ПРО ОРТОГОНАЛЬНІ ПІДПРОСТОРИ У ЩІЛЬНО ВКЛАДЕНИХ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

©*2009 р. Анатолій ПЛІЧКО*

Краківська політехніка ім. Тадеуша Косцюшка
вул. Варшавська 24, Краків 31-155, Польща
e-mail:aplichko@usk.pk.edu.pl

Редакція отримала статтю 20 жовтня 2009 р.

У замітці доводиться наступне твердження. Нехай $H_0 \hookrightarrow H$ – пара вкладених сепарабельних гільбертових поросторів. Тоді існують такі замкнені ортогональні підпростори X та Y в H_0, які щільні в H.

Кажуть, що банахів простір $(X_0, \|\cdot\|_0)$ *щільно вкладений* у банахів простір $(X, \|\cdot\|)$, якщо X_0 – щільний в X_0 лінійний підпростір, $X_0 \neq X$ та $\|x\| \leq \|x\|_0$ для кожного $x \in X_0$. У замітці [2] було доведене наступне твердження.

Нехай $X_0 \hookrightarrow X$ – пара щільно вкладених банахових просторів, причому X_0 гільбертів, а X має базис. Тоді в X_0 існує ортогональна система, що буде базисом в X, але не в X_0.

У зв'язку з цим і деякими питаннями теорії операторів у гільбертових просторах М. Федик поставив питання, позитивною відповіддю на яке є основний результат цієї замітки.

Розглянемо пару $H_0 \hookrightarrow H$ щільно вкладених сепарабельних гільбертових просторів. Далі $\langle\ ,\ \rangle$ означатиме скалярний добуток у просторі H_0 , $A^\top$ – анулятор підмножини $A \subseteq H_0^*$ у H_0, а lin – лінійну оболонку. Позначимо через J канонічне відображення H_0 на H_0^* : $(Jx)(y) = \langle x, y\rangle$.

Зауваження 1. З означення відразу випливає що спряжений простір H^* буде щільно вкладеним в H_0^*, причому лінійний підпростір $H^* \subseteq H_0^*$ має там першу категорію. Звідси випливає, що для кожного замкненого підпростору $G \subseteq H_0^*$ скінченної ковимірності, множина $G \backslash H^*$ щільна в G.

УДК 519.9; MSC 2000: 46C05

Теорема 1. *Нехай* $H_0 \hookrightarrow H$ *– пара вкладених сепарабельних гільбертових просторів. Тоді існують такі замкнені ортогональні підпростори* X *та* Y *з* H_0*, що і* X *щільний в* H*, і* Y *щільний в* H*.*

Доведення. Ми використаємо конструкцію з [2]. Візьмемо довільний ортонормальний базис (e_n) простору H. Візьмемо довільні числа $\varepsilon_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1$. Побудуємо таку послідовність (x_n) з H_0, що для кожного натурального n :

1) $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$,

2) $F_n \cap H^* = 0$, де $F_n = \mathrm{lin}(Jx_i)_1^n$

і для кожного парного $n = 2k$

3) $\|x_{n-1} - e_k\| < \varepsilon_k$ та $\|x_n - e_k\| < \varepsilon_k$.

Конструкцію проведемо індукцією за парними n. Підпростір $J^{-1}(H^*) \subseteq H_0$ є першої категорії. Тому існує елемент $x_1 \in H_0$, $x_1 \notin J^{-1}(H^*)$, для якого

$$\|x_1 - e_1\| < \varepsilon_1 .$$

За побудовою, $F_1 \cap H^* = 0$; отже анулятор $F_1^\top \subset H_0$ щільний там за нормою $\| \cdot \|$. Тому, внаслідок зауваження 1, існує елемент $x_2 \in F_1^\top$, $x_2 \notin J^{-1}(H^* + F_1)$, для якого

$$\|x_2 - e_1\| < \varepsilon_1 .$$

Згідно з вибором x_2 , $Jx_2 \notin H^* + F_1$, тому умова 2) виконується. Перевіримо умову 1). Справді, $x_2 \in F_1^\top$, тому

$$\langle x_1, x_2 \rangle = (Jx_1)(x_2) = 0 .$$

Нехай для набору $(x_i)_1^{n-2}$, $n = 2k$, умови 1)–3) виконуються. За умовою 2), $F_{n-2} \cap H^* = 0$; отже анулятор $F_{n-2}^\top \subset H_0$ щільний там в нормі $\| \ \|$. Тому, внаслідок зауваження 1, існує елемент $x_{n-1} \in F_{n-2}^\top$, $x_{n-1} \notin J^{-1}(H^* + F_{n-2})$, для якого

$$\|x_{n-1} - e_k\| < \varepsilon_k .$$

Згідно з вибором x_{n-1} , $Jx_{n-1} \notin H^* + F_{n-2}$, тому умова 2) виконується. Перевіримо умову 1). Справді, $x_{n-1} \in F_{n-2}^\top$, тому при $i < n - 1$

$$\langle x_i, x_{n-1} \rangle = (Jx_i)(x_{n-1}) = 0 .$$

Так само, за побудовою, $F_{n-1} \cap H^* = 0$; отже анулятор $F_{n-1}^{\top} \subset H_0$ щільний там за нормою $\| \ \|$. Тому, на підставі зауваження 1, існує елемент $x_n \in F_{n-1}^{\top}, \ x_n \notin J^{-1}(H^* + F_{n-1})$, для якого

$$\|x_n - e_k\| < \varepsilon_k \,.$$

Згідно з вибором, $Jx_n \notin H^* + F_{n-1}$, тому умова 2) виконується. Перевіримо умову 1). Справді, $x_n \in F_{n-1}^{\top}$, тому при $i < n$

$$\langle x_i, x_n \rangle = (Jx_i)(x_n) = 0 \,.$$

З відомої теореми про стійкість базису [1], і умови 3) випливає, що як (x_{2k-1}), так і (x_{2k}) буде базисом (Шаудера) в H. Візьмемо за X замкнену в нормі $\| \ \|_0$ лінійну оболонку елементів (x_{2k-1}), а за Y – замкнену лінійну оболонку елементів (x_{2k}). На підставі умови 1), ці підпростори ортогональні в H_0. $\square$

[1] *Крейн М., Мильман Д., Рутман М.* Об одном свойстве базиса в пространстве Banach'a// Записки научно-исслед. ин-та мат. и мех. и Харьковского мат. общества. – 1940. – **16**, сер. 4. – С. 106–110.

[2] *Пличко А.Н., Шевчик В.В.* О возмущениях базиса в паре банаховых пороcтранств// Теор. функ. функ. анал и прилож. – 1985. – **43**. – С. 98–100.

ON ORTHOGONAL SUBSPACES IN DENSELY EMBEDDED HILBERT SPACES

Anatolij PLICHKO

Cracow University of Technology
ul. Warszawska 24, Cracow 31-155, Poland
e-mail:aplichko@usk.pk.edu.pl

The following proposition is proved. Let $H_0 \hookrightarrow H$ be a couple of densely embedded Hilbert spaces. Then there exist closed orthogonal subspaces X and Y of H_0 such that both X and Y are dense in H.