieser Punktreihen erzeugen. Es wird leicht nachzuweisen, daß dieses Gebilde eine windschiefe Regelfläche R^{n+p} des $(n+p)^{\text{en}}$ Grades ist. Um den ersten Teil dieses Satzes zu beweisen, betrachten wir ein Paar entsprechender Punkte A und A' und ihre Nachbarpunkte A_1 und A_1' . Die Verbindungsgeraden $AA' \equiv g$ und $A_1A_1' \equiv g'$ bilden zwei unmittelbar folgende Erzeugende des Erzeugnisses. Da aber die Tangenten AA_1 und $A'A_1'$ der Trägerkurven K^n und K^p im allgemeinen auf einander windschief stehen, so müssen auch die Geraden g und g' windschief sein. Der zweite Teil des Satzes wird folgendermaßen bewiesen¹⁾: Eine Ebene \mathfrak{X} , welche durch eine Gerade l beliebig gelegt wird, schneidet die Kurve K^n in n Punkten X , denen ebensoviel Punkte X' auf K^p projektiv entsprechen, welche in n Ebenen des Büschels (l) liegen. Jede beliebige andere Ebene \mathfrak{X}' durch l schneidet wiederum K^p in p Punkten X' , denen ebensoviel Punkte X auf K^n projektiv entsprechen, welche in p Ebenen des Büschels (l) liegen. Es entsteht daher in l eine Ebenenkorrespondenz $[n, p]$; in jeder von $n+p$ Koinzidenzebenen liegt je eine Erzeugende, welche folglich die Gerade l schneiden muß. Die beliebige Gerade l trifft somit die Regelfläche R^{n+p} in $n+p$ Punkten, diese Fläche ist also des $(n+p)^{\text{en}}$ Grades, was zu beweisen war.

Durch die Achse v und $n-1$ Vielfachpunktstangenten der K^n im V^{n-1} gehen $n-1$ Ebenen, denen, zum Ebenenbüschel (α) gerechnet, ebensoviel im Ebenenbüschel (α') projektiv entsprechen; diese letzteren schneiden die Kurve K^p in $n-1$ Punkten, welche mit V^{n-1} verbunden $n-1$ Erzeugende der Fläche liefern. Der Punkt V^{n-1} wird daher zu einem $(n-1)$ -fachen ebenso der Punkt V^{p-1} zu einem $(p-1)$ -fachen Punkte der Regelfläche R^{n+p} . Die Gerade $V^{n-1}V^{p-1} \equiv v$ trifft daher die Fläche R^{n+p} außer V^{n-1} und V^{p-1} noch in zwei Punkten, welche sich auf folgende Weise bestimmen lassen: Die projektiven Ebenenbüschel (α) und (α') haben zwei Doppelebenen δ_1 und δ_2 , von denen jede, wie leicht zu bemerken, je eine Erzeugende der Fläche enthält. Diese Erzeugenden schneiden die Achse v in den gesuchten Punkten.

Haben die Trägerkurven einen gemeinschaftlichen Punkt Z , der sich selbst in beiden projektiven Punktreihen entspricht, so ist die erzeugte Regelfläche nur des $(n+p-1)^{\text{en}}$ Grades; denn jede Gerade, welche durch den Punkt Z geht wird als eine uneigentliche Erzeugende

¹⁾ Vergl. Cremona. Allgemeine Theorie der Oberflächen, übersetzt von Curtze — p. 54.

der Fläche angesehen; eine beliebige Gerade l schneidet daher nur $n + p - 1$ eigentliche Erzeugende. Diese Fläche wird ferner nur des $(n + p - 2)^{\text{en}}$ Grades sein, wenn die Trägerkurven zwei gemeinsame sich selbst projektiv entsprechende Punkte haben.

Haben die Trägerkurven k gemeinsame sich selbst projektiv entsprechende Punkte, so ist das erzeugte Fläche des $(n + p - k)^{\text{en}}$ Grades. Die projektiven Punktreihen sind perspektiv und von demselben Ebenenbüschel (α'') in beide Trägerkurven eingeschnitten. Die Achse v des Ebenenbüschels (α'') wird in diesem besonderen Falle von sämtlichen Erzeugenden getroffen, sie liegt damit gänzlich auf dieser Fläche. Also:

Zwei projektive Punktreihen, die eine auf einer unikursalen Kurve K^n n^{er} Ordnung und die andere auf einer unikursalen Kurve K^p p^{er} Ordnung erzeugen eine windschiefe Regelfläche des $(n + p)^{\text{en}}$ Grades, welche die Vielfachpunkte der Trägerkurven zu ihren Vielfachpunkten derselben Ordnung hat. Die Ebene der Trägerkurve K^n ist eine p -fache und diese der Trägerkurve K^p eine n -fache Tangentialebene der Fläche. — Haben die Trägerkurven k sich selbst projektiv entsprechende gemeinsame Punkte, so wird diese Fläche des $(n + p - k)$ Grades, wobei für $k > 2$ die Verbindungsgerade der Vielfachpunkte der Trägerkurven von sämtlichen Erzeugenden geschnitten wird.

2. Wir wollen die Regelfläche R^{n+p} aus einem Punkte S_1 auf eine Ebene π projizieren. Es werden dabei projiziert: die Trägerkurven K^n und K^p in die Kurven K_1^n und K_1^p derselben Ordnungen, die projektiven Punktreihen (A) und (A') in die projektiven Punktreihen (A_1) und (A_1'), ferner die Erzeugende g , welche die entsprechenden Punkte A und A' der (A) und der (A') verbindet, in die Gerade g_1 , welche die entsprechenden Punkte A_1 und A_1' der (A_1) und der (A_1') verbindet. Die Projektionen g_1 der Erzeugenden g umhüllen eine Kurve $^1\Omega^{n+p}$, welche als das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen (A_1) und (A_1') der $(n + p)^{\text{en}}$ Klasse des 0^{en} Geschlechtes, daher der $2(n + p - 1)^{\text{en}}$ Ordnung sein muß¹⁾. Man gelangt daher zum Satze:

Aus einem beliebigen Punkte des Raumes der Regelfläche R^{n+p} umschriebener Kegel ist der $(n + p)^{\text{en}}$ Klasse der $2(n + p - 1)^{\text{en}}$ Ordnung des 0^{en} Geschlechtes.

¹⁾ Vergl. die erwähnte Abhandlung des Verfassers unter demselben Titel II. Mitteilung p. 5. Diese Mitteilung werden wir fortan der Kürze halber mit „II“ bezeichnen.

Der scheinbare Umriss der Regelfläche R^{n+p} auf einer beliebigen Rißebeue π ist eine Kurve der $(n+p)^{\text{en}}$ Klasse der $2(n+p-1)^{\text{en}}$ Ordnung des 0^{en} Geschlechtes.

Die Doppeltangenten der Rißkurve ${}^1R^{n+p}$ lassen sich auf dieselbe Weise wie in II. p. 4. bestimmen und sie stellen die Schnittgeraden der Rißebeue π mit den Doppeltangentialebenen der Fläche R^{n+p} dar, welche durch den Punkt S_1 hindurchgehen. Da aber ${}^1R^{n+p}$ $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Doppeltangenten haben muß, so erhalten wir

den Satz:

Die doppelberührende Developpable der Regelfläche R^{n+p} ist der $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Klasse.

Der Berührungspunkt der Tangente g_1 der Kurve ${}^1R^{n+p}$ läßt sich nach II. p. 7. linear konstruieren und die Verbindungsgerade dieses Punktes mit S^1 bildet die Berührungskante der Tangentialebene $S_1 g_1$ des Kegels S_1 (${}^1R^{n+p}$). Diese Kante trifft die Erzeugende g der Fläche R^{n+p} in dem Berührungspunkte der Tangentialebene $S_1 g \equiv S_1 g_1$ mit R^{n+p} . Man kann daher auf diese Weise linear die Kurve bestimmen, die den wirklichen Umriss der Regelfläche R^{n+p} bildet.

3. Lassen wir die Regelfläche R^{n+p} aus einem anderen Punkte S_2 auf dieselbe Rißebeue π projizieren, so erhalten wir eine zweite Rißkurve ${}^2R^{n+p}$, welche von den projektiven Punktreihen (A_2) und (A_2') auf den Kurven K_2^p , K_2^n erzeugt erscheint, wenn diese Punktreihen und diese Kurven die Projektionen aus S_2 der Punktreihen (A) , (A') bzw. der Kurven K^n , K^p darstellen.

Die projektiven Punktreihen: $(A_1) \overline{\wedge} (A_1')$, $(A_2) \overline{\wedge} (A_2')$, ferner $(A_1) \overline{\wedge} (A_2)$ und $(A_1') \overline{\wedge} (A_2')$ veranlassen eine eindeutige Beziehung zwischen den Tangentenbüscheln (g_1) und (g_2) der Rißkurven ${}^1R^{n+p}$ und ${}^2R^{n+p}$, wobei jedes Paar entsprechender Tangenten g_1, g_2 dieser Kurven als die Projektionen aus den Zentren S_1, S_2 derselben Erzeugenden g der Regelfläche R^{n+p} erscheinen. Die beiden Rißkurven ${}^1R^{n+p}$ und ${}^2R^{n+p}$ haben aber $n+p$ solche gemeinsame Tangenten t , welche in der erwähnten eindeutigen Beziehung sich selbst entsprechen. Es wird nämlich die Verbindungsgerade $S_1 S_2$ beider Zentren von $n+p$ Erzeugenden der Fläche R^{n+p} geschnitten; die Projektionen dieser Erzeugenden aus S_1 und S_2 auf π fallen daher zusammen. — Diese gemeinsamen Tangenten bilden daher einen Bestandteil der $(n+p)^{\text{en}}$ Ordnung der Kurve $\mathbb{C}^{2(n+p)}$ der $2(n+p)^{\text{en}}$ Ordnung, welche nach II. p. 10. von den pro-

jektiven Tangentenbüscheln (g_1) und (g_2) der Rißkurven ${}^1\mathbb{R}_{n+p}$ und ${}^2\mathbb{R}_{n+p}$ erzeugt wird. Der übrige Bestandteil dieses Erzeugnisses bildet somit eine Kurve \mathbb{C}^{n+p} der $(n+p)^{\text{en}}$ Ordnung, welche als Schnittkurve der Fläche R^{n+p} mit der Ebene π erscheint. Die Kurve $\mathbb{C}^{2(n+p)}$ ist bekanntlich des 0^{en} Geschlechtes, sie hat daher $\binom{2(n+p)}{2} - 1$ Doppelpunkte. Läßt man von diesen letzteren $\binom{n+p}{2}$ Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten t unter einander und $(n+p-1)(n+p)$ ihre Schnittpunkte mit \mathbb{C}^{n+p} subtrahieren, so erübrigen $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Doppelpunkte der Schnittkurve \mathbb{C}^{n+p} , welche somit des 0^{en} Geschlechtes sein muß. Dadurch gelangt man zum Satze:

Von zwei projektiven Punktreihen auf zwei unkursalen Kurven erzeugte Regelfläche R^{n+p} ist des 0^{en} Geschlechtes.

Die Doppelpunkte der Schnittkurve \mathbb{C}^{n+p} , die sich nach II. p. 9. bestimmen lassen, sind die Schnittpunkte der Schnittebene π mit der Doppelkurve D der Fläche. Also:

Die Doppelkurve D der Regelfläche R^{n+p} ist der $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Ordnung, wobei durch den Vielfachpunkt V^{n-1} $\binom{n-1}{2}$ und durch den Vielfachpunkt V^{p-1} $\binom{p-1}{2}$ Zweige dieser Kurve hindurchgehen. Es gehen nämlich durch V^{n-1} $n-1$ und durch V^{p-1} $p-1$. Erzeugende der Fläche, welche einander in $\binom{n-1}{2}$ beziehungsweise in $\binom{p-1}{2}$ Punkten der Doppelkurve D treffen.

Geht daher die gedachte Schnittebene π durch die Gerade $V^{n-1}V^{p-1} \equiv v$, so hat die Schnittkurve \mathbb{C}^{n+p} in V^{n-1} einen $(n-1)$ -fachen und in V^{p-1} einen $(p-1)$ -fachen Punkt, von welchen der erste mit $\binom{n-1}{2}$ und der zweite mit $\binom{p-1}{2}$ ihren Doppelpunkten gleichbedeutend sind; die Ebene π schneidet somit die Doppelkurve D noch in $n+p-1$ Punkten. Fällt aber die Ebene π mit einer von den Doppelsebenen δ der projektiven Ebenenbüschel (α) und (α') zusammen, so liegen $n+p-2$ von diesen Punkten auf der in dieser Doppelsebene

sich befindenden Erzeugenden¹⁾. Die Schnittkurve besteht in diesem Falle aus dieser Erzeugenden und einer Kurve \mathbb{C}^{n+p-1} , welche außer einem $(n-1)$ -fachen und einem $(p-1)$ -fachen Punkte noch $(n-1)(p-1)$ Doppelpunkte hat. Also:

Auf der Regelfläche R^{n+p} liegen zwei Plankurven der $(n+p-1)^{\text{en}}$ Ordnung des \mathbb{C}^{en} Geschlechtes, wobei dieses Geschlecht außer einem $(n-1)$ -fachen und einem $(p-1)$ -fachen Punkte noch durch $(n-1)(p-1)$ Doppelpunkte bedingt wird.

Die eindeutige Beziehung zwischen den Tangentenbüscheln (g_1) und (g_2) der Rißkurven ${}^1R_{n+p}$ und ${}^2R_{n+p}$ gibt uns ein Mittel nicht nur die Punkte der Schnittkurve \mathbb{C}^{n+p} sondern auch in einem beliebigen Punkte der Fläche R^{n+p} ihre Tangentialebene linear zu konstruieren. Man kann nämlich nach II. p. . . . in einem beliebigen Punkte X der Kurve \mathbb{C}^{n+p} ihre Tangente linear konstruieren, und diese letztere bestimmt mit der durch X gehenden Erzeugenden der Fläche die Tangentialebene im Punkte X .

4. Durch jeden Punkt Y der Schnittkurve \mathbb{C}^{n+p} geht eine Erzeugende der Fläche, welche die Doppelkurve D in $n+p-2$ Punkten trifft. Durch jeden von diesen letzteren geht je eine Erzeugende, welche \mathbb{C}^{n+p} in je einem Punkte Y' trifft, so daß es dem Punkte X $n+p-2$ Punkte Y' korrespondieren. Aber auch jedem Punkte Y' korrespondieren auf dieselbe Weise $n+p-2$ Punkte Y . Es entsteht daher auf \mathbb{C}^{n+p} eine Korrespondenz $[n+p-2, n+p-2]$, deren $2(n+p-2)$ Koinzidenzpunkte auf ebensoviel solchen Erzeugenden liegen, welche von ihren unmittelbar folgenden Erzeugenden geschnitten werden²⁾. Die Regelfläche R^{n+p} hat daher $2(n+p-2)$ singuläre Erzeugende, also ebensoviel Kuspidalpunkte und Kuspidalebene.

5. Wir wollen schließlich noch besondere Arten der Fläche R^{n+p} betrachten.

a. Verbindet die Doppelebene δ_1 der projektiven Ebenenbüschel (α) und (α') eine Vielfachpunktstangente der Trägerkurve K^n und eine Vielfachpunktstangente der Trägerkurve K^p , so wird die Gerade $V^{n-1} V^{p-1} \equiv v$ zu einer Erzeugenden der Fläche. Die Gerade $V^{n-1} V^{p-1} \equiv v$ wird daher zu einer Doppelerzeugenden, wenn in beiden Doppelebenen δ_1, δ_2 der Ebenenbüschel (α) und (α') je ein Paar entsprechender Vielfachpunktstangenten der Trägerkurven liegen. Die Doppelkurve D

¹⁾ Vergl. Cremona. Allgemeine Theorie etc. p. 53.

²⁾ Ebenda p. 58.

wird in diesem Falle aus der genannten Erzeugenden und einer Kurve der $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2} - 1$ Ordnung bestehen.

b. Sind die Punktreihen (A) und (A') perspektiv (Vergl. p. 3), so kann der Fall eintreten, daß r ($r < p < n$) Vielfachpunktstangenten der Trägerkurve K^n ebensovielen Vielfachpunktstangenten der Trägerkurve K^p projektiv entsprechen. Die Gerade $V^{n-1} V^{p-1} \equiv v$ wird in diesem Falle zu einer r fachen Erzeugenden der Fläche, daher zu einem Bestandteile der $\binom{r}{2}^{en}$ -Ordnung der Doppelkurve D .

c. Wird insbesondere $p = 1$ angenommen, so erhalten wir zum Erzeugnisse einer krummer Punktreihe (A) auf einer Kurve K^n n^{er} Ordnung mit einem $(n-1)$ -fachen Punkte V^{n-1} und einer projektiven geraden Punktreihe (A') auf einer Geraden a eine Regelfläche R^{n+1} des $(n+1)^{en}$ Grades, welche in V^{n-1} einen $(n-1)$ -fachen Punkt hat. Diese Fläche wird daher von jeder Geraden durch V^{n-1} noch in 2 Punkten getroffen, und von jeder Ebene durch V^{n-1} in einer Kurve der $(n+1)^{en}$ Ordnung geschnitten, welche in diesem Punkte einen $(n-1)$ -fachen Punkt hat; diese Kurve schneidet daher die Doppelkurve D noch in $n-1$ Punkten. Sind die Punktreihen (A) und (A') perspektiv, so wird die Achse des Ebenenbüschels (α') gänzlich von der Regelfläche R^{n+1} enthalten; diese Fläche würde in diesem Falle zwei gerade Linien haben.

Trifft die Trägergerade a die Trägerkurve K^n in einem Punkte, der sich selbst projektiv entspricht, so ist die Regelfläche nur des n^{en} Grades. Durch einen von $n-2$ Doppelpunkten auf einer Erzeugenden g dieser Fläche durch den $(n-1)$ -fachen Punkt V^{n-1} gelegte Gerade g trifft die Fläche in $n+1$ Punkten, sie wird daher gänzlich von dieser Fläche enthalten. Wären daher die gedachten Doppelpunkte auf jeder Erzeugenden g verschieden, so müßte jede Ebene durch V^{n-1} und je eine Erzeugende die Fläche R^n in n Geraden schneiden, von welchen $n-2$ durch V^{n-1} gingen. Die Fläche R^n würde somit aus einem Kegel der $(n-2)^{en}$ Ordnung mit dem Scheitel V^{n-1} und einer Fläche 2^{er} Ordnung bestehen. Auf dieser Fläche 2^{er} Ordnung müßte aber die Plankurve K^n n^{er} Ordnung liegen, was unmöglich ist. Daraus ist ersichtlich, daß die Doppelpunkte auf jeder Erzeugenden g in je einem Punkte sich vereinigen und folglich sämtlich auf einer durch V^{n-1} gehenden Geraden liegen müssen. Die Doppelkurve der Regelfläche R^n erscheint daher als eine $(n-1)$ -fache Gerade dieser Fläche. Also:

Zwei projektive Punktreihen, von denen die eine auf einer Kurve K^n der n^{en} Ordnung mit einem $(n-1)$ -fachen Punkte V^{n-1} und die andere auf einer Geraden a liegen, wobei die Gerade a die Kurve K^n in einem sich selbst projektiv entsprechenden Punkte trifft, erzeugen eine Regelfläche R^n des n^{en} Grades, welche eine $(n-1)$ -fache durch V^{n-1} gehende Gerade enthält.

Was Eigenschaften und eine eindeutige Abbildung der letztgenannten Regelfläche anbelangt, sei es an die Abhandlung des Verfassers „Beiträge zu den Regelflächen V^{er} Ordnung“ hingewiesen, welche in den Sitzungsberichten der Kaiser. Akademie der Wissenschaften in Bd. CXX und CXXI veröffentlicht wurden.

Inhaltsangabe.

In der vorgelegten Abhandlung wird das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen untersucht, wenn diese Punktreihen auf zwei Kurven n^{er} und p^{er} Ordnungen in zwei verschiedenen Ebenen angenommen werden.

Nach der Festsetzung, daß dieses Erzeugnis im allgemeinen eine windschiefe Regelfläche des $(n+p)^{\text{en}}$ Grades ist, wird auf die Erniedrigung dieses Grades durch besondere Lage der projektiven Punktreihen hingewiesen.

Durch eine Zentralprojektion dieser Fläche auf eine beliebige Ebene gelangt man zu einem Beweise, daß die doppelberührende Developpable dieser Fläche der $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Klasse ist, und ferner zu einer linearen Konstruktion des scheinbaren und des wirklichen Umrisses dieser Fläche.

Zwei Zentralprojektionen dieser Fläche führen zum Beweise, daß die Doppelkurve dieser Fläche der $\frac{(n+p-1)(n+p-2)}{2}$ Ordnung ist, und ferner zu einer linearen Konstruktion der ebenen Schnittkurve und der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte der Fläche.

Schließlich wird bewiesen, daß, wenn eine Punktreihe auf einer unikursalen Kurve n^{er} Ordnung und die andere auf einer Geraden angenommen ist, wobei die Trägerkurve von der Trägergeraden in einem sich selbst projektiv entsprechenden Punkte getroffen wird, die Regelfläche des n^{en} Grades ist und eine $(n-1)$ -fache Gerade enthält.

