ПРО ДВОКРОКОВУ МОДИФІКАЦІЮ МЕТОДУ ҐАУССА-НЬЮТОНА ПРИ УЗАГАЛЬНЕНИХ УМОВАХ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

©2009 р. Степан ШАХНО, Роман ЯКИМЧУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 6 липня 2009 р.

Проведено дослідження двокрокової ітераційно-різницевої модифікації методу Ґаусса-Ньютона з використанням апроксимації похідної Фреше поділеними різницями. Вивчено локальну збіжність методу у випадку, коли поділені різниці задовольняють узагальнену умову Ліпшиця. Знайдено область єдиності розв'язку задачі.

1. ВСТУП

Нелінійна задача про найменші квадрати є частковим випадком безумовної оптимізації. З огляду на важливість та специфічну структуру ця задача становить самостійний інтерес для дослідження. Ефективним методом розв'язування нелінійної задачі про найменші квадрати є метод Ґаусса-Ньютона [2] та його модифікації [1, 5, 7].

У працях [6, 9] для дослідження методів Ньютона і Ґаусса-Ньютона введено узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої Ліпшиця використано деяку додатну інтегровну функцію.

У працях [3, 4] введено аналогічні узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць першого порядку. При виконанні цих умовах досліджено збіжність методу хорд та різницевого методу з порядком $1 + \sqrt{2}$ для нелінійних рівнянь.

УДК 519.6; MSC 2000: 65J15, 65H10

У цій праці ми досліджуємо збіжність двокрокової ітераційно-різницевої модифікації методу Ґаусса-Ньютона [1, 5] на базі методу з порядком $1+\sqrt{2}$ при узагальнених умовах Ліпшиця для нелінійних задач найменших квадратів. Зауважимо, що умова Ліпшиця зі сталою є частковим випадком узагальненої умови Ліпшиця.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нелінійна задача про найменші квадрати формулюється так:

Знайти

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x), \tag{1}$$

де $m \geq n$, а функція нев'язки $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ є нелінійною.

Для знаходження розв'язку задачі (1) розглянемо такий ітераційний процес [1, 5]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_n); \\ y_{n+1} &= x_{n+1} - (A_n^T A_n)^{-1} A_n^T F(x_{n+1}), \end{aligned} \tag{2}$$

де $A_n = F(x_n, y_n)$, $F(x, y)$ — поділена різниця першого порядку функції $F(x)$ за точками x та y; x_0, y_0 $(x_0 \neq y_0)$ — початкові наближення.

3. ОЗНАЧЕННЯ І ДОПОМІЖНІ ЛЕМИ

Наведемо означення поділених різниць першого порядку від оператора F та умови Ліпшиця для поділених різниць першого порядку.

Означення 1. *Обмежений лінійний оператор, який діє з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, позначуваний $F(x, y)$, будемо називати поділеною різницею першого порядку для оператора F за фіксованими точками x і y $(x \neq y)$, якщо виконується рівність*

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{3}$$

У випадку, коли $x = y$ вважатимемо, що $F(x, x) = F'(x)$, де $F'(x)$ — похідна за Фреше нелінійного оператора F у точці x.

Умова Ліпшиця в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$ для поділених різниць першого порядку має вигляд

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|), \tag{4}$$

де $x, y, u, v \in D$, L — стала Ліпшиця.

Проте L в умовах Ліпшиця не обов'язково має бути сталою, але може бути і додатною інтегровною функцією. У цьому випадку умова (4) отримає наступне зображення

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz, \tag{5}$$

де $x, y, u, v \in D$, L — додатна інтегровна функція. Умову (5) називатимемо узагальненою умовою Ліпшиця з L в середньому (усередненим L).

Нехай $\mathbb{R}^{m\times n}$ — множина всіх матриць A розмірності $m \times n$. Через $A^\dagger$ позначимо псевдообернену матрицю за Муром-Пенроузом до A; якщо A має повний стовпцевий ранг, тоді $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$.

Лема 1. [8, 10]. *Нехай $A, E \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = A+E$ і $rank(A) = rank(B)$, $\|A^\dagger\|\|E\| < 1$. Тоді*

$$\|B^\dagger\| \leq \frac{\|A^\dagger\|}{1 - \|A^\dagger\|\|E\|}, \tag{6}$$

і якщо $rank(A) = rank(B) = min\{m, n\}$, то

$$\|B^\dagger - A^\dagger\| \leq \frac{\sqrt{2}\|A^\dagger\|^2\|E\|}{1 - \|A^\dagger\|\|E\|}. \tag{7}$$

Лема 2. [6]. *Нехай $A, E \in \mathbb{R}^{m\times n}(m \geq n)$, $B = A + E$, $\|EA^\dagger\| < 1$ і $rank(A) = n$. Тоді $rank(B) = n$.*

Лема 3. [6]. *Нехай*

$$h(t) = \frac{1}{t^\alpha}\int_0^t L(z)z^{\alpha-1}dz, \quad \alpha \geq 1, \quad 0 \leq t \leq r, \tag{8}$$

де $L(z)$ — додатна інтегровна і зростаюча функція на $[0, r]$. Тоді $h(t)$ зростає на $[0, r]$.

4. ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ (2)

Теорема 1. *Нехай $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — неперервна в області $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Припустимо, що:*

1) задача (1) має розв'язок x_* в деякій області $\Omega(x_*, r) = \{x \in D : \|x-x_*\| < r\}$ та існує похідна за Фреше $F'(x_*)$ і вона має повний стовпцевий ранг;

2) в області $\Omega(x_*, r)$ функція $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, яка має повний стовпцевий ранг і задовольняє узагальнену умову Ліпшиця з усередненим L:

$$\|F(x,y) - F(u,v)\| \leq \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz, \tag{9}$$

де $x, y, u, v \in \Omega(x_*, r)$ і L — зростаюча функція;

3) r задовольняє нерівність

$$\frac{\beta \int_0^{3r} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{2r} L(z)dz} + \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r} L(z)dz}{r\left(1 - \beta \int_0^{2r} L(z)dz\right)} \leq 1. \tag{10}$$

Тоді метод (2) *збігається для всіх $x_0, y_0 \in \Omega(x_*, r)$, таких, що $\rho(y_0) \geq \rho(x_0)$, і*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_*\| &\leq \frac{q_1}{\rho(y_0)}\|x_n - x_*\|\|y_n - x_*\| + q_0\|x_n - x_*\|, \\ \|y_{n+1} - x_*\| &\leq \frac{q_2}{\rho(x_1)}\|x_{n+1} - x_*\|\|x_n - x_*\| + q_0\|x_n - x_*\|, \end{aligned} \tag{11}$$

де

$$\rho(x) = \|x - x_*\|, \quad \alpha = \|F(x_*)\|, \quad \beta = \|[F'(x_*)^T F'(x_*)]^{-1} F'(x_*)^T\|, \tag{12}$$

і величини

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(x_0)\left(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz\right)}, \\ q_1 &= \frac{\beta \int_0^{\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}, \\ q_2 &= \frac{\beta \int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz} \end{aligned} \tag{13}$$

менші за 1.

Доведення. Виберемо довільно $x_0, y_0 \in \Omega(x_*, r)$, де r задовольняє (10). Тоді числа $q_i (i = 0, 1, 2)$, визначені формулами (13), є меншими від

1. Справді, з монотонності L і леми 3 маємо

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(x_0)(\rho(x_0)+\rho(y_0))(1-\beta\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}(\rho(x_0)+\rho(y_0)) \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{2r} L(z)dz}{2r^2(1-\beta\int_0^{2r} L(z)dz)}(\rho(x_0)+\rho(y_0)) \leq \frac{\|x_0-x_*\|+\|y_0-x_*\|}{2r} < 1,$$

$$q_1 = \frac{\beta\int_0^{\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(y_0)(1-\beta\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}\rho(y_0) \leq$$

$$\leq \frac{\beta\int_0^{r} L(z)dz}{r(1-\beta\int_0^{2r} L(z)dz)}\rho(y_0) \leq \frac{\|y_0-x_*\|}{r} < 1,$$

$$q_2 = \frac{\beta\int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz(\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0))}{(\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0))(1-\beta\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)} \leq$$

$$\leq \frac{\beta\int_0^{3r} L(z)dz}{3r(1-\beta\int_0^{2r} L(z)dz)} \leq \frac{\|x_1-x_*\|+\|x_0-x_*\|+\|y_0-x_*\|}{3r} < 1.$$

Введемо позначення: $A_n = F(x_n, y_n), A_* = F^{'}(x_*) = F(x_*, x_*)$. Тоді з умов теореми отримаємо оцінку

$$\|[A_*^T A_*]^{-1}A_*^T\|\|A_n - A_*\| \leq \beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|} L(z)dz \leq$$
$$\leq \beta\int_0^{2r} L(z)dz < 1, \quad \forall x_n, y_n \in \Omega(x_*, r).$$

Покладаючи $B = F(x_n, y_n), A = F(x_*, y_*), E = F(x_n, y_n) - F(x_*, y_*)$, з лем 1,2 і того, що A_n має повний стовпцевий ранг, для всіх $x_n, y_n \in \Omega(x_*, r)$ отримаємо

$$\|[A_n^T A_n]^{-1}A_n^T\| \leq \frac{\beta}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|} L(z)dz},$$

$$\|[A_n^T A_n]^{-1}A_n^T - [A_*^T A_*]^{-1}A_*^T\| \leq \frac{\sqrt{2}\beta^2\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|} L(z)dz}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|} L(z)dz}.$$

Використовуючи формули (2), можна записати

$$x_{n+1} - x_* = x_n - x_* - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T F(x_n) = [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T(A_n(x_n - x_*) -$$
$$-F(x_n) + F(x_*)) - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T F(x_*) + [A_*^T A_*]^{-1}A_*^T F(x_*);$$

$$y_{n+1} - x_* =$$

$$= x_{n+1} - x_* - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T F(x_{n+1}) = [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T(A_n(x_{n+1} - x_*) -$$
$$-F(x_{n+1}) + F(x_*)) - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T F(x_*) + [A_*^T A_*]^{-1}A_*^T F(x_*).$$

Отже,

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le \|[A_n^T A_n]^{-1}A_n^T\|\|A_n - F(x_n,x_*)\|\|x_n - x_*\| +$$
$$+\|[A_*^T A_*]^{-1}A_*^T - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T\|\|F(x_*)\| \le$$
$$\le \frac{\beta\int_0^{\|y_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}\|x_n-x_*\|+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz},$$
$$\|y_{n+1}-x_*\| \le \|[A_n^T A_n]^{-1}A_n^T\|\|A_n - F(x_{n+1},x_*)\|\|x_{n+1} - x_*\| +$$
$$+\|[A_*^T A_*]^{-1}A_*^T - [A_n^T A_n]^{-1}A_n^T\|\|F(x_*)\| \le$$
$$\le \frac{\beta\int_0^{\|x_{n+1}-x_n\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}\|x_{n+1}-x_*\|+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}{1-\beta\int_0^{\|x_n-x_*\|+\|y_n-x_*\|}L(z)dz}.$$

Покладаючи вище $n=0$, отримаємо

$$\|x_1-x_*\| \le (q_1+q_0)\|x_0-x_*\| < \|x_0-x_*\| < r,$$
$$\|y_1-x_*\| \le (q_2+q_0)\|x_1-x_*\| < \|x_1-x_*\| < r.$$

Таким чином, $x_1, y_1 \in \Omega(x_*, r)$. Звідси випливає, що (2) можна продовжити як завгодно велику кількість разів. За математичною індукцією, всі x_n і y_n при $n \ge 0$ належать до $\Omega(x_*, r)$ і $\rho(x_n)$, $\rho(y_n)$ монотонно спадають. Отже, для всіх $n = 0, 1, \dots$ маємо

$$\|x_{n+1}-x_*\| \le \frac{\beta\int_0^{\rho(y_n)}L(z)dz}{\rho(y_n)(1-\beta\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)}L(z)dz)}\rho(x_n)\rho(y_n)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)}L(z)dz}{(\rho(x_n)+\rho(y_n))(1-\beta\int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)}L(z)dz)}(\rho(x_n)+\rho(y_n)) \le$$
$$\le \frac{\beta\int_0^{\rho(y_0)}L(z)dz}{\rho(y_0)(1-\beta\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)}L(z)dz)}\rho(x_n)\rho(y_n)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)}L(z)dz}{(\rho(x_0)+\rho(y_0))(1-\beta\int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)}L(z)dz)}(\rho(x_n)+\rho(y_n)) \le$$
$$\le \frac{q_1}{\rho(y_0)}\rho(x_n)\rho(y_n) + q_0\rho(x_n);$$

$$\|y_{n+1} - x_*\| \le$$
$$\le \frac{\beta \int_0^{\rho(x_{n+1})+\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(z)dz(\rho(x_{n+1}) + \rho(x_n) + \rho(y_n))\rho(x_{n+1})}{(\rho(x_{n+1}) + \rho(x_n) + \rho(y_n))(1 - \beta \int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(z)dz)} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(z)dz}{(\rho(x_n) + \rho(y_n))(1 - \beta \int_0^{\rho(x_n)+\rho(y_n)} L(z)dz)}(\rho(x_n) + \rho(y_n)) \le$$
$$\le \frac{\beta \int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz(\rho(x_{n+1}) + \rho(x_n) + \rho(y_n))\rho(x_{n+1})}{(\rho(x_1) + \rho(x_0) + \rho(y_0))(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\alpha\beta^2 \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{(\rho(x_0) + \rho(y_0))(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}(\rho(x_n) + \rho(y_n)) \le$$
$$\le \frac{q_2}{\rho(x_1)}\rho(x_{n+1})\rho(x_n) + q_0\rho(x_n).$$

Таким чином, справедливі нерівності (11).

Наслідок 1. *Порядок збіжності ітераційного процесу* (2) *у випадку задачі з нульовою нев'язкою дорівнює* $1 + \sqrt{2}$.

Доведення. Поклавши $\alpha = 0$, отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le \frac{\beta \int_0^{\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(y_0)(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}\rho(x_n)\rho(y_n) = \frac{q_1}{\rho(y_0)}\|x_n - x_*\|\|y_n - x_*\|, \tag{14}$$

$$\|y_{n+1} - x_*\| \le \frac{\beta \int_0^{\rho(x_1)+\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz}{\rho(x_1)(1 - \beta \int_0^{\rho(x_0)+\rho(y_0)} L(z)dz)}\rho(x_{n+1})\rho(x_n) = \frac{q_2}{\rho(x_1)}\|x_n - x_*\|\|x_{n+1} - x_*\|. \tag{15}$$

Введемо позначення: $a_n = \|x_n - x_*\|$, $b_n = \|y_n - x_*\|$, $n = 0, 1, \ldots$.
З нерівностей (14) і (15) отримаємо

$$a_{n+1} \le \frac{q_1}{b_0}a_n b_n, \quad b_{n+1} \le \frac{q_2}{a_1}a_n a_{n+1}.$$

Покладемо: $A = \dfrac{q_1}{b_0},\ B = \dfrac{q_2}{a_1}$. Тоді

$$a_{n+1} \le A a_n b_n, \quad b_{n+1} \le B a_n a_{n+1}.$$

Таким чином, для досить великих $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} \leq A a_n b_n \leq A a_n B a_n a_{n-1} = C a_n^2 a_{n-1}.$$

На базі попередньої нерівності, рівняння для визначення порядку збіжності ітераційного процесу (2) можемо подати вигляді

$$t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Порядком збіжності буде єдиний додатний корінь $t_* = 1 + \sqrt{2}$ цього рівняння.

5. ОБЛАСТЬ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (1)

Теорема 2. *Нехай x_* задовольняє (1), $F(x)$ — неперервна в $\Omega(x_*, r)$, існує похідна Фреше $F^{'}(x_*) = F(x_*, x_*) = A_*$ і вона має повний стовпцевий ранг, $F(x)$ має поділену різницю першого порядку $F(x, y)$, що задовольняє узагальнену умову Ліпшиця з усередненим L:*

$$\|F(x, y) - F(x_*, x_*)\| \leq \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz, \tag{16}$$

де $x, y \in \Omega(x_*, r), \rho(x) = \|x - x_*\|$ і L — зростаюча функція. Нехай r задовольняє нерівність

$$\beta \int_0^r L(z)dz + \frac{\alpha\beta_0}{r} \int_0^{2r} L(z)dz \leq 1, \tag{17}$$

де α і β визначені в (12),

$$\beta_0 = \|[A_*^T A_*]^{-1}\|.$$

Тоді задача (1) має єдиний розв'язок x_* в $\Omega(x_*, r)$.

Доведення. Припустимо, що точка $x_0 \in \Omega$, яка відмінна від x_*, є також розв'язок (1). Тоді маємо $[A_*^T A_*]^{-1} A_0^T F(x_0) = 0$.Таким чином,

$$x_0 - x_* = x_0 - x_* - [A_*^T A_*]^{-1} A_0^T F(x_0) = [A_*^T A_*]^{-1} A_*^T (A_*(x_0 - x_*) -$$
$$-F(x_0) + F(x_*)) - [A_*^T A_*]^{-1} A_0^T F(x_0) + [A_*^T A_*]^{-1} A_*^T F(x_0) =$$
$$= [A_*^T A_*]^{-1} A_*^T (A_* - F(x_0, x_*))(x_0 - x_*) + [A_*^T A_*]^{-1} (A_0^T - A_*^T) F(x_0).$$

З умови (16) отримаємо

$$\|x_0 - x_*\| \le \|[A_*^T A_*]^{-1} A_*^T\| \|A_* - F(x_0, x_*)\| \|x_0 - x_*\| +$$
$$+ \|[A_*^T A_*]^{-1}\| \|A_0^T - A_*^T\| \|F(x_0)\| \le$$
$$\le \beta \int_0^{\rho(x_0)} L(z)dz \|x_0 - x_*\| + \alpha\beta_0 \int_0^{2\rho(x_0)} L(z)dz.$$

З того, що $L(z) > 0$ і леми 3 випливає, що $\dfrac{1}{t^\alpha} \int_0^t L(z) z^{\alpha-1} dz$ монотонно неспадна за t. Таким чином, з умови (17) маємо

$$\|x_0 - x_*\| \le \beta \int_0^{\rho(x_0)} L(z)dz \|x_0 - x_*\| + \frac{\alpha\beta_0}{\rho(x_0)} \int_0^{2\rho(x_0)} L(z)dz \rho(x_0) <$$
$$< \beta \int_0^r L(z)dz \|x_0 - x_*\| + \frac{\alpha\beta_0}{r} \int_0^{2r} L(z)dz \|x_0 - x_*\| \le \|x_0 - x_*\|.$$

Проте це суперечить нашому припущенню. Отже, звідси випливає, що $x_0 = x_*$.

ВИСНОВКИ

В цій праці ми вперше використали узагальнену умову Ліпшиця, яка замість константи Ліпшиця містить додатну інтегровну функцію, для дослідження двокрокового різницевого методу Ґаусса-Ньютона для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів. Встановлено умови та порядок збіжності ітераційного процесу (2) та єдиність розв'язку задачі (1).

[1] *Бартіш М.Я., Чипурко А.І., Шахно С.М.* Про одну модифікацію методу Гауса-Ньютона // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1995. – **42**. – С. 35–38.

[2] *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.

[3] *Шахно С.М.* Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для поділених різниць першого порядку // Матем. вісник НТШ. – 2007. – **4**. (в друці).

[4] *Шахно С.М.* Про двокроковий ітераційний процес для розв'язування нелінійних рівнянь. Books of abstract of International Conference „Problems of decision making under uncertainties". – Chernivci. May 21–25, 2007. – С. 260–261.

[5] *Шахно С.М., Гнатишин О.П, Якимчук Р.П.* Метод з порядком $1+\sqrt{2}$ в умовах неперервності за Гьольдером поділених різниць для нелінійної задачі найменших квадратів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інф. – 2007. – **13**. – С. 51–59.

[6] *Chen J., Li W.* Convergence of Gauss-Newton method and uniqueness of the solution // AMC (Appl. Math. Comp.). – 2005. – **170**. – P. 686–705.

[7] *Shakhno S.M., Gnatyshyn O.P.* On an iterative algorithm of order 1.839 ... for solving the nonlinear least squares problems // AMC (Appl. Math. Comp.). – 2005. – **161**. – P. 253–264.

[8] *Stewart G.W.* On the continuity of the generalized inverse // SIAM J. Appl. Math. 1960. – **17**. – P. 33–45.

[9] *Wang X.* Convergence of Newton's method and uniqiness of the solution of equations in Banach space // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – **20**. – P. 123–134.

[10] *Wedin P.A.* Perturbation theory for pseudo-inverse // BIT. – 1973. – **13**. – P. 217–232.

ABOUT TWO-STEP MODIFICATION OF GAUSS-NEWTON METHOD UNDER THE GENERALIZED LIPSCHITZ CONDITIONS FOR NONLINEAR LEAST SQUARES PROBLEMS

Stepan SHAKHNO, Roman YAKYMCHUK

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska str., Lviv 79000, Ukraine

In this paper we, for the first time, used generalized Lipschitz condition, which, instead of Lipschitz constant contain positive integrable function for solving nonlinear least squares problem. Researched the conditions and order of convergence of the two-step iterative process as well as the uniqueness of the solution of nonlinear least squares problems are determined.