Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

БОРНОЛОГІЧНІСТЬ ПРОСТОРУ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Г. Волошин[1,2], В.К. Маслюченко[2], О.В. Маслюченко[2,3]

[1]*Економіко-правничий факультет, Буковинський державний фінансово-економічний університет, Штерна, 1, Чернівці, 58000, Україна*

[2]*Факультет математики та інформатики, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Університетська, 28, Чернівці, 58000, Україна*

[3]*Instytut Matematyki, Akademia Pomorska w Słupsku, ul. Arciszewskiego, 22d, 76-200, Słupsk, Polska*

Г. Волошин, В. Маслюченко, О. Маслюченко. *Борнологічність простору нарізно неперервних функцій* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 61–67.

За допомогою критерію Нахбіна борнологічності простору $C_k(T)$ неперервних функцій з компактно-відкритою топологією доведено, що простір $S = CC[0,1]^2$ усіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ з топологією пошарово рівномірної збіжності є борнологічним.

O. Maslyuchenko, V. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *The bornologicity of the space of separately continuous functions*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 61–67.

Applying the Nachbin criterion of bornologicity of the space $C_k(T)$, we prove that the space $S = CC[0,1]$ of all separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ with the topology of layer-wise uniform convergence is bornological.

---

1. Вступ

У праці [2] на просторі $CC[0,1]^2$ усіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ була введена природна локально опукла топологія $\mathcal{T}$, яка дістала назву топології пошарово рівномірної збіжності, при цьому локально опуклий простір $(CC[0,1]^2, \mathcal{T})$ позначався символом S. Там були вивчені перші властивості нововведеного локально опуклого простору, зокрема, з'ясовано, що S – це

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46A08 *УДК:* 517.51

Ключові слова та фрази: separately continuous function, jointly continuous function, topology of layer-wise uniform convergence, uniform structure, bornological space.

E-mail: galja.vlshin@gmail.com, vmaslyuchenko@gmail.com, ovmasl@gmail.com

гаусдорфовий повний неметризовний сепарабельний локально опуклий простір, і поставлені задачі про подальші властивості простору S (бочковість, борнологічність). Так сталося, що спочатку було з'ясовано [4, 5], причому трьома різними способами, що простір S не берівський, тобто є множиною першої категорії в собі. Далі було встановлено [11, 3], що простір S бочковий, при цьому виявилося, що S збігається з простором $C_k(Q)$ усіх неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$ з топологією рівномірної збіжності на компактах, де $Q = [0,1]^2$ – квадрат, наділений топологією нарізної неперервності. Тому можна було застосувати критерій бочковості простору $C_k(Q)$, що знайшли Л.Нахбін [14] і Т.Широта [15]. В цій статті ми доводимо, що простір S борнологічний, використовуючи критерій Нахбіна [14] борнологічності простору $C_k(Q)$. Цей результат був анонсований у [6].

2. Рівномірна структура, породжена множиною функцій

Нехай T – довільна множина і Φ – деяка множина функцій $f : T \to \mathbb{R}$, тобто підмножина $\mathbb{R}^T$. Для довільного $\varepsilon > 0$ і функцій $f_1, \dots, f_n \in \Phi$ покладемо

$$W_{f_1,\dots,f_n;\varepsilon} = \{(t,s) \in T^2 : \max_{1\le k\le n} |f_k(t) - f_k(s)| < \varepsilon\}.$$

Визначимо рівномірну структуру $\mathcal{W}_\Phi$ [1, с.201] на T, вважаючи, що підмножина $W \subseteq T^2$ є оточенням з $\mathcal{W}_\Phi$, якщо існують такі функції з $f_1, \dots, f_n$ з Φ і число $\varepsilon > 0$, що $W_{f_1,\dots,f_n;\varepsilon} \subseteq W$. Легко перевірити, що $\mathcal{W}_\Phi$ – це найслабша з рівномірних структур на T, відносно яких всі функції $f \in \Phi$ рівномірно неперервні. Будемо говорити, що рівномірна структура $\mathcal{W}_\Phi$ *породжена множиною функцій* Φ, а рівномірний простір $(T, \mathcal{W}_\Phi)$ позначатимемо коротко через (T, Φ).

Нехай Λ – деяка напрямлена множина [10, с.93]. Індексована сім'я $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ точок $t_\lambda \in T$ множини T називається *напрямленістю* або *сіткою* в T [10, с.94].

Нехай $(T, \mathcal{W})$ – рівномірний простір і $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – сітка в T. Вона називається *сіткою Коші* або *фундаментальною сіткою* в $(T, \mathcal{W})$, якщо для кожного оточення W з $\mathcal{W}$ існує такий індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ що $(t_\lambda, t_\mu) \in W$, як тільки $\lambda, \mu \ge \lambda_0$. Кажуть, що сітка $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *збігається до елемента* t з T, якщо для довільного оточення W з $\mathcal{W}$ існує такий індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ що $(t_\lambda, t) \in W$, як тільки $\lambda \ge \lambda_0$. Рівномірний простір $(T, \mathcal{W})$ називається *повним* [7, с.253], якщо в ньому кожна сітка Коші збігається до деякої точки з T.

Ясно, що в рівномірному просторі (T, Φ) сітка $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ збігається до елемента t з T тоді і тільки тоді, коли для кожної функції $f \in \Phi$ числова сітка $(f(t_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збігається до числа $f(t)$. Сітка $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ буде фундаментальною в рівномірному просторі (T, Φ) тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in \Phi$ числова сітка $(f(t_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ є фундаментальною в $\mathbb{R}$. Але числова пряма $\mathbb{R}$ зі своєю стандартною рівномірністю, породженою метрикою $d(x, y) = |x - y|$, є повним простором [8, с.59], отже, фундаментальність сітки $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в (T, Φ) означає, що для кожної функції $f \in \Phi$ числова сітка $(f(t_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збігається в $\mathbb{R}$. Тому має місце таке твердження.

Лема 1. *Рівномірний простір (T, Φ) буде повним тоді і лише тоді, коли для довільної сітки $(t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ в T, такої, що для довільного $f \in \Phi$ числова сітка $(f(t_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збігається в $\mathbb{R}$, існує такий елемент $t \in T$, що $f(t_\lambda) \to f(t)$ для кожного $f \in \Phi$.*

3. Борнологічність просторів $C_k(T)$

Нагадаємо, що локально опуклий простір X називається *борнологічним* [9, с.65], якщо в ньому кожна абсолютно опукла множина, що поглинає довільну обмежену множину цього простору, є околом нуля в X.

Для топологічного простору T символом $C_k(T)$ ми позначимо локально опуклий простір всіх неперервних функцій $f : T \to \mathbb{R}$ з топологією рівномірної збіжності на компактних підмножинах T, яка породжується сукупністю переднорм

$$p_K(f) = \max_{t\in K} |f(t)|,$$

де K пробігає систему всіх компактних підмножин простору T.

Л. Нахбін [14, Th.2] встановив наступний критерій борнологічності простору $C_k(T)$.

Теорема 2. *Нехай T – цілком регулярний топологічний простір. Для того щоб простір $C_k(T)$ був борнологічним, необхідно і досить, щоб рівномірний простір $(T, C(T))$ був повним.*

4. Повнота простору (Q, S)

Розглянемо на квадраті $Q = [0, 1]^2$ топологією нарізної неперервності $\mathcal{S}$ [3, с.45], тобто найслабшу з топологій на Q, відносно яких кожна нарізно неперервна функція $f : Q \to \mathbb{R}$ є неперервною. Як з'ясовано в [3, теорема 9], простір S збігається з простором $C_k(P)$, де $P = (Q, \mathcal{S})$. Тому для доведення борнологічності простору S нам треба дослідити питання про повноту рівномірного простору $(Q, \mathcal{S})$. Вона негайно випливає з леми 1 і такого твердження.

Теорема 3. *Нехай $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ – така сітка точок p_λ з Q, що для кожної нарізно неперервної функції $f : Q \to \mathbb{R}$ числова сітка $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збігається в $\mathbb{R}$. Тоді існує така точка $c = (a, b) \in Q$, що $f(p_\lambda) \to f(c)$ для кожної нарізно неперервної функції $f : Q \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $C = C_u(Q)$ – це банаховий простір всіх неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$ на квадраті Q зі звичайною евклідовою топологією з рівномірною нормою $\|f\|_\infty = \max\limits_{q\in Q} |f(q)|$. Цей простір, очевидно, борнологічний як нормований простір [9, с.65]. Тому за критерієм Нахбіна рівномірний простір (Q, C) повний. Оскільки $C \subseteq S$, то сітка $(f(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збігається для кожної неперервної функції $f : Q \to \mathbb{R}$, тобто є сіткою Коші в рівномірному просторі (Q, C). З повноти цього простору випливає, що існує така точка $c = (a, b) \in Q$, що $f(p_\lambda) \to f(c)$ для кожної функції $f \in C$.

Доведемо, що $f(p_\lambda) \to f(c)$ і для кожного $f \in S$. Нехай це не так. Тоді існує функція $g \in S$, що $g(p_\lambda) \nrightarrow g(c)$. За умовою сітка $(g(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ збіжна в $\mathbb{R}$, отже, існує таке число $\beta \in \mathbb{R}$, що $g(p_\lambda) \to \beta$. При цьому $\beta \neq \alpha = g(c)$. Ми можемо вважати для певності, що $\alpha < \beta$. Якщо це не так, то замість функції g треба розглянути функцію $h = -g$.

Візьмемо довільні числа α_1 і β_1, такі, що $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Оскільки $g(p_\lambda) \to \beta$, то існує такий індекс λ_0, що $g(p_\lambda) > \beta_1$, як тільки $\lambda \geq \lambda_0$. Функція g нарізно неперервна, отже, функції $g^a = g(a, \cdot)$ і $g_b = g(\cdot, b)$ неперервні у точках b і a відповідно. Тому існують такі околи U точки a і V точки b, що $g(x, b) < \alpha_1$ і $g(a, y) < \alpha_1$, як тільки $x \in U$ і $y \in V$.

Розглянемо неперервну функцію $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, для якої $\varphi(t) = 0$ при $t \leq \alpha_1$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq \beta_1$ і $\varphi(t) = \frac{t-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}$ на $[\alpha_1, \beta_1]$. Зрозуміло, що функція $h = \varphi \circ g : Q \to [0, 1]$ буде нарізно неперервною разом з g. При цьому $h(a, y) = h(x, b) = 0$, як тільки $x \in U$ і $y \in V$, і $h(p_\lambda) = 1$ при $\lambda \geq \lambda_0$.

Введемо функцію

$$h_0(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = c, \\ \frac{h(x,y)}{(x-a)^2+(y-b)^2}, & (x, y) \neq c, \end{cases}$$

яка визначена на всьому квадраті Q, адже $(x - a)^2 + (y - b)^2 > 0$, якщо $(x, y) \neq c$. Зрозуміло, що $h_0 : Q \to \mathbb{R}$ – це нарізно неперервна функція. Справді, якщо $p_0 = (x_0, y_0) \neq c$, то h_0 буде нарізно неперервною в точці p_0 функцією як добуток нарізно неперервної в точці p_0 функції h і неперервної в точці p_0 функції $h_1(x, y) = \frac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Доведемо, що функція h_0 нарізно неперервна і в точці c. За побудовою $h_b(x) = 0$ при $x \in U$ і $h^a(y) = 0$ при $y \in V$. Тому і $h_0(x, b) = 0$ при $x \in U$ і $h_0(a, y) = 0$ при $y \in V$, звідки і випливає неперервність функції $h_0(a, \cdot)$ у точці b і функції $h_0(\cdot, b)$ у точці a, тобто нарізна неперервність функції h_0 у точці c.

За умовою сітка $(h_0(p_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ має збігатися в $\mathbb{R}$ до деякої точки $\gamma \in \mathbb{R}$. Покажемо, що це не так. Спочатку зауважимо, що оскільки квадрат Q зі своєю звичайною евклідовою топологією є цілком регулярним, то $p_\lambda \to c$ в Q. Справді, якби $p_\lambda \nrightarrow c$, то існував би такий окіл U_0 точки c, що для кожного $\lambda \in \Lambda$

можна було б знайти такий індекс $\mu_\lambda \in \Lambda$, що $\mu_\lambda \geq \lambda$ і $p_{\mu_\lambda} \notin U_0$. З повної регулярності Q випливає, що існує така неперервна функція $f_0 : Q \to [0,1]$, для якої $f_0(c) = 1$ і $f_0(p) = 0$ при $p \notin U_0$. Тоді $f_0(p_{\mu_\lambda}) = 0$ для кожного λ, а $f_0(c) = 1$, отже, $f_0(p_{\mu_\lambda}) \nrightarrow f_0(c)$, що суперечить вибору точки c.

Далі зазначимо, що для кожного $\lambda \in \Lambda$ існує таке $\nu_\lambda \in \Lambda$, що $\nu_\lambda \geq \lambda$ і $p_{\nu_\lambda} \neq c$. Справді, інакше існував би такий індекс $\lambda_* \in \Lambda$, що $p_\lambda = c$ при $\lambda \geq \lambda_*$. Тоді $g(p_\lambda) = g(c)$ при $\lambda \geq \lambda_*$, звідки негайно випливає, що $g(p_\lambda) \to g(c)$, а це суперечить вибору функції g.

Нехай $p_\lambda = (x_\lambda, y_\lambda)$. Оскільки $p_{\nu_\lambda} \neq c$, то

$$h_0(p_{\nu_\lambda}) = \frac{h(p_{\nu_\lambda})}{(x_{\nu_\lambda} - a)^2 + (y_{\nu_\lambda} - b)^2}$$

для кожного $\lambda \in \Lambda$. Як ми зауважили, $p_\lambda \to c$ в Q, а значить, і $p_{\nu_\lambda} \to c$ в Q, бо $\nu_\lambda \geq \lambda$ для кожного λ, тому, $x_{\nu_\lambda} \to a$ і $y_{\nu_\lambda} \to b$ в $\mathbb{R}$, отже,

$$\psi(p_{\nu_\lambda}) = (x_{\nu_\lambda} - a)^2 + (y_{\nu_\lambda} - b)^2 \to 0.$$

З другого боку за побудовою $h(p_\lambda) = 1$ при $\lambda \geq \lambda_0$, а значить, і $h(p_{\nu_\lambda}) = 1$ при $\lambda \geq \lambda_0$, адже $\nu_\lambda \geq \lambda$ для кожного λ. Таким чином, при $\lambda \geq \lambda_0$ будемо мати, що $h_0(p_{\nu_\lambda}) = 1/\psi(p_{\nu_\lambda})$. Оскільки $\psi(p_{\nu_\lambda}) \to 0$, то $h_0(p_{\nu_\lambda}) \to \infty$. Але $h_0(p_\lambda) \to \gamma$, де $\gamma \in \mathbb{R}$, а тому і $h_0(p_{\nu_\lambda}) \to \gamma$. Раз $\gamma \neq \infty$, то ми отримали суперечність, яка й доводить, що сітка $(h_0(p_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ не може збігатися до скінченного числа γ. А це суперечить умові теореми. Таким чином, $f(p_\lambda) \to f(c)$ для кожного $f \in S$ і теорема доведена. □

Теорема 4. *Простір (Q, S) повний.*

Доведення. Це негайно випливає з леми 1 і теореми 2. □

5. Борнологічність простору S

Тепер ми готові, щоб довести основний результат статті.

Теорема 5. *Простір S всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ з топологією пошарово рівномірної збіжності борнологічний.*

Доведення. Згідно з теоремою 9 у [3] локально опуклий простір S збігається з простором $C_k(P)$, де P – це квадрат $Q = [0,1]^2$, наділений топологією нарізної неперервності. За теоремою 1 борнологічність простору $C_k(P)$ рівносильна повноті рівномірного простору $(P, C(P))$. Але $P = Q$ (як множини) і $C(P) = S$. За доведеним у теоремі 3 рівномірний простір $(P, C(P)) = (Q, S)$ повний. Отже, S – це борнологічний простір. □

6. Мультиплікативні функціонали на алгебрі S і секвеціальна повнота простору (Q, S)

Нагадаємо, що *алгебра* A – це векторний простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, на якому задано множення $(x, y) \mapsto xy$ з природними властивостями [13, с.255]. Простір S всіх нарізно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, як і простір C всіх сукупно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, – це алгебри відносно поточкового множення функцій. Якщо на алгебрі A задана норма $\|\cdot\|$, яка задовольняє умову $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ на A^2, то A називається *нормованою алгеброю*, і *банаховою*, якщо вона повна відносно введеної на ній норми [13, с.255]. Якщо на алгебрі A введена топологічна структура, відносно якої операції додавання і множення на скаляр сукупно неперервні, а операція множення нарізно неперервна, то A називається *топологічною алгеброю* (див. [12, с.201], де алгебри називаються *лінійними кільцями*), а також [16]. Алгебра C відносно рівномірної норми є банаховою алгеброю, а операція множення на алгебрі S є навіть сукупно неперервною, отже, S – це топологічна алгебра.

Лінійний мультиплікативний функціонал $\varphi : A \to \mathbb{K}$ на алгебрі A – це лінійний функціонал, для якого $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ на A^2. Його ще називають *гомоморфізом алгебри* [13, с.259], якщо $\varphi \neq 0$. Відомо, що на банаховій алгебрі кожний лінійний мультиплікативний функціонал є неперервним. Це доведено в [13, с.260] для комплексних скалярів, але те ж доведення проходить і для дійсних скалярів. Зокрема, так буде і для банахової алгебри C при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Розвиток цього результату подано в [13, с.302]. Більше того [13, с.303], кожний лінійний мультиплікативний функціонал $\varphi : C \to \mathbb{K}$ має вигляд $\varphi(f) = f(p)$ для деякого $p \in Q = [0, 1]^2$.

Теорема 6. *Кожний лінійний неперервний мультиплікативний функціонал $\varphi : S \to \mathbb{R}$ на топологічній алгебрі S має вигляд $\varphi(f) = f(p)$ для деякого $p \in Q$.*

Доведення. Звуження $\psi = \varphi|_C$ функціоналу φ на алгебру C є лінійним мультиплікативним функціоналом на C. Тоді, як зауважено вище, існує така точка $p \in Q$, що $\varphi(f) = f(p)$ для кожного $f \in C$. Функціонал $\delta_p : S \to \mathbb{R}$, $\delta_p(f) = f(p)$, очевидно, неперервний на S. Як відомо [2], простір C всюди щільний в S. Оскільки $\varphi|_C = \delta_p|_C$, то з неперервності функціоналів φ і δ_p і рівності $\overline{C} = S$ випливає, що $\varphi = \delta_p$. □

Як наслідок цього твердження отримуємо секвенціальну повноту простору (Q, S).

Теорема 7. *Простір (Q, S) секвенціально повний.*

Доведення. Нехай $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ – така послідовність точок $p_n \in Q$, що числова послідовність $(f(p_n))_{n=1}^{\infty}$ збігається для кожного $f \in S$. Розглянемо поточкову границю $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \delta_{p_n}(f)$ лінійних мультиплікативних функціоналів

$\delta_{p_n}(f) = f(p_n)$. Ясно, що φ – це теж лінійний мультиплікативний функціонал. Оскільки функціонали $\delta_{p_n} : S \to \mathbb{R}$ неперервні, а простір S бочковий [4, 5], то за принципом рівномірної обмеженості [9, с.63] і функціонал φ буде неперервним. Тоді за теоремою 5 він матиме вигляд $\varphi = \delta_p$ для деякої точки $p \in Q$. Таким чином, існує така точка $p \in Q$, що $f(p_n) \to f(p)$ для кожного $f \in S$. Звідки і випливає секвенціальна повнота простору (Q, S). $\square$

Перенесенню цих результатів на простір $S(X \times Y) = CC(X \times Y)$ всіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, заданих на добутку двох компактних просторів, буде присвячена наступна робота авторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, М.: ИЛ, (1959) 410 с.
2. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Топологізація простору нарізно неперервних функцій*, Карп. мат. публ. **5**:2 (2013) 199–207.
3. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів та його бочковість*, Мат. вісн. НТШ. **11** (2014) 36–50.
4. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про берівську категорію простору нарізно неперервних функцій*, Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірності та математичного аналізу" (24 лютого – 2 березня 2014р.). Тези доповідей. – Ів.-Франківськ: Прикарп. нац. ун-т, (2014) 46–48.
5. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про беровість простору нарізно неперервних функцій*, Зб. пр. Ін-ту мат. НАН України **12**:3 (2015) 78–96.
6. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про борнологічність простору нарізно неперервних функцій*, Наук. конф., присв. 100-річчю від для народж. К.М.Фішмана та М.К.Фаге (1–4 липня 2015), Чернівці: ЧНУ (2015) 25–27.
7. Дж. Келли, *Общая топология*, М.: Наука, (1981) 432 с.
8. В.К. Маслюченко, *Перші типи топологічних векторних просторів*, Чернівці: Рута, (2002) 72 с.
9. В.К. Маслюченко, *Лінійні неперервні оператори*, Чернівці: Рута, (2002) 72 с.
10. В.К. Маслюченко, *Елементи теорії множин*, Чернівці: Рута, (2002) 132 с.
11. О.В. Маслюченко, *Бочковість простору нарізно неперервних функцій*, IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана, 30 червня – 5 липня 2014, Чернівці. Тези доповідей. – Чернівці (2014) 117–118.
12. М.А. Наймарк, *Нормированые кольца*, М.: Наука, (1963) 664 с.
13. У. Рудин, *Функциональный анализ*, М.: Мир, (1975) 444 с.
14. L. Nachbin, *Topological vector spaces of contiuous functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **40** (1954) 471–474.
15. T. Shirota, *On locally convex vector spaces of contiuous functions*, Proc. Japan Acad. Sci., **30** (1954) 294–298.
16. О.В. Лопушанський, *Свойства непрерывности умножения в топологических алгебрах*, Мат. методы и физ.-мех поля, **26**:4 (1985) 26–29.

Надійшло 04.10.2015