НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ І ВИЧЕРПНІ ПРОСТОРИ

©*2010 р. Володимир МАСЛЮЧЕНКО, Оксана МИРОНИК*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 8 листопада 2010 р.

Доведено, що простір $C_p[0,1]$ є напіввичерпним і не σ-метризовним, і встановлена теорема про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X_1 \times ... \times X_n \to C_p[0,1]$.

1 Вступ

В останні роки активізувалися дослідження сукупної неперервності нарізно неперервних функцій та їх аналогів зі значеннями в просторах, близьких до метризовних, зокрема, в σ-метризовних, сильно σ-метризовних і в просторах Мура (див. праці [1,2] і вказану там літературу). Насправді ж є значно більше типів таких просторів, багато з них розглядаються у огляді Ґ. Ґрюнгейджа [3]. Стосовно кожного з цих типів просторів природно виникає питання про можливість перенесення відомих результатів про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень та їх аналогів зі значеннями в метризовних просторах на відображення зі значеннями у просторах розглянутого типу. Це досить обширне поле діяльності і його належить освоїти у найближчому майбутньому.

Важливими типами просторів, близьких до метризовних, є вичерпні та напіввичерпні простори [3,4]. Отож на часі розглянути саме їх у

УДК 517.98, MSC 2000: 46G20, 46E50, 26C05

зв'язку з поставленою загальною задачею. У цій праці ми робимо перший крок у цьому напрямку, а подальші ще чекають на своє втілення. Доведені тут результати було анонсовано в тезах [5,6].

2. Природно розпочати з дослідження зв'язків між згаданими класами просторів. Але спочатку нагадаємо їх означення (див. [4,7]).

Топологічний простір Z називається *σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_n. Якщо до того ж кожна збіжна в Z послідовність точок z_j вся міститься у деякому дограничному просторі Z_n, то простір Z навають *сильно σ-метризовним.* Послідовність просторів Z_n, про яку йдеться в цих означеннях називається *вичерпуванням* σ-метризовного чи сильно σ-метризовного простору Z. Простори $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел, $\mathcal{K}$ всіх фінітних неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ чи $\mathcal{D}$ всіх пробних фінітних нескінченно-диференційовних функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у теорії розподілів Шварца – усі вони є сильно σ-метризовними на основі теореми Д'єдонне-Шварца [8, с.54]. Ширші класи сильно σ-метризовних топологічних векторних просторів подано в [7, с.199]. Площина Немицького $\mathbb{P}$ [9, с.47] є σ-метризовним, але не сильно σ-метризовним простором.

Для топологічного простору X символом $\mathcal{T}(X)$ ми позначаємо його топологію, тобто систему всіх його відкритих множин, а символом $\mathcal{F}(X)$ – систему всіх його замкнених множин.

Топологічний простір Z називається *вичерпним* /*напіввичерпним*/, якщо існує таке відображення $s : \mathcal{T}(Z)\times\mathbb{N} \to \mathcal{F}(Z)$, яке кожній відкритій в Z множині U і кожному номеру n ставить у відповідність замкнену в Z множину $F_n(U) = s(U, n)$, так, що для довільних U і V з $\mathcal{T}(X)$ виконуються умови:

(i) $(\forall n)(F_n(U) \subseteq U)$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} intF_n(U) = U$ $/\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(U) = U/$;

(ii) $(U \subseteq V) \Rightarrow (\forall n)(F_n(U) \subseteq F_n(V))$.

При цьому відображення s так само називається *вичерпуванням* простору Z. Як правило, в означенні вичерпних і напіввичерпних просторів вимагається ще виконання аксіоми відокремності T_1 про те, що одноточкові множини замкнені, але ми опускаємо цю вимогу, бо і в означенні σ-метризовних просторів ми її не накладали. Метризовні простори будуть вичерпними. Щоб побудувати їх вичерпування, досить розглянути метрику d, що породжує його топологію, відстань $d(z, E)$ від точки z до непорожньої множини E у просторі (Z, d) і для відкритої множини U в

Z покласти $F_n(U) = Z$, якщо $U = Z$ і $F_n(U) = \{z \in U : d(z, Z \setminus U) \geq \frac{1}{n}\}$, якщо $U \neq Z$. Зрозуміло, що для цього вичерпування $F_n(U) \subseteq F_{n+1}(U)$ для кожного n і довільної відкритої в Z множини U. Таке зростаюче вичерпування можна побудувати на кожному вичерпному чи напіввичерпному просторі.

Теорема 1. *Нехай Z – σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$. Тоді:*

а) на просторі Z існує така метрика d, що для кожного n звуження $d_n = d|_{Z_n^2}$ – це метрика на Z_n, яка породжує його топологічну структуру;

б) простір Z є напіввичерпним.

Доведення. а). За теоремою Гаусдорфа [10;9,с.439;11] кожну метрику, що задана на замкненому підпросторі метризовного простору і породжує його топологічну структуру, можна продовжити до метрики, що задана на всьому просторі і теж узгоджена з його топологічною структурою. Користуючись цією теоремою, індуктивно можна побудувати таку послідовність метрик $d_n : Z_n^2 \to \mathbb{R}$, що кожна метрика d_n породжує топологічну структуру підпростору Z_n і $d_{n+1}|_{Z_n^2} = d_n$ для кожного n. Справді, нехай d_1 – довільна метрика на метризовному підпросторі Z_1, яка породжує його топологічну структуру. Припустимо, що $n > 1$ і вже побудовані метрики $d_2, ..., d_{n-1}$, такі, що $d_{k+1}|_{Z_k^2} = d_k$ для кожного $k = 1, ..., n-2$ і d_k – породжує на Z_k його топологічну структуру. Простір Z_{n-1} є замкненим підпростором метризовного простору Z_n, адже $Z_{n-1} \subseteq Z_n$ і Z_{n-1} замкнений в Z. Тому за теоремою Гаусдорфа існує метрика d_n на просторі Z_n, яка продовжує метрику d_{n-1} і узгоджена з топологічною структурою підпростору Z_n. Таким чином, побудову можна продовжити ще на один крок.

Нехай z' і z'' – довільні точки з простору Z. Існує такий номер m, що $\{z', z''\} \subseteq Z_m$. Покладемо $d(z', z'') = d_m(z', z'')$. Легко перевірити, що d – коректно визначена метрика на Z, для якої $d|_{Z_n^2} = d_n$ для кожного n.

б). Для кожної відкритої в Z множини U і довільних номерів n і m покладемо

$$F_{n,m}(U) = \{z \in Z_n : d(z, Z_n \setminus U) \geq \frac{1}{m}\},$$

якщо $Z_n \nsubseteq U$ і $F_{n,m}(U) = Z_n$, якщо $Z_n \subseteq U$.

Тут $d(z, E) = \inf\{d(z, w) : w \in E\}$ – відстань від точки z до непорожньої множини E, що породжена відстанню d. Оскільки $d|_{Z_n^2} = d_n$, то ця відстань, коли $z \in Z_n$ і $\varnothing \neq E \subseteq Z_n$, збігається з відстанню, що

породжена відстанню d_n, а значить, її звуження на Z_n неперервне. Тому множини $F_{n,m}(U)$ замкнені в Z_n, а отже, і в Z. Крім того, ясно що $F_{l,m}(U) \cap Z_n = F_{n,m}(U)$ для кожного $l > n$ і довільного m. Так само зрозуміло, що
$$F_{n,m}(U) \subseteq F_{n,m+1}(U)$$
для довільних n і m і
$$\bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}(U) = Z_n \cap U$$
для кожного n.

Покладемо $F_n(U) = F_{n,n}(U)$ для кожного номера n і довільної відкритої в Z множини U. Множини $F_n(U)$ замкнені в Z. Покажемо, що
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(U) = U.$$
Оскільки для кожного n
$$F_n(U) \subseteq Z_n \cap U \subseteq U,$$
то досить перевірити лише включення
$$U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(U).$$

Нехай $z \in U$. Існують такі номери k і m, що $z \in F_{k,m}(U)$. Розглянемо номер $n = \max\{k, m\}$. Оскільки $F_{n,m}(U) \cap Z_k = F_{k,m}(U)$, то $z \in F_{n,m}(U)$. Але $F_{n,m}(U) \subseteq F_{n,n}(U)$. Отже, $z \in F_n(U)$ і потрібна рівність доведена.

Нехай U і V – такі відкриті множини в Z, що $U \subseteq V$. З означення множин $F_{n,m}(U)$ легко випливає, що $F_{n,m}(U) \subseteq F_{n,m}(V)$ для довільних n і m. А тому і
$$F_n(U) = F_{n,n}(U) \subseteq F_{n,n}(V) = F_n(V)$$
для кожного n.

Таким чином, простір Z є напіввичерпним з вичерпуванням $s(U, n) = F_n(U)$.

Насправді можна довести загальніше твердження, з якого випливає твердження б) теореми 1.

Теорема 2. *Нехай топологічний простір Z подається у вигляді об'єднання послідовності своїх замкнених напіввичерпних підпросторів Z_n. Тоді і Z – напіввичерпний простір.*

Доведення. Нехай s_n – вичерпування для простору Z_n. Для відкритої множини U в Z і номера n покладемо

$$s(U,n) = \bigcup_{j,k=1}^{n} s_k(U \cap Z_k, j).$$

Ясно, що $s(U,n) \subseteq s(V,n)$, якщо $U \subseteq V$. Множини $F_{k,j}(U) = s_k(U \cap Z_k, j)$ замкнені в Z_k, а значить, і в Z. Далі

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} s(U,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j,k=1}^{n} F_{k,j}(U) = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} F_{k,j}(U) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} s_k(U \cap Z_k, j) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U \cap Z_k = U,$$

адже $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Z_k = Z$. Тому простір Z напіввичерпний і s – його вичерпування.

Теорема 3. *Простір $C_p[0,1]$ неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій з топологією поточкової збіжності є напіввичерпним, але не σ-метризовним.*

Доведення. Розглянемо рівномірну норму

$$\|z\| = \max_{0 \le t \le 1} |z(t)|$$

на просторі $C[0,1]$ всіх неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій і породжену нею відстань $d(z', z'') = \|z' - z''\|$.

Замкнені кулі

$$B[z, \varepsilon] = \{w \in C[0,1] : \|w - z\| \le \varepsilon\}$$

у банаховому просторі $C_u[0,1] = (C[0,1], \|\cdot\|)$ є замкненими множинами і в локально опуклому просторі $C_p[0,1]$, топологія якого задається сукупністю передноорм

$$p_t(z) = |z(t)|,$$

де t пробігає відрізок $[0,1]$. Справді, якщо $w \in C[0,1] \setminus B[x,\varepsilon]$, то $\|w-z\| > \varepsilon$, отже, існує така точка $t_0 \in [0,1]$, що $|w(t_0) - z(t_0)| > \varepsilon$. Розглянемо додатне число

$$\delta = \varepsilon - |w(t_0) - z(t_0)|$$

і окіл

$$V = \{v \in C[0,1] : |v(t_0) - w(t_0)| < \delta\}$$

точки w у просторі $C_p[0,1]$. Якщо $v \in V$, то

$$|v(t_0) - z(t_0)| \geq |w(t_0) - z(t_0)| - |v(t_0) - w(t_0)| > |w(t_0) - z(t_0)| - \delta = \varepsilon,$$

отже, $\|v - z\| > \varepsilon$ і $v \notin B[z,\varepsilon]$. Таким чином, $V \subseteq C[0,1] \setminus B[z,\varepsilon]$, що дає нам відкритість доповнення до кулі $B[z,\varepsilon]$ у просторі $C[0,1]$ і замкненість самої кулі $B[z,\varepsilon]$.

Добре відомо, що простір $C_u[0,1]$ сепарабельний. Нехай $\{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна і всюди щільна в $C_u[0,1]$ множина. Система

$$\mathcal{B} = \{B[z_k,\rho] : k \in \mathbb{N}, \rho \in \mathbb{Q} \text{ і } \rho > 0\}$$

всіх куль з центрами в точках z_k і раціональними радіусами є зліченною, отже, її можна занумерувати в послідовність, тобто $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $B_n = B[z_{k_n}, \rho_n]$, $\rho_n \in \mathbb{Q}$ і $\rho_n > 0$.

Стандартними міркуваннями перевіряється, що система $\mathcal{B}_0 = \{B(z_k,\rho) : k \in \mathbb{N}, \rho \in \mathbb{Q} \text{ і } \rho > 0\}$ відповідних відкритих куль є базою топології простору $C_u[0,1]$, а тому система $\mathcal{B}$ є сіткою у просторі $C_u[0,1]$, тобто для кожної відкритої в $C_u[0,1]$ множини U і довільної точки $z \in U$ існує такий елемент $B \in \mathcal{B}$, що $z \in B \subseteq U$. Оскільки кожна відкрита множина у просторі $C_p[0,1]$ є відкритою і в просторі $C_u[0,1]$, то система $\mathcal{B}$ – це зліченна сітка і у просторі $C_p[0,1]$, що складається з замкнених у цьому просторі множин B_n.

Для кожної відкритої у просторі $C_p[0,1]$ множини U і довільного номера n визначимо множини $K_n(U) = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ і } B_k \subseteq U\}$ і

$$F_n(U) = \bigcup_{k \in K_n(U)} B_k.$$

Множини $F_n(U)$ будуть замкненими у просторі $C_p[0,1]$ як скінченні об'єднання таких множин. З означення множин $F_n(U)$ випливає, що $F_n(U) \subseteq U$ для кожного n.

Оскільки $\mathcal{B}$ – це сітка в $C_p[0,1]$, то для кожного $z \in U$ існує такий номер m, що $z \in B_m \subseteq U$. Тоді $z \in F_m(U)$, адже $B_m \subseteq F_m(U)$. Тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(U) = U.$$

Так само зрозуміло, що $F_n(U) \subseteq F_n(V)$, якщо $U \subseteq V$.

Таким чином, ми з'ясували, що простір $C_p[0,1]$ є напіввичерпним з вичерпуванням $s(U,n) = F_n(U)$.

Щоб показати, що простір $C_p[0,1]$ не σ-метризовний, припустимо супротивне. Нехай $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність замкнених метризовних підпросторів простору $C_p[0,1]$, така, що

$$C[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

Множини Z_n будуть замкненими і у банаховому просторі $C_u[0,1]$. З теореми Бера про категорію [12,c.66] випливає, що існує такий номер m, що множина Z_m має внутрішню точку z_0 у просторі $C_u[0,1]$. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$B[z_0,\varepsilon] \subseteq Z_m,$$

звідки випливає, що куля $B = B[z_0,\varepsilon]$ з топологією, індукованою з простору $C_p[0,1]$ є метризовним простором. Але це не так, бо простір B з топологією поточкової збіжності не задовольняє першу аксіому зліченності.

Таким чином, простір $C_p[0,1]$ не є σ-метризовним і теорема доведена.

Відомо [17,c.209], що простір $C_p(T)$ буде вичерпним тоді і тільки тоді, коли множина T не більш, ніж зліченна. Тому $C_p[0,1]$ – це не вичерпний простір.

Теорема 4. *Площина Немицького* $\mathbb{P} = \mathbb{R} \times [0,+\infty)$ *– це σ-метризовний простір Мура, який не є вичерпним і не є сильно σ-метризовним.*

Доведення. Вичерпування σ-метризовного простору $\mathbb{P}$ утворюють множини

$$Z_n = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = 0 \text{ або } y \geq \frac{1}{n}\},$$

які є замкненими і метризовними підпросторами площини Немицького. Те, що площина Немицького є простором Мура, пояснено у праці [1], а те, що $\mathbb{P}$ не є сильно σ-метризовним показано в [13].

Відомо [4], що кожний вичерпний T_1-простір нормальний, а площина Немицького – це не нормальний цілком регулярний простір [9, с.74]. Таким чином, простір $\mathbb{P}$ не може бути вичерпним.

Авторам невідомо: чи існує вичерпний простір, який не є σ-метризовним.

3. Розглянемо пряму Зорґенфрея $\mathbb{L}$, тобто множину дійсних чисел, з топологією, в якій базою околів точки x служать інтервали $[x, x+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$ [9, с.47].

Теорема 5. *Пряма Зорґенфрея – це сепарабельний берівський нормальний і навіть ліндележовий топологічний простір з першою аксіомою зліченності і континуальною вагою, який не є ні σ-метризовним, ні напіввичерпним, ні простором Мура.*

Доведення. Всі ці властивості прямої Зорґенфрея відомі. Вага її знайдена в [9, с.47], сепарабельність встановлена в [9, с.54], нормальність – [9, с.80], ліндележовість – [9, с.293]. Перша аксіома зліченності в $\mathbb{L}$ виконується, бо для кожного x з $\mathbb{L}$ система $\{[x, x+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ є зліченною базою околів точки x. Те, що $\mathbb{L}$ берівський і не σ-метризовний простір пояснено в [14, с.71]. Те, що $\mathbb{L}$ – це не простір Мура, випливає з того, що KC-функції $f : \mathbb{R}^2 \to Z$ зі значеннями в просторах Мура мають точки неперервності [1], а відображення $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{L}$, $f_0(x, y) = x$, є скрізь розривною KC-функцією.

Нарешті, те, що $\mathbb{L}$ не є напіввичерним простором довів Т.О.Банах [15], спираючись на цілий ряд теорем загальної топології і властивостей прямої Зорґенфрея. Ми дамо тут порівняно просте нове доведення цієї властивості, що використовує лише теорему Бера про категорію.

Припустимо, що $\mathbb{L}$ – напіввичерпний простір і s – його вичерпування. Розглянемо відкриті в $\mathbb{L}$ множини $U(x) = [x, +\infty)$, де $x \in \mathbb{R}$, і покладемо $F_n(x) = s(U(x), n)$. Оскільки s – вичерпування, то $U(x) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Але $x \in U(x)$, отже, $x \in F_n(x)$ для деякого номера n, тому множина $N(x) = \{n \in \mathbb{N} : x \in F_n(x)\}$ непорожня. У множині $N(x)$, як непорожній підмножині натурального ряду $\mathbb{N}$, обов'язково є найменший елемент $m(x)$. Розглянемо множини $A_n = \{x \in \mathbb{R} : m(x) = n\}$. Оскільки $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$, то з теореми Бера про категорію, застосованої до числової прямої $\mathbb{R}$ зі звичайною топологією, негайно випливає, що існує такий номер k, що множина $A = A_k$ десь щільна в $\mathbb{R}$, тобто знайдеться такий інтервал $I = (a-\delta, a+\delta)$, що $I \subseteq \overline{A}$.

Знайдемо строго спадну послідовність точок a_j з A, яка прямує до числа a. Побудова здійснюється індуктивним способом. Покладемо $b_1 = a+\delta$. Оскільки $(a, b_1) \subseteq \overline{A}$, то існує точка $a_1 \in (a, b_1) \cap A$. Далі беремо $b_2 = \min\{a_1, a + \frac{\delta}{2}\}$. Знову $(a, b_2) \subseteq \overline{A}$, отже, існує точка $a_2 \in (a, b_2) \cap A$. Після цього беремо $b_3 = \min\{a_2, a + \frac{\delta}{3}\}$ і знаходимо точку $a_3 \in (a, b_3) \cap A$. Ясно, що цей процес можна продовжувати до нескінченності, бо, побудувавши точку $a_j \in A$, для якої $a < a_j < b_j = \min\{a_j, a + \frac{\delta}{j+1}\}$, ми можемо розглянути число $b_{j+1} = \min\{a_j, a + \frac{\delta}{j+1}\}$ і знайти точку $a_{j+1} \in (a, b_{j+1}) \cap A$. Для визначених точок будемо мати $a < a_j < a + \frac{\delta}{j}$ для кожного j, отже, $a_j \to a$ при $j \to \infty$. Крім того, $a < a_{j+1} < a_j$ для кожного j.

Розглянемо відкриту в $\mathbb{L}$ множину $U = (a, +\infty)$ і покладемо $E_n = s(U, n)$. Оскільки $a \notin E_k$, бо $a \notin U$ і $U \supseteq E_k$, і множина E_k замкнена в $\mathbb{L}$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що $[a, a + \varepsilon) \cap E_k = \varnothing$. Знайдемо такий номер j, що $a < a_j < a + \varepsilon$. Оскільки $a_j \in A = A_k$, то $k = m(a_j) \in N(a_j)$, отже, $a_j \in F_k(a_j)$. Разом з тим $a_j \notin E_k$, бо $a_j \in (a, a + \varepsilon)$. Тому

$$s(U(a_j), k) = F_k(a_j) \nsubseteq E_k = s(U, k),$$

що суперечить умові (ii) для вичерпування, адже у нас

$$U(a_j) = [a_j, +\infty) \subseteq (a, +\infty) = U.$$

4. У зв'язку з теоремою 3 природно постає питання про дослідження на сукупну неперервність нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to C_p[0, 1]$. Часткову відповідь на нього дає наступний результат.

Теорема 6. *Нехай X і Y – топологічні простори, причому Y задовольняє першу аксіому зліченності, і $f : X \times Y \to C_p[0, 1]$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $D(f)$ всіх його точок розриву є множиною першої категорії в $X \times Y$, зокрема, відображення f буде точково розривним, коли добуток $X \times Y$ є берівським.*

Доведення. Нехай $T = [0, 1]$. Для довільної точки $p = (x, y, t) \in X \times Y \times T$ покладемо $g(x, y, t) = f(x, y)(t)$. Легко перевірити, що $g : X \times Y \times T \to \mathbb{R}$ – це нарізно неперервна функція. Справді, неперервність відносно t випливає з того, що $f(x, y) \in C[0, 1]$ для довільної точки $(x, y) \in X \times Y$. Зафіксуємо точки $y \in Y$ і $t \in T$ і розглянемо функцію $g_{y,t} : X \to \mathbb{R}$, для якої $g_{y,t}(x) = g(x, y, t)$. Функціонал $\delta_t(z) = z(t)$ неперервний на просторі $Z = C_p[0, 1]$. Так само неперервним буде відображення $f_y = f(\cdot, y) : X \to Z$, адже відображення $f : X \times Y \to Z$ нарізно неперервне. Оскільки

$$(\delta_t \circ f_y)(x) = \delta_t(f_y(x)) = \delta_t(f(x, y)) = f(x, y)(t) = g(x, y, t) = g_{y,t}(x),$$

то $g_{y,t} = \delta_t \circ f_y$, отже, функція $g_{y,t}$ буде неперервною, як композиція неперервних функцій.

З того, що T є метризовним компактом, чи з того, що T задовольняє другу аксіому зліченності, випливає [16], що множина

$$C_T(g) = \{(x,y) \in X \times Y : \{(x,y)\} \times T \subseteq C(g)\}$$

є залишковою у добутку $X \times Y$. Тут, як завжди, через $C(g)$ позначено множину точок сукупної неперервності функції g. З компактності простору T випливає, що в кожній точці $p = (x,y) \in C_T(g)$ відображення $f : X \times Y \to C_u(T)$ неперервне, тим більше буде неперервним і відображення $f : X \times Y \to C_p(T)$, адже тотожне відображення $C_u(T) \to C_p(T)$ неперервне. Тому $D(f) \subseteq (X \times Y) \setminus C_T(g)$, звідки випливає, що $D(f)$ – це множина першої категорії.

Так само доводиться і

Теорема 7. *Нехай $X_1, ..., X_n$ – топологічні простори, причому простори $X_2, ..., X_n$ задовольняють першу аксіому зліченності, і $f : X_1 \times ... \times X_n \to C_p[0,1]$ – нарізно неперервне відображення. Тоді множина $D(f)$ всіх його точок розриву є множиною першої категорії в добутку $X = X_1 \times ... \times X_n$.*

[1] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Філіпчук О.І.* Сукупна неперервність K_hC- функцій зі значеннями в просторах Мура // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, №11. – С. 1539-1547.

[2] *Holá L., Piotrowski Z.* Set of continuity points of functions with values in generalized metric spaces // Tatra Mt. Math. Publ. – 2009. – P. 149-160.

[3] *Gruenhage G.* Generalized metric spaces // Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. K.Kunen and J.Vaughan, Elsevier Sci. 1984. – P. 423-510.

[4] *Borges C.* On stratifiable spaces // Pacif. J. Math. – 1966.–**17**, N1. – P. 1-16.

[5] *Мироник О.* Пряма Зорґенфрея і вичерпні простори // Матеріали студентської наук. конф. ЧНУ (11-12 травня 2005р.), Фізико-математичні науки – Чернівці, 2005. – С. 89-90.

[6] *Маслюченко В.К., Мироник О.Д.* Вичерпні та напіввичерпні простори і нарізно неперервні відображення // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу", присв. 70-річчю каф. мат. аналізу Чернів. ун-ту, 30 вересня – 3 жовтня 2010р. Тези доповідей. – Чернівці: Книги – XXI, 2010. – С.103–105.

[7] *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам. Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995.– С.192–246.

[8] *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

[9] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

[10] *Hausdorff F.* Erweiterung einer Homöomorphie // Fund. Math. – 1930. – **16.** – S.353–360.

[11] *Toruńczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fund. Math. – 1972. – **77.**, N2. – P.191–193.

[12] *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

[13] *Карлова О.О., Куцак С.М., Маслюченко В.К.* Узагальнення теореми Бера про функції першого класу на випадок неметризовного простору значень // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 11–14.

[14] *Філіпчук О.І.* Нарізно неперервні відображення та їх аналоги зі значеннями в неметризовних просторах. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2010. – 124с.

[15] *Banach T.O.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions // Мат. студії. – 2002. – **18**, № 1. – С. 10-28.

[16] *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 1998. – **41**, №4. – С. 39–45.

[17] *Gruenhage G.* Metrizable spaces and generalizations // Recent progress in general topology II, ed. M.Husek and J. van Mill, Elsevier Sci. 2002. – P. 201-225.

SEPARATELY CONTINUOUS FUNCTIONS AND STRATIFIABLE SPACES

Volodymyr MASLYUCHENKO, Oksana MYRONYK

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012

We prove that the space $C_p[0,1]$ is a semi-stratifiable space but is not a σ-metrisable space. Also, we obtain a result on the joint continuity of separately continuous functions $f : X_1 \times ... \times X_n \to C_p[0,1]$.