

УСЕРЕДНЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ
ЗАДАЧ З НЕЛІНІЙНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ
ФУР'Є ТА ОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ
ДІРІХЛЕ, ЩО ЧЕРГУЮТЬСЯ, В ГУСТОМУ
ДВОРІВНЕВОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3 : 2 : 2

©2010 р. Тарас МЕЛЬНИК, Дмитро САДОВИЙ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ 01033

Редакція отримала статтю 15 вересня 2010 р.

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків квазілінійних параболічних крайових задач в густому дворівневому з'єднанні типу 3 : 2 : 2. Таке з'єднання складається з циліндра Ω_0 , на який ε -періодично нанизано тонкі диски зі змінною товщиною. Тонкі диски поділяються на два класи в залежності від їх геометричної структури, а також від крайових умов, заданих на їх межах.

В даній задачі розглядаються однорідні умови Діріхле та неоднорідні нелінійні умови Фур'є, що чергуються. Крім того, нелінійні умови Фур'є залежать від додаткових параметрів збурення. В залежності від цих параметрів доводяться теореми збіжності для таких задач (при $\varepsilon \rightarrow 0$) та досліджується вплив крайових умов на асимптотичну поведінку розв'язків.

1 Вступ

Густе з'єднання типу $m : k : d$ є результатом об'єднання деякої області, яку називають тілом з'єднання, і великої кількості ε -періодично розміщених вздовж деякого многовиду (зона приєднання) на поверхні тіла з'єднання тонких областей. Тип з'єднання вказує відповідно на граничні

розмірності тіла з'єднання (m), зони приєднання (k) і кожної приєднаної тонкої області (d); ε - малий параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими областями та їх товщину.

Предметом дослідження крайових задач в густих з'єднаннях є асимптотична поведінка розв'язків таких задач при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто коли кількість тонких приєднаних областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Асимптотичний аналіз таких задач має свої специфічні труднощі. Так, в граничному переході крайові задачі в густих з'єднаннях втрачають коерцитивність, що суттєво ускладнює асимптотичні дослідження; узагальнені розв'язки таких задач мають тільки мінімальну H^1 гладкість; для таких задач не існує рівномірно обмежених за параметром ε операторів продовження в просторах Соболева; розв'язки примежового шару в зоні приєднання мають степеневий ріст на нескінченності.

Першими працями в цьому напрямку були роботи [1–3], в яких доведено теореми збіжності для функції Гріна рівняння Гельмгольца в тілі густого з'єднання. При цьому або робилось припущення про збіжність певних компонент крайової задачі, або використовувалось явне представлення деяких величин, яке є можливим при певних конфігураціях тіла густого з'єднання (півпростір). В [4–9] дано класифікацію густих з'єднань, розроблено строгі асимптотичні методи дослідження, які дозволили довести теореми збіжності та побудувати асимптотичні наближення для розв'язків основних крайових задач математичної фізики в густих з'єднаннях різних типів.

Як продовження дослідження крайових задач в густих з'єднаннях, в [10–15] розглянуто крайові задачі в густих з'єднаннях більш складної конфігурації, а саме — в багаторівневих густих з'єднаннях. Багаторівневе густе з'єднання — це густе з'єднання, в якому тонкі області поділяються на скінчену кількість класів в залежності від їх геометричної структури, а також від крайових умов, які задаються на їх межах. Крім того, тонкі області з кожного класу ε -періодично чергуються вздовж зони приєднання. Відмітимо, що, згідно вищезазначеної класифікації, в згаданих працях розглядалися лінійні крайові задачі в густих з'єднаннях типу $2 : 1 : 1$ та $3 : 2 : 1$.

Успішне застосування в останні роки в нанотехнологіях і мікроелектротехніці конструкцій, які мають форму густих з'єднань (див., наприклад, [16–18]), обумовило активне дослідження різних крайових задач в густих з'єднаннях різних типів і більш складної структури (див. [22–28]).

В даній статті розглядається параболічна квазілінійна крайова задача в тривимірному дворівневому густому з'єднанні типу 3 : 2 : 2. Таке густе з'єднання складається з циліндра, на який ε -періодично нанизано тонкі диски зі змінною товщиною. Тонкі диски поділяються на два класи.

В даній задачі на межах тонких дисків з першого класу задано неоднорідні нелінійні умови Фур'є

$$\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon^\alpha \kappa_1(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon,$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 1$, а на межах тонких дисків з другого класу — однорідні умови Діріхле.

Вивчається асимптотична поведінка розв'язку такої крайової задачі та вплив параметрів α і β на асимптотичну поведінку розв'язку при $\varepsilon \rightarrow 0$. Зазначимо, що різні лінійні крайові задачі в однорівневих густих з'єднаннях типу 3 : 2 : 2 вивчалися в [19–21].

2 Постановка задач

Нехай $0 < d_0 < d_2 \leq d_1$ і $0 < b_1 < b_2 < 1$; $h_i : [d_0, d_i] \rightarrow (0, 1)$ — кусково гладкі функції, для яких виконуються умови

$$0 < b_1 - \frac{h_1(s)}{2} \quad \forall s \in [0, d_1], \quad b_2 + \frac{h_2(s)}{2} < 1 \quad \forall s \in [0, d_2],$$

$$b_1 + \frac{h_1(s)}{2} < b_2 - \frac{h_2(s)}{2} \quad \forall s \in [0, d_2].$$

Ці нерівності означають, що інтервали

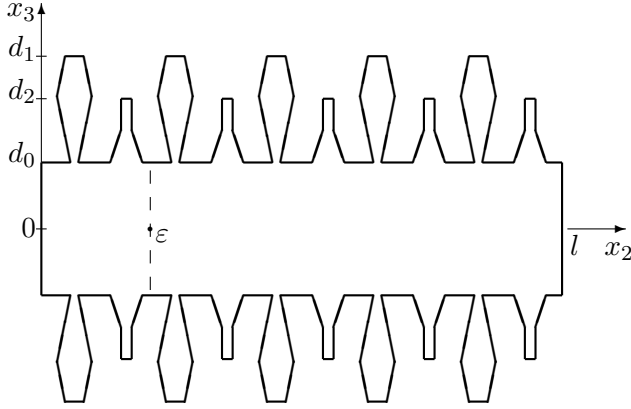
$$I_i := \left(b_i - \frac{h_i(s)}{2}, b_i + \frac{h_i(s)}{2} \right), \quad s \in [d_0, d_i], \quad i = 1, 2,$$

містяться в $(0, 1)$ і

$$I_1(s) \cap I_2(s) = \emptyset \quad \forall s \in [d_0, d_2].$$

Розглянемо густе з'єднання Ω_ε типу 3 : 2 : 2 (див. Рис. 1), яке складається з циліндру

$$\Omega_0 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_2 < l, \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_3^2} < d_0 \right\}$$


 Рис. 1: Поперечний переріз густого з'єднання Ω_ε типу 3 : 2 : 2.

і великої кількості тонких кільцевидних дисків

$$G_j^{(i)}(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |x_2 - \varepsilon(j + b_i)| < \frac{\varepsilon h_i(r)}{2}, d_0 \leq r < d_i \right\},$$

де $i = 1, 2$, $j = 0, \dots, N - 1$, тобто,

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon, \quad G_\varepsilon = G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}, \quad G_\varepsilon^{(i)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j^{(i)}(\varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Тут N — велике натуральне число, отже, $\varepsilon = l/N$ — це малий параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими дисками та їх товщину. Таким чином, кількість тонких дисків дорівнює $2N$, вони поділяються на два класи $G_\varepsilon^{(1)}$ і $G_\varepsilon^{(2)}$, і диски з кожного класу ε -періодично чергуються.

Позначимо через $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}$ об'єднання зовнішніх поверхонь тонких дисків з i -го класу, через $S_\varepsilon^{(i)}$ — об'єднання їх бічних поверхонь, а через S^\pm — основи циліндра Ω_0 . Введемо також такі позначення:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_i &:= \bar{\Omega}_0 \cup \bar{D}_i, & D_i &:= \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_2 < l, d_0 < r < d_i\}, \quad i = 1, 2; \\ Q_i &:= \bar{\Omega}_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : r = d_i\}, & Q_\varepsilon^{(i)} &:= \partial\Omega_\varepsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : r = d_i\}, \quad i = 0, 1, 2; \\ \Theta_\varepsilon^{(i)} &:= G_\varepsilon^{(i)} \cap \partial\Omega_0, \quad i = 1, 2, & \Upsilon_\varepsilon &:= \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned}$$

Нехай T – фіксоване додатне число. В густому з'єднанні Ω_ε розглянемо параболічну квазілінійну крайову задачу

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon + \kappa_0(v_\varepsilon) = f_\varepsilon & \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ \partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon^\alpha \kappa_1(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon & \text{на } \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \times (0, T), \\ v_\varepsilon = 0 & \text{на } \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \times (0, T), \\ \partial_\nu v_\varepsilon = q_\varepsilon^\pm & \text{на } S^\pm \times (0, T), \\ \partial_\nu v_\varepsilon = 0 & \text{на } Q_\varepsilon^{(0)} \times (0, T), \\ [v_\varepsilon]|_{r=d_0} = [\partial_r v_\varepsilon]|_{r=d_0} = 0 & \text{на } (\Theta_\varepsilon^{(1)} \cup \Theta_\varepsilon^{(2)}) \times (0, T), \\ v_\varepsilon|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (1)$$

Тут $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – похідна по зовнішній нормалі; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 1$ – параметри; квадратні дужки позначають стрибок вказаної функції.

Відносно заданих функцій будемо вважати, що виконуються наступні умови:

- функції $f_\varepsilon, f_0 \in L^2(\Omega_1 \times (0, T))$ та

$$f_\varepsilon \longrightarrow f_0 \text{ в } L^2(\Omega_1 \times (0, T)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (2)$$

- функції $g_\varepsilon, g_0 \in L^2(0, T; H^1(D_1))$ та

$$g_\varepsilon \xrightarrow{w} g_0 \text{ слабко в } L^2(0, T; H^1(D_1)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (3)$$

- функції $q_\varepsilon^\pm, q_0^\pm \in L^2(S^\pm \times (0, T))$ та

$$q_\varepsilon^\pm \xrightarrow{w} q_0^\pm \text{ слабко в } L^2(S^\pm \times (0, T)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (4)$$

- функції κ_i неперервні за Ліпшицем (що еквівалентно умові $\kappa_i \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathbb{R})$) та існують додатні сталі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що

$$c_1 \leq \kappa_i'(s) \leq c_2 \text{ для м. в. } s \in \mathbb{R}, i = 0, 1. \quad (5)$$

Позначимо $H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}) := \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon) : v|_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} = 0\}$. Розглянемо простір

$$W_\varepsilon = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)})) : \frac{\partial v}{\partial t} := v' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}))^*)\}.$$

Відомо (див., наприклад, § 1 гл. IV в [29]), що $W_\varepsilon \subset C(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$.

Функція $v_\varepsilon \in W_\varepsilon$ така, що $v_\varepsilon|_{t=0} = 0$, є слабким розв'язком задачі (1), якщо для довільної функції $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)})$ і для м. в. $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \langle v'_\varepsilon(\cdot, t), \varphi \rangle + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \kappa_0(v_\varepsilon) \varphi \, dx + \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) \varphi \, d\sigma_x = \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi \, dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \varphi \, d\sigma_x + \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi \, d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено двоїстість між $(H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}))^*$ і $H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)})$.

Так само, як, наприклад, в [30], можна показати, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує єдиний слабкий розв'язок задачі (1).

Наша мета полягає в дослідженні асимптотичної поведінки розв'язку крайової задачі (1) та впливу параметрів α і β на асимптотичну поведінку розв'язку при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3 Формулювання результатів та їх аналіз

Для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної функції $y \in L^2(0, T; H^1(G_\varepsilon^{(i)}))$ визначемо оператори продовження нулем наступним чином:

$$\tilde{y}^{(i)}(x, t) = \begin{cases} y(x, t), & (x, t) \in G_\varepsilon^{(i)} \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in (D_i \setminus G_\varepsilon^{(i)}) \times (0, T), \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Очевидно, що для довільної функції $y \in L^2(0, T; H^1(G_\varepsilon^{(2)}, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}))$ її продовження $\tilde{y}^{(2)} \in L^2(0, T; H^1(D_2))$. Так само будемо позначати оператори продовження нулем для функцій з простору $H^1(G_\varepsilon^{(i)})$, які визначаються аналогічно.

Теорема 3.1. *При $\alpha \geq 1$ розв'язок v_ε задачі (1) задовольняє співвідношення*

$$\left. \begin{aligned} v_\varepsilon &\xrightarrow{w} v^+ && \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega_0)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(1)} &\xrightarrow{w} h_1 v^- && \text{слабко в } L^2(D_1 \times (0, T)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(2)} &\xrightarrow{w} 0 && \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(D_2)) \end{aligned} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (8)$$

де функція v^+ є узагальненим розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v^+ - \Delta v^+ + \kappa_0(v^+) = f_0 \quad \text{в } \Omega_0 \times (0, T), \\ v^+ = 0 \quad \text{на } Q_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu v^+ = q_0^\pm \quad \text{на } S^\pm \times (0, T), \\ v^+|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \end{array} \right. \quad (9)$$

а функція v^- є узагальненим розв'язком крайової задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 \partial_t v^- - \operatorname{div}_{\tilde{x}}(h_1 \nabla_{\tilde{x}} v^-) + \\ + h_1 \kappa_0(v^-) + 2\delta_{\alpha,1} \kappa_1(v^-) = h_1 f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0 \quad \text{в } D_1 \times (0, T), \\ v^- = 0 \quad \text{на } Q_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu v^- = 0 \quad \text{на } Q_1 \times (0, T), \\ v^-|_{t=0} = 0 \quad \text{в } D_1, \end{array} \right. \quad (10)$$

де множники $\delta_{\alpha,1}$ та $\delta_{\beta,1}$ – символи Кронекера.

Теорема 3.2. Нехай $\alpha < 1$ та $\kappa_1(0) = 0$. Тоді розв'язок v_ε задачі (1) задовольняє такі співвідношення

$$\left. \begin{array}{l} v_\varepsilon \xrightarrow{w} v^+ \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega_0)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{s} 0 \quad \text{сильно в } L^2(D_1 \times (0, T)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{w} 0 \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(D_2)) \end{array} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (11)$$

де функція v^+ є узагальненим розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v^+ - \Delta v^+ + \kappa_0(v^+) = f_0 \quad \text{в } \Omega_0 \times (0, T), \\ v^+ = 0 \quad \text{на } Q_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu v^+ = q_0^\pm \quad \text{на } S^\pm \times (0, T), \\ v^+|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega_0. \end{array} \right. \quad (12)$$

З наведених результатів видно, що параметр α та крайові умови на межах тонких приєднаних дисків суттєво впливають на асимптотичну поведінку розв'язку крайової задачі (1).

У випадку $\alpha \geq 1$ задача (1) розпадається на дві незалежні крайові задачі (9) і (10). Це відбувається завдяки однорідним умовам Діріхле на межах тонких дисків з 2-го класу. Тим не менш, задачі (9) і (10) формують в сукупності *усереднену задачу* для вихідної задачі (1), оскільки

розв'язки v^+ і v^- цих задач — це головний член асимптотики для розв'язку v_ε задачі (1) в тілі з'єднання Ω_0 і в тонких дисках $G_\varepsilon^{(1)}$ відповідно. При цьому, неоднорідні умови Робіна на межах тонких дисків з першого класу трансформуються в два нових доданки $2\delta_{\alpha,1} \kappa_1(v^-)$ і $2\delta_{\beta,1} g_0$ в рівнянні для задачі (10), які показують вплив параметрів α та β .

Варто також відмітити вплив геометричної структури густого з'єднання на асимптотичну поведінку розв'язку, що полягає у появі в усередненій задачі (10) коефіцієнтів $h_1(r)$, які визначають відносну товщину тонких дисків з 1-го класу. Більш того, в області D_1 , що заповнюються тонкими дисками з першого класу, отримано диференціальне рівняння відносно тільки двох просторових змінних x_1 та x_3 . Змінна x_2 входить в це рівняння як параметр.

У випадку, коли $\alpha < 1$, головний член асимптотики розв'язку v_ε вихідної задачі (1) дорівнює нулю як на тонких дисках з 1-го класу, так і на дисках з 2-го класу, а усереднена задача для задачі (1) представляє собою одну крайову задачу (12) в тілі з'єднання Ω_0 . В цьому випадку вплив нелінійних крайових умов Фур'є такий самий, як і однорідних умов Діріхле.

4 Априорні оцінки та допоміжні твердження

Нескладно переконатися, що для майже всіх $x \in S_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, одиничний вектор нормалі до бічної поверхні тонких дисків в точці x має вигляд:

$$\bar{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h'_i(r)|^2}} \left(-\frac{\varepsilon h'_i(r) x_1}{2r}, \pm 1, -\frac{\varepsilon h'_i(r) x_3}{2r} \right),$$

де " \pm " вказує на ліву і праву частину бічної поверхні тонких дисків відповідно. Далі будемо використовувати наступну інтегральну тотожність, яка доведена в [19]:

$$\int_{S_\varepsilon^{(i)}} \frac{\varepsilon h_i(r)}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h'_i(r)|^2}} \varphi d\sigma_x = \int_{G_\varepsilon^{(i)}} \varphi dx - \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \partial_{x_2} \varphi dx, \quad (13)$$

де $Y_i(t) = -t + [t] + b_i$ і $[t]$ — ціла частина t , $i = 1, 2$, $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ — довільна функція.

Оскільки $\max_{\mathbb{R}} |Y_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, то з (13) випливає, що

$$\int_{G_\varepsilon^{(i)}} \varphi^2 dx \leq \varepsilon C_1 \left(\int_{G_\varepsilon^{(i)}} |\nabla \varphi|^2 dx + \int_{S_\varepsilon^{(i)}} \varphi^2 d\sigma_x \right) \quad (14)$$

та

$$\|\varphi\|_{L^2(S_\varepsilon^{(i)})} \leq C_2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Зауваження 4.1. Тут і далі всі константи c_i , C_i , які з'являються в нерівностях, не залежать від ε .

Враховуючи однорідні умови Діріхле для функцій з простору $H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)})$, з (13) виводимо нерівність

$$\int_{G_\varepsilon^{(2)}} \varphi^2 dx \leq \varepsilon^2 C_3 \int_{G_\varepsilon^{(2)}} |\nabla \varphi|^2 dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}). \quad (16)$$

З умов (5) отримуємо наступні нерівності для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1$):

$$c_1 t^2 + \kappa_i(0)t \leq \kappa_i(t)t \leq c_2 t^2 + \kappa_i(0)t, \quad (17)$$

$$|\kappa_i(t)| \leq |\kappa_i(0)| + c_3 t. \quad (18)$$

Лема 4.1. Для довільного фіксованого значення параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ (у випадку $\alpha < 1$ додатково припускаємо, що $\kappa_1(0) = 0$) існують додатні сталі C_0 та ε_0 такі, що при всіх значеннях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для розв'язку v_ε задачі (1) має місце нерівність

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq C_0. \quad (19)$$

Доведення. З тотожності (6) для розв'язку v_ε задачі (1) для довільного $t \in (0, T]$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_0^t \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon) v_\varepsilon) dx \right) d\tau + \\ & \quad + \varepsilon^\alpha \int_0^t \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) v_\varepsilon d\sigma_x d\tau = \\ & = \int_0^t \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon v_\varepsilon dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon v_\varepsilon d\sigma_x + \int_{S_\varepsilon^\pm} q_\varepsilon^\pm v_\varepsilon d\tilde{x} \right) d\tau, \end{aligned}$$

звідки за допомогою нерівності (17) виводимо, що

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_0^t \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + c_1 v_\varepsilon^2) dx + c_1 \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2 d\sigma_x \right) d\tau \leq \\
 & \leq - \int_0^t \left(\kappa_0(0) \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon dx d\tau + \kappa_1(0) \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon d\sigma_x \right) d\tau + \\
 & + \int_0^t \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon v_\varepsilon dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon v_\varepsilon d\sigma_x + \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm v_\varepsilon d\tilde{x} \right) d\tau. \quad (20)
 \end{aligned}$$

а) Випадок $\alpha \geq 1$. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського та (15), з (20) отримаємо

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + C_1 \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))}^2 \leq C_2 (1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} + \\
 & + \varepsilon^{\beta-1} \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))} + \|q_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S^\pm \times (0,T))}) \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))}.
 \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливають такі дві нерівності:

$$\begin{aligned}
 & \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq C_3 (1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} + \\
 & + \varepsilon^{\beta-1} \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))} + \|q_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S^\pm \times (0,T))})
 \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
 & \max_{0 \leq \tau \leq t} \|v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_4 (1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} + \\
 & + \varepsilon^{\beta-1} \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))} + \|q_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S^\pm \times (0,T))}) \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))}.
 \end{aligned}$$

Покладаючи $t = T$ і використовуючи умови (2), (3) і (4), отримаємо нерівність (19).

б) Випадок $\alpha < 1$. Додатково припускаємо, що $\kappa_1(0) = 0$. Тоді з (20) аналогічно випадку а) отримаємо нерівність (19). \square

Позначимо через χ_Ω характеристичну функцію множини Ω . Відомо (див. [19]), що мають місце збіжності:

$$\begin{aligned}
 \chi_{\Theta_\varepsilon^{(i)}} & \xrightarrow{w} h_i(d_0) \quad \text{в } L^2(Q_0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \\
 \chi_{G_\varepsilon^{(i)}} & \xrightarrow{w} h_i(r) \quad \text{в } L^2(D_i) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Тут і далі будемо використовувати наступне позначення:

$$\widetilde{\kappa_j(\varphi)}^{(i)} := \begin{cases} \kappa_j(\varphi(x, t)), & (x, t) \in G_\varepsilon^{(i)} \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in (D_i \setminus G_\varepsilon^{(i)}) \times (0, T), \end{cases}$$

де φ – довільна функція з $L^2(0, T; H^1(G_\varepsilon^{(i)}))$, $j = 0, 1$, $i = 1, 2$.

За допомогою інтегральної тотожності (13) так само, як в [22], доведемо наступну лему.

Лема 4.2. *Нехай послідовність $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ з $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon))$ є рівномірно обмеженою по ε та*

$$\widetilde{\kappa_1(v_\varepsilon)}^{(1)} \xrightarrow{w} \mu \quad \text{в } L^2(D_1 \times (0, T)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тоді для довільної функції $\psi \in L^2(0, T; H^1(D_1))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon \int_0^T \int_{S_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) \psi \, d\sigma_x \, dt \longrightarrow 2 \int_0^T \int_{D_1} h_1^{-1}(r) \mu \psi \, dx \, dt. \quad (21)$$

Крім того, на підставі (3) маємо

$$\varepsilon \int_0^T \int_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \psi \, d\sigma_x \, dt \longrightarrow 2 \int_0^T \int_{D_1} g_0 \psi \, dx \, dt \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (22)$$

5 Доведення теореми 3.1. Випадок $\alpha \geq 1$

5.1 З оцінки (19) випливає, що існує така підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку ми знов позначимо через $\{\varepsilon\}$), що

$$\left. \begin{array}{ll} v_\varepsilon(\cdot, t) \xrightarrow{w} y_0^+(\cdot, t) & \text{в } L^2(\Omega_0) \text{ для м. в. } t \in [0, T], \\ \widetilde{v_\varepsilon(\cdot, t)}^{(1)} \xrightarrow{w} y_0^{1,-}(\cdot, t) & \text{в } L^2(D_1) \text{ для м. в. } t \in [0, T], \\ \widetilde{v_\varepsilon(\cdot, t)}^{(2)} \xrightarrow{w} y_0^{2,-}(\cdot, t) & \text{в } H^1(D_2) \text{ для м. в. } t \in [0, T], \\ v_\varepsilon|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} v^+ & \text{в } L^2(0, T; H^1(\Omega_0)), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \xrightarrow{w} v_0^{1,-} := h_1 v^- & \text{в } L^2(D_1 \times (0, T)), \\ \widetilde{\partial_{x_j} v_\varepsilon}^{(1)} \xrightarrow{w} \gamma_j & \text{в } L^2(D_1 \times (0, T)), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \xrightarrow{w} v_0^{2,-} & \text{в } L^2(0, T; H^1(D_2)), \\ \kappa_0(v_\varepsilon) \xrightarrow{w} \zeta_0 & \text{в } L^2(\Omega_0 \times (0, T)), \\ \widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(i)} \xrightarrow{w} \zeta_i & \text{в } L^2(D_i \times (0, T)), \\ \widetilde{\kappa_1(v_\varepsilon)}^{(1)} \xrightarrow{w} \mu & \text{в } L^2(D_1 \times (0, T)), \end{array} \right\} \quad (23)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, де y_0^+ , $v_0^{2,-}$, v^+ , v^- , $y_0^{i,-}$, γ_j , ζ_0 , ζ_i , μ , $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$, будуть визначені нижче.

З теореми Фубіні випливає, що $v^+(\cdot, t) \in L^2(\Omega_0)$, $v_0^{i,-}(\cdot, t) \in L^2(D_i)$, $i = 1, 2$, для майже всіх $t \in (0, T)$. Тому на підставі (23):

$$\begin{aligned} y_0^+(x, t) &= v^+(x, t) \quad \text{для м. в. } (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ y_0^{i,-}(x, t) &= v_0^{i,-}(x, t) \quad \text{для м. в. } (x, t) \in D_i \times (0, T), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

З нерівності (16) отримуємо, що

$$\|\tilde{v}_\varepsilon^{(2)}\|_{L^2(D_2 \times (0, T))} \leq \varepsilon c_1 \|\nabla_x v_\varepsilon\|_{L^2(D_2 \times (0, T))} \leq \varepsilon c_2,$$

звідки випливає, що $v_0^{2,-} = 0$ м. с. в $D_2 \times (0, T)$.

5.2 Знайдемо γ_2 . Розглянемо тестову функцію

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} 0, & (x, t) \in (\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}) \times (0, T), \\ \varepsilon Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \psi(x) \eta(t), & (x, t) \in G_\varepsilon^{(1)} \times (0, T), \end{cases}$$

де $\psi \in C_0^\infty(D_1)$, $\eta \in C^1([0, T])$ — довільні функції, а $Y_1(t) = -t + [t] + b_1$. Очевидно, що $\Phi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}))$ і

$$\nabla_x \Phi(x, t) = \varepsilon \eta(t) Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \nabla_x \psi(x) + \eta(t) (0, -\psi(x), 0) \quad \text{в } G_\varepsilon^{(1)} \times (0, T).$$

Означення слабкого розв'язку задачі (1) еквівалентне наступному (див., наприклад, § III.4 в [31]): $v_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \Upsilon_\varepsilon^{(2)}))$ є слабким розв'язком задачі (1), якщо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon(x, T) \varphi(x, T) dx - \int_0^T \langle \varphi', v_\varepsilon \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \kappa_0(v_\varepsilon) \varphi dx dt + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) \varphi d\sigma_x dt = \\ & = \int_0^T \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \varphi d\sigma_x + \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi d\tilde{x} \right) dt \quad \forall \varphi \in W_\varepsilon. \quad (24) \end{aligned}$$

Підставивши функцію Φ в тотожність (24), отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_2} v_\varepsilon \psi \eta \, dx \, dt &\leq \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |v_\varepsilon(x, T) \psi(x) \eta(T)| \, dx + \\ &+ \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |v_\varepsilon \psi \eta'| \, dx \, dt + \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |(\nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi) \eta| \, dx \, dt + \\ &+ \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\kappa_0(v_\varepsilon) \psi \eta| \, dx \, dt + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{S_\varepsilon^{(1)}} |\kappa_1(v_\varepsilon) \psi \eta| \, d\sigma_x \, dt + \\ &+ \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |f_\varepsilon \psi \eta| \, dx \, dt + \varepsilon^\beta \int_0^T \int_{S_\varepsilon^{(1)}} |g_\varepsilon \psi \eta| \, d\sigma_x \, dt. \end{aligned}$$

З останньої нерівності на підставі (2), (3), (15), (18) і (19) маємо

$$\int_0^T \int_{D_1} \widetilde{\partial_{x_2} v_\varepsilon}^{(1)} \psi \eta \, dx \, dt = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

звідки випливає, що $\gamma_2 = 0$ м. с. в $D_1 \times (0, T)$.

Знайдемо γ_1 і γ_3 . За допомогою тотожності (13) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{D_1} \widetilde{\partial_{x_j} v_\varepsilon}^{(1)} \psi \eta \, dx \, dt &= -\varepsilon \int_0^T \int_{S_\varepsilon^{(1)}} \frac{h_1'(r) x_j v_\varepsilon \psi \eta}{2r \sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_1'(r)|^2}} \, d\sigma_x \, dt - \\ &- \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon \partial_{x_j} \psi \eta \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{D_1} \frac{x_j h_1'(r)}{r h_1(r)} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \psi \eta \, dx \, dt - \\ &- \int_0^T \int_{D_1} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \partial_{x_j} \psi \eta \, dx \, dt + \varepsilon \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1 \left(\frac{x_2}{\varepsilon} \right) \frac{x_j h_1'(r)}{r h_1(r)} \partial_{x_2} (v_\varepsilon \psi) \eta \, dx \, dt \end{aligned}$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(D_1)$, $\eta \in C^1([0, T])$, $j = 1, 3$. Перейшовши до границі в цій рівності, отримаємо, що для довільних $\psi \in C_0^\infty(D_1)$, $\eta \in C^1([0, T])$

$$\int_0^T \int_{D_1} \gamma_j \psi \eta \, dx \, dt = - \int_0^T \int_{D_1} v^- (h_1 \partial_{x_j} \psi + \psi \partial_{x_j} h_1) \eta \, dx \, dt, \quad j = 1, 3,$$

звідки випливає, що існують узагальнені похідні $\partial_{x_j} v^-$ та

$$\gamma_j = h_1(r) \partial_{x_j} v^- \quad \text{для м. в. } (x, t) \in D_1 \times (0, T), \quad j = 1, 3.$$

5.3 Покажемо, що $v^-|_{Q_0} = v^+|_{Q_0} = 0$ в сенсі сліду для майже всіх $t \in (0, T)$. Нагадаємо деякі співвідношення з (23):

$$\left. \begin{array}{l} v_\varepsilon|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} v^+ \quad \text{в } L^2(0, T; H^1(\Omega_0)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{w} h_1 v^- \quad \text{в } L^2(D_1 \times (0, T)), \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{w} v_0^{2,-} \quad \text{в } L^2(0, T; H^1(D_2)) \end{array} \right\} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

З першого і останнього співвідношень в (25), властивостей оператора сліду і того факту, що $v_0^{2,-} = 0$ м. с. в $D_2 \times (0, T)$, отримаємо, що для майже всіх $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(\cdot, t)|_{Q_0} &\xrightarrow{s} v^+(\cdot, t)|_{Q_0} \quad \text{сильно в } L^2(Q_0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \tilde{v}_\varepsilon^{(2)}(\cdot, t)|_{Q_0} &\xrightarrow{s} 0 \quad \text{сильно в } L^2(Q_0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (26)$$

З рівності

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(2)}(x, t)|_{Q_0} = \chi_{\Theta_\varepsilon^{(2)}}(x) v_\varepsilon(x, t)|_{Q_0}, \quad (x, t) \in Q_0 \times (0, T),$$

і співвідношень (26) випливає, що $v^+|_{Q_0} = 0$ в сенсі сліду для майже всіх $t \in [0, T]$.

Тепер розглянемо рівність

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(1)}(x, t)|_{Q_0} = \chi_{\Theta_\varepsilon^{(1)}}(x) v_\varepsilon(x, t)|_{Q_0}, \quad (x, t) \in Q_0 \times (0, T), \quad (27)$$

де

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(1)}(x, t)|_{Q_0} = \begin{cases} v_\varepsilon(x, t), & (x, t) \in \Theta_\varepsilon^{(1)} \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in (Q_0 \setminus \Theta_\varepsilon^{(1)}) \times (0, T). \end{cases}$$

На підставі попередніх співвідношень маємо, що, з одного боку,

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(1)}(\cdot, t)|_{Q_0} \xrightarrow{w} 0 \text{ в } L^2(Q_0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ для майже всіх } t \in (0, T).$$

З іншого боку, виразимо границю функцій $\tilde{v}_\varepsilon^{(1)}|_{Q_0}$ через слід функції v^- . Для довільної функції $\psi \in C^\infty(\overline{D_1})$, $\psi|_{r=d_1} = 0$, для майже всіх $t \in [0, T]$ маємо

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} r^{-1} \partial_r v_\varepsilon \psi \, dx &= \int_{G_\varepsilon^{(1)}} r^{-1} (\partial_{x_1} v_\varepsilon \cos \theta + \partial_{x_3} v_\varepsilon \sin \theta) \psi \, dx = \\ &= - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon \partial_{x_1} (r^{-1} \psi \cos \theta) \, dx - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon \partial_{x_3} (r^{-1} \psi \sin \theta) \, dx - \\ &\quad - d_0^{-1} \int_{\Theta_\varepsilon^{(1)}} (v_\varepsilon \psi)|_{\Theta_\varepsilon^{(1)}} \, d\sigma_x - \int_{S_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon \psi \frac{\varepsilon h_1'(r)}{2r \sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_1'(r)|^2}} \, d\sigma_x, \end{aligned}$$

де (r, θ, x_2) — циліндричні координати: $r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$ та $\theta = \arctan\left(\frac{x_3}{x_1}\right)$.

Оскільки

$$\partial_{x_1}(r^{-1} \cos \theta) + \partial_{x_3}(r^{-1} \sin \theta) = 0,$$

то на підставі (13) можна переписати останню інтегральну тотожність у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \frac{\partial_r v_\varepsilon \psi}{r} dx &= - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \frac{v_\varepsilon}{r} (\cos \theta \partial_{x_1} \psi + \sin \theta \partial_{x_3} \psi) dx - \\ &- d_0^{-1} \int_{\Theta_\varepsilon^{(1)}} (v_\varepsilon \psi)|_{\Theta_\varepsilon^{(1)}} d\sigma_x - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \frac{h_1'(r)}{r h_1(r)} v_\varepsilon \psi dx + \\ &+ \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{h_1'(r)}{r h_1(r)} \partial_{x_2}(v_\varepsilon \psi) d\sigma_x, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} -d_0^{-1} \int_{Q_0} (\tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \psi)|_{Q_0} d\sigma_x + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{h_1'(r)}{r h_1(r)} \partial_{x_2}(v_\varepsilon \psi) d\sigma_x = \\ = \int_{D_1} \frac{\widetilde{\partial_r v_\varepsilon}^{(1)} \psi}{r} dx + \int_{D_1} \frac{\tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \partial_r \psi}{r} dx + \int_{D_1} \frac{h_1'(r)}{r h_1(r)} \tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \psi dx. \end{aligned}$$

Перейшовши до границі в цій рівності при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_1} r^{-1} (h_1(r) \partial_r(v^- \psi) + h_1'(r) v^- \psi) dx = \\ &= -\frac{h_1(d_0)}{d_0} \int_{Q_0} (v^- \psi)|_{Q_0} d\sigma_x \quad \forall \psi \in C^\infty(\overline{D_1}), \quad \psi|_{r=d_1} = 0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $v^- = 0$ в сенсі сліду для майже всіх $t \in (0, T)$.

Таким чином,

$$v^-|_{Q_0} = v^+|_{Q_0} = 0 \quad \text{в сенсі сліду для майже всіх } t \in (0, T). \quad (28)$$

5.4 Нехай $\eta \in C^1([0, T])$, $\varphi \in H^1(\Omega_1)$ — довільні функції, причому $\varphi|_{Q_0} = 0$. Визначимо функцію

$$\widehat{\varphi}(x, t) = \begin{cases} \varphi(x) \eta(t), & (x, t) \in (\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}) \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in G_\varepsilon^{(2)} \times (0, T). \end{cases}$$

Очевидно, що $\widehat{\varphi} \in W_\varepsilon$.

Використовуючи операції продовження нулем, перепишемо тотожність для розв'язку (24) з тестовою функцією $\widehat{\varphi}$ у вигляді

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0} v_\varepsilon(x, T) \varphi \eta(T) dx + \int_{D_1} \widetilde{v_\varepsilon(x, T)}^{(1)} \varphi \eta(T) dx - \int_0^T \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \varphi \eta' dx dt - \\
 & - \int_0^T \int_{D_1} \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \varphi \eta' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi + \kappa_0(v_\varepsilon) \varphi) \eta dx dt + \\
 & + \int_0^T \left(\int_{D_1} (\widetilde{\nabla_x v_\varepsilon}^{(1)} \cdot \nabla_x \varphi + \widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(1)} \varphi) \eta dx + \varepsilon^\alpha \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) \varphi \eta d\sigma_x \right) dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi \eta dx dt + \int_0^T \int_{D_1} \chi_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon \varphi \eta dx dt + \\
 & + \varepsilon^\beta \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \varphi \eta d\sigma_x dt + \int_0^T \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi \eta d\tilde{x} dt.
 \end{aligned}$$

Враховуючи (21), (22) і (23), перейдемо в останній інтегральній тотожності до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_0} v^+(x, T) \varphi \eta(T) dx + \int_{D_1} h_1 v^-(x, T) \varphi \eta(T) dx - \int_0^T \int_{\Omega_0} v^+ \varphi \eta' dx dt - \\
 & - \int_0^T \int_{D_1} h_1 v^- \varphi \eta' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi + \zeta_0 \varphi) \eta dx dt + \\
 & + \int_0^T \int_{D_1} (h_1 \nabla_{\tilde{x}} v^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi + \zeta_1 \varphi) \eta dx dt + 2 \delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} h_1^{-1} \mu \varphi \eta dx dt = \\
 & = \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f_0 \varphi dx + \int_{D_1} h_1 f_0 \varphi dx + 2 \delta_{\beta,1} \int_{D_1} g_0 \varphi dx + \int_{S^\pm} q_0^\pm \varphi d\tilde{x} \right) \eta dt
 \end{aligned}$$

для всіх $\eta \in C^1([0, T])$, $\varphi \in H^1(\Omega_1)$, $\varphi|_{Q_0} = 0$. Легко бачити, що остання тотожність еквівалентна наступним двом тотожностям:

$$\int_{\Omega_0} v^+(x, T) \varphi \eta(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi + \zeta_0 \varphi) \eta dx dt -$$

$$- \int_0^T \int_{\Omega_0} v^+ \varphi \eta' dx dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f_0 \varphi dx + \int_{S^\pm} q_0^\pm \varphi d\bar{x} \right) \eta dt \quad (29)$$

для всіх $\eta \in C^1([0, T])$, $\varphi \in H^1(\Omega_0)$, $\varphi|_{Q_0} = 0$, та

$$\begin{aligned} & \int_{D_1} h_1 v^-(x, T) \varphi \eta(T) dx - \int_0^T \int_{D_1} h_1 v^- \varphi \eta' dx dt + \\ & + \int_0^T \left(\int_{D_1} (h_1 \nabla_{\bar{x}} v^- \cdot \nabla_{\bar{x}} \varphi + \zeta_1 \varphi) dx + 2 \delta_{\alpha,1} \int_{D_1} h_1^{-1} \mu \varphi dx \right) \eta dt = \\ & = \int_0^T \left(\int_{D_1} (h_1 f_0 + 2 \delta_{\beta,1} g_0) \varphi dx \right) \eta dt \end{aligned} \quad (30)$$

для всіх $\eta \in C^1([0, T])$, $\forall \varphi \in H^1(D_1)$, $\varphi|_{Q_0} = 0$.

Позначимо $H^1(\Omega_0, Q_0) := \{v \in H^1(\Omega_0) : v|_{Q_0} = 0\}$, $H^1(D_1, Q_0) := \{v \in H^1(D_1) : v|_{Q_0} = 0\}$. Розглянемо простори

$$U_0 = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega_0, Q_0)) : v' \in L^2(0, T; (H^1(\Omega_0, Q_0))^*)\},$$

$$U_1 = \{v \in L^2(0, T; H^1(D_1, Q_0)) : v' \in L^2(0, T; (H^1(D_1, Q_0))^*)\}.$$

Простір функцій $\{\varphi \eta : \varphi \in H^1(\Omega_0)$, $\varphi|_{Q_0} = 0$, $\eta \in C^1([0, T])\}$ щільний в U_0 , а простір $\{\varphi \eta : \varphi \in H^1(D_1)$, $\varphi|_{Q_0} = 0$, $\eta \in C^1([0, T])\}$ щільний в U_1 (див. [32, с. 329]).

Звідси випливає, що тотожність (29) виконується для довільної функції $\psi \in U_0$, а тотожність (30) — для довільної функції $\psi \in U_1$. Тому з (28) і тотожності (29) випливає, що v^+ є слабким розв'язком задачі

$$\begin{cases} \partial_t v^+ - \Delta v^+ + \zeta_0 = f_0 & \text{в } \Omega_0 \times (0, T), \\ v^+ = 0 & \text{на } Q_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu v^+ = q_0^\pm & \text{на } S^\pm \times (0, T), \\ v^+|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega_0, \end{cases} \quad (31)$$

з поки що невідомою функцією ζ_0 , а з (28) і тотожності (30) випливає, що v^- є слабким розв'язком задачі

$$\begin{cases} h_1 \partial_t v^- - \operatorname{div}_{\bar{x}}(h_1 \nabla_{\bar{x}} v^-) + \\ + \zeta_1 + 2 \delta_{\alpha,1} h_1^{-1} \mu = h_1 f_0 + 2 \delta_{\beta,1} g_0 & \text{в } D_1 \times (0, T), \\ v^- = 0 & \text{на } Q_0 \times (0, T), \\ \partial_\nu v^- = 0 & \text{на } Q_1 \times (0, T), \\ v^-|_{t=0} = 0 & \text{в } D_1. \end{cases} \quad (32)$$

з невідомими поки що функціями ζ_1 і μ .

Задача (32) є крайовою задачею відносно тільки двох просторових змінних x_1 і x_3 . Змінна x_2 входить в цю задачу як параметр.

5.5 Знайдемо тепер функції ζ_0 , ζ_1 та μ за допомогою метода Браудера – Мінті. В інтегральну тотожність (24) підставимо в якості тестової функції розв'язок v_ε :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon) v_\varepsilon) dx dt + \\ & \quad + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) v_\varepsilon d\sigma_x dt = \\ & = \int_0^T \left(\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon v_\varepsilon dx + \varepsilon^\beta \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon v_\varepsilon d\sigma_x + \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm v_\varepsilon d\tilde{x} \right) dt. \end{aligned}$$

З умов (2), (3), (4) та з (23) випливає, що границя (при $\varepsilon \rightarrow 0$) правої частини рівна

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_0} f_0 v^+ dx dt + \int_0^T \int_{D_1} h_1 f_0 v^- dx dt + \\ & \quad + 2\delta_{\beta,1} \int_0^T \int_{D_1} g_0 v^- dx dt + \int_0^T \int_{S^\pm} q_0^\pm v^\pm d\tilde{x} dt := I_1, \end{aligned}$$

а, беручи до уваги інтегральні тотожності (29) з тестовою функцією v^+ та (30) з тестовою функцією v^- , маємо

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon) v_\varepsilon) dx dt + \right. \\ & \quad + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) v_\varepsilon d\sigma_x dt \left. \right) = I_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (v^+(x, T))^2 dx + \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega_0} (|\nabla_x v^+|^2 + \zeta_0 v^+) dx dt + \frac{1}{2} \int_{D_1} h_1 (v^-(x, T))^2 dx + \\ & \quad + \int_0^T \int_{D_1} (h_1 |\nabla_{\tilde{x}} v^-|^2 + \zeta_1 v^-) dx dt + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} h_1^{-1} \mu v^- dx dt. \quad (33) \end{aligned}$$

Розглянемо функцію $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_1))$, $\varphi|_{Q_0} = 0$ для м. в. $t \in (0, T)$. За допомогою функції φ визначимо функцію

$$\psi(x, t) := \begin{cases} \varphi(x, t), & (x, t) \in (\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}) \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in G_\varepsilon^{(2)} \times (0, T). \end{cases}$$

Очевидно, що $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_1))$, $\psi|_{Q_0} = 0$ для м. в. $t \in (0, T)$. Використаємо наступну нерівність монотонності:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (v_\varepsilon(x, T) - \psi(x, T))^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x v_\varepsilon - \nabla_x \psi|^2 dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla_{\tilde{x}} v_\varepsilon - \nabla_{\tilde{x}} \psi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\kappa_0(v_\varepsilon) - \kappa_0(\psi))(v_\varepsilon - \psi) dx dt + \\ & + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} (\kappa_1(v_\varepsilon) - \kappa_1(\psi))(v_\varepsilon - \psi) d\sigma_x dt \geq 0. \end{aligned}$$

Перепишемо цю нерівність у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (v_\varepsilon(x, T) - \varphi(x, T))^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x v_\varepsilon - \nabla_x \varphi|^2 dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla_{\tilde{x}} v_\varepsilon - \nabla_{\tilde{x}} \varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (\kappa_0(v_\varepsilon) - \kappa_0(\varphi))(v_\varepsilon - \varphi) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(2)}} (\kappa_0(v_\varepsilon) - \kappa_0(0)) v_\varepsilon dx dt + \\ & + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} (\kappa_1(v_\varepsilon) - \kappa_1(\varphi))(v_\varepsilon - \varphi) d\sigma_x dt \geq 0. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon) v_\varepsilon) dx dt + \\ & + \varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon) v_\varepsilon d\sigma_x dt - \int_{\Omega_0} v_\varepsilon(x, T) \varphi(x, T) dx - \\ & - \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon(x, T) \varphi(x, T) dx - 2 \int_0^T \int_{\Omega_0} \nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi dx dt - \\ & - 2 \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_{\tilde{x}} v_\varepsilon \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi dx dt - \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(2)}} \kappa_0(0) v_\varepsilon dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (\varphi(x, T))^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x \varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla_{\tilde{x}} \varphi|^2 dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (\kappa_0(\varphi) \varphi - \kappa_0(v_\varepsilon) \varphi - \kappa_0(\varphi) v_\varepsilon) dx dt + \end{aligned}$$

$$+\varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} (\kappa_1(\varphi) \varphi - \kappa_1(v_\varepsilon) \varphi - \kappa_1(\varphi) v_\varepsilon) d\sigma_x dt \geq 0.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Границя першого рядка визначається з рівності (33), а границі решти доданків знайдемо, використовуючи оператори продовження нулем і співвідношення (7) та (23). Отже, маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (v^+(x, T))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{D_1} h_1 (v^-(x, T))^2 dx + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} (|\nabla_x v^+|^2 + \zeta_0 v^+) dx dt + \int_0^T \int_{D_1} (h_1 |\nabla_{\tilde{x}} v^-|^2 + \zeta_1 v^-) dx dt + \\ & + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} h_1^{-1} \mu v^- dx dt - \int_{\Omega_0} v^+(x, T) \varphi(x, T) dx - \\ & - \int_{D_1} h_1 v^-(x, T) \varphi(x, T) dx - 2 \int_0^T \int_{\Omega_0} \nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi dx dt - \\ & - 2 \int_0^T \int_{D_1} h_1 \nabla_{\tilde{x}} v^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \varphi^2(x, T) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{D_1} h_1 \varphi^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x \varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{D_1} h_1 |\nabla_{\tilde{x}} \varphi|^2 dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\kappa_0(\varphi) \varphi - \zeta_0 \varphi - \kappa_0(\varphi) v^+) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{D_1} (h_1 \kappa_0(\varphi) \varphi - \zeta_1 \varphi - h_1 \kappa_0(\varphi) v^-) dx dt + \\ & + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} (\kappa_1(\varphi) \varphi - h_1^{-1} \mu \varphi - \kappa_1(\varphi) v^-) d\sigma_x dt \geq 0. \end{aligned}$$

Після групування доданків отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (v^+(x, T) - \varphi(x, T))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{D_1} h_1 (v^-(x, T) - \varphi(x, T))^2 dx + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x v^+ - \nabla_x \varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{D_1} h_1 |\nabla_{\tilde{x}} v^- - \nabla_{\tilde{x}} \varphi|^2 dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\zeta_0 - \kappa_0(\varphi))(v^+ - \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{D_1} (\zeta_1 - h_1 \kappa_0(\varphi))(v^- - \varphi) dx dt + \end{aligned}$$

$$+2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} (h_1^{-1}\mu - \kappa_1(\varphi))(v^- - \varphi) dx dt \geq 0.$$

Поклавши в останній нерівності

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} v^+ - \lambda \psi_0(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ v^- - \lambda \psi_1(x, t), & (x, t) \in D_1 \times (0, T), \end{cases}$$

де $\lambda > 0$, $\psi_0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega_0, Q_0))$, $\psi_1 \in L^2(0, T; H^1(D_1, Q_0))$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \psi_0^2 dx + \frac{1}{2} \int_{D_1} h_1 \psi_1^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_0} |\nabla_x \psi_0|^2 dx dt + \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_{D_1} h_1 |\nabla_{\bar{x}} \psi_1|^2 dx dt \right) + \int_0^T \int_{\Omega_0} (\zeta_0 - \kappa_0(v^+ - \lambda \psi_0)) \psi_0 dx dt + \\ & \quad + \int_0^T \int_{D_1} (\zeta_1 - h_1 \kappa_0(v^- - \lambda \psi_1)) \psi_1 dx dt + \\ & \quad + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} (h_1^{-1} \mu - \kappa_1(v^- - \lambda \psi_1)) \psi_1 dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Перейдемо до границі при $\lambda \rightarrow 0$, враховуючи неперервність функцій κ_0 та κ_1 :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_0} (\zeta_0 - \kappa_0(v^+)) \psi_0 dx dt + \int_0^T \int_{D_1} (\zeta_1 - h_1 \kappa_0(v^-)) \psi_1 dx dt + \\ & \quad + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} (h_1^{-1} \mu - \kappa_1(v^-)) \psi_1 dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Поклавши $\psi_0 := -\psi_0$, $\psi_1 := -\psi_1$, отримаємо, що насправді має місце наступна тотожність:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_0} (\zeta_0 - \kappa_0(v^+)) \psi_0 dx dt + \int_0^T \int_{D_1} (\zeta_1 - h_1 \kappa_0(v^-)) \psi_1 dx dt + \\ & \quad + 2\delta_{\alpha,1} \int_0^T \int_{D_1} (h_1^{-1} \mu - \kappa_1(v^-)) \psi_1 dx dt = 0 \end{aligned}$$

для всіх $\psi_0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega_0, Q_0))$, $\psi_1 \in L^2(0, T; H^1(D_1, Q_0))$. Оскільки $\psi_0|_{Q_0} = \psi_1|_{Q_1} = 0$, то дана рівність еквівалентна двом рівностям

$$\zeta_0 = \kappa_0(v^+) \quad \text{м. с. в } \Omega_0 \times (0, T)$$

та

$$\zeta_1 + 2\delta_{\alpha,1} h_1^{-1} \mu = h_1 \kappa_0(v^-) + 2\delta_{\alpha,1} \kappa_1(v^-) \text{ м. с. в } D_1 \times (0, T).$$

Таким чином, з (29) випливає, що функція v^+ є слабким розв'язком задачі (9), а з (30), що v^- — слабкий розв'язок задачі (10).

На підставі умов (5) задачі (9) та (10) є єдиними.

Оскільки всі наведені вище міркування мають місце для довільної підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яка вибиралася на початку доведення, то мають місце границі (8). Теорема 3.1 доведена. \square

6 Доведення теореми 3.2. Випадок $\alpha < 1$

Теорему будемо доводити при додатковому припущенні, що $\kappa_1(0) = 0$. Аналогічно до того, як це було зроблено в першому пункті доведення теореми 3.1, з оцінки (19) отримаємо, що існує така підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку ми знов позначимо через ε), що мають місце границі (23). Так само показуємо, що $v_0^{2,-} = 0$ м. с. в $D_2 \times (0, T)$.

З нерівності (20) отримаємо, що

$$\varepsilon^\alpha \int_0^T \int_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2 d\sigma_x dt \leq C_1. \quad (34)$$

Тоді на підставі (14) з врахуванням (19) та (34) випливає

$$\int_0^T \int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2 dx dt \leq C_2 \varepsilon^\vartheta, \quad (35)$$

де $\vartheta = \min(1, 1 - \alpha) > 0$. Таким чином,

$$\tilde{v}_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{s} 0 \text{ сильно в } L^2(D_1 \times (0, T)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Повторюючи викладки пункту 5.3 доводимо, що $v^+|_{Q_0} = 0$ в сенсі сліду для майже всіх $t \in (0, T)$.

Оскільки вкладення простору $L^2(0, T; H^1(\Omega_0))$ в простір $L^2(\Omega_0 \times (0, T))$ — компактне, то існує така підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$ (яку ми знов позначимо через ε), що

$$v_\varepsilon \longrightarrow v^+ \text{ сильно в } L^2(\Omega_0 \times (0, T)) \text{ та м. с. в } \Omega_0 \times (0, T). \quad (36)$$

З (36), враховуючи неперервність функції κ_0 , отримаємо

$$\kappa_0(v_\varepsilon) \longrightarrow \kappa_0(v^+) \text{ м. с. в } \Omega_0 \times (0, T) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Використовуючи лему 1.3 в [33, с. 25] та (19), виводимо, що $\zeta_0 = \kappa_0(v^+)$ м. с. в $\Omega_0 \times (0, T)$.

Тепер розглянемо довільну функцію φ з простору $L^2(0, T; H^1(\Omega_0, Q_0))$ (означення цього простору дано в доведенні теореми 3.1, пункт 5.4). За допомогою φ визначимо функцію

$$\psi(x, t) := \begin{cases} \varphi(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ 0, & (x, t) \in (G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}) \times (0, T). \end{cases}$$

Очевидно, що $\psi \in W_\varepsilon$. Підставимо функцію ψ в інтегральну тотожність (24):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} v_\varepsilon(x, T) \varphi(x, T) dx - \int_0^T \int_{\Omega_0} v_\varepsilon \varphi' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} \kappa_0(v_\varepsilon) \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi dx dt + \int_0^T \int_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi d\tilde{x} dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Перейдемо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (37) врахувавши знайдені вище границі. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} v^+(x, T) \varphi(x, T) dx - \int_0^T \int_{\Omega_0} v^+ \varphi' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_0} \nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_0} \kappa_0(v^+) \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\Omega_0} f_0 \varphi dx dt + \int_0^T \int_{S^\pm} q_0^\pm \varphi d\tilde{x} dt \end{aligned} \quad (38)$$

для довільної $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_0, Q_0))$.

З інтегральної тотожності (38) випливає, що функція v^+ – слабкий розв'язок задачі (12). На підставі умови (5) для $i = 0$ такий розв'язок – єдиний.

Оскільки всі наведені вище міркування мають місце для довільної підпоследовності $\{\varepsilon\}$, яка вибиралася на початку доведення, то мають місце границі (11). Теорема 3.2 доведена. \square

7 Висновки

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку квазілінійної параболічної крайової задачі в дворівневому густому з'єднанні типу 3 : 2 : 2, а також вплив крайових умов, заданих на межах тонких приєднаних областей, та параметрів α і β на асимптотичну поведінку розв'язку.

Показано, що у випадку однорідних умов Діріхле на межах тонких дисків з 2-го рівня вихідна задача (1) розпадається в граничному переході (при $\varepsilon \rightarrow 0$) на дві незалежні крайові задачі (9) та (10) відповідно в тілі з'єднання та в області, що заповнюється тонкими дисками з першого рівня. Ці задачі формують в сукупності усереднену задачу для задачі (1).

Також показано, що у випадку, коли $\alpha < 1$, головний член асимптотики розв'язку v_ε вихідної задачі (1) дорівнює нулю в тонких дисках з обох рівнів, і усереднена задача для задачі (1) представляє собою одну крайову задачу (12) в тілі з'єднання. В цьому випадку вплив нелінійних крайових умов Фур'є такий самий, як і у випадку однорідних умов Діріхле.

- [1] Хруслов Е.Я. О резонансных явлениях в одной задаче дифракции // Теор. функц. Функц. анал. прил. – 1968. – **10**. – С. 113-120.
- [2] Котляров В.П., Хруслов Е.Я. О предельном граничном условии одной задачи Неймана // Теор. функц. Функц. анал. прил. – 1970. – **10**. – С. 83-96.
- [3] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – К.: Наук. думка, 1974.
- [4] Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Доклады РАН. – 1993. – **333**. – С. 13-15.
- [5] Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа “густого гребешка” // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1996. – **19**. – С. 138-174.
- [6] Mel'nyk T.A. Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1999. – **18**, №4. – P. 953-975.

- [7] Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и Анализ. – 2000. – **12**, №2. – С. 188-238.
- [8] Mel'nyk T.A. Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of the type 3:2:1 // Ukr. Mat. Zh. – 2000. – **52**. – P. 1524-1534.
- [9] Назаров С.А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // Труды семинара им. И.Г.Петровского – 1995. – **18**. – С. 1-78 (Часть I); Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 2000. – **20**. – С. 155-196 (Часть II).
- [10] Mel'nyk T.A. Eigenmodes and pseudo-eigenmodes of thick multi-level junctions // Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction - 2004" (St. Petersburg, June 29-July 2, 2004 p.). – Київ, 1997. – P. 51-52.
- [11] De Maio U., Durante T., Mel'nyk T.A. Asymptotic Approximation for the Solution to the Robin Problem in a Thick Multi-Level Junction // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M³AS). – 2005. – **15**, №12. – P. 1897-1921.
- [12] Mel'nyk T.A., Vashchuk P.S. Asymptotic approximation for the solution to a boundary-value problem with varying type of boundary conditions in a thick two-level junction // Nonlinear oscillations. – 2005. – **8**, №2. – P. 240-255.
- [13] Mel'nyk T.A., Vaschuk P.S. Homogenization of the Neumann-Fourier problem in a thick two-level junction of type 3:2:1 // Journal of Mathematical Physics, Analysis and Geometry. – 2006. – **2**, №3. – P. 318-337.
- [14] Мельник Т.А., Ващук П.С. Усреднение краевой задачи со сменным типом граничных условий в густом соединении // Дифференц. уравн. – 2007. – **43**, №5. – С. 677-685.
- [15] Durante T., Mel'nyk T.A. Asymptotic analysis of a parabolic problem in a thick two-level junction // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2007. – **3**, №3. – P. 313-341.
- [16] Lyshevshi S.E. Mems and Nems: Systems, Devices, and Structures. – CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.
- [17] Lavrentovich Y.I., Knyzkova T.V., Pidlisnyuk V.V. The potential of application of new nanostructural materials for degradation of pesticides in water // Proceedings of the 7th International HCH and Pesticides Forum "Towards the establishment of an obsolete POPS/pesticides stockpile fund for Central and Eastern European countries and new independent states"(Kyiv, June 5-7 2003). – Kyiv, 2003. – P. 167-169.
- [18] Lenczner M. Multiscale model for atomic force microscope array mechanical behavior // Applied Physics Letters. – 2007. – **90**. – P. 901-908.

- [19] *De Maio U., Mel'nyk T.A.* Homogenization of the Robin problem for the Poisson equation in a thick multi-structure of type 3:2:2 // *Asymptotic Analysis*. – 2005. – **41**. – P. 161–177.
- [20] *De Maio U., Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of the Neumann problem for the Ukawa equation in a thick multi-structure of type 3:2:2 // in the book "Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications", Birkhauser, Verlag Basel. – 2005. – **63**, №2. – P. 207-215.
- [21] *D'Apice C., De Maio U., Mel'nyk T.A.* Asymptotic analysis of a perturbed parabolic problem in a thick junction of type 3:2:2 // *Networks and Heterogeneous Media*. – 2007. – **2**, №2. – P. 255-277.
- [22] *Mel'nyk T.A.* Homogenization of a boundary value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1 // *Math. Models Meth. Appl. Sci.* – 2008. – **31**. – С. 1005-1027; <http://www.interscience.wiley.com/DOI: 10.1002/mma.951>
- [23] *Blanchard D., Gaudiello A., Mel'nyk T.A.* Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff-Love plate // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. – 2008. – **39**, №6. – P. 1764-1787.
- [24] *Blanchard D., Gaudiello A., Mossino J.* Highly oscillating boundaries and reduction of dimension: the critical case // *Analysis and Application*. – 2007. – **5**. – P. 137-163.
- [25] *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with 3d plate. Part I // *J. Math. Pures Appl.* – 2007. – **88**, №9. – P. 1-33 (Part I); *J. Math. Pures Appl.* – 2007. – **88**, №9. – P. 149-190 (Part II).
- [26] *Мельник Т.А., Чечкин Г.А.* Усреднение краевой задачи в густом каскадном соединении // *Проблемы математического анализа*. – 2008. – **37**. – С. 47-72.
- [27] *Мельник Т.А., Чечкин Г.А., Чечкина Т.П.* Теоремы сходимости для решений и интегралов энергии для краевой задачи с возмущенными краевыми условиями Неймана на границах тонких стержней в густых многоуровневых соединениях нового типа // *Проблемы математического анализа*. – 2009. – **40**, №2. – С. 113-131.
- [28] *Мельник Т.А., Чечкин Г.А.* Асимптотический анализ краевых задач в густых трёхмерных многоуровневых соединениях // *Математический сборник*. – 2009. – **200**, №3. – С. 49-74.
- [29] *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1975.
- [30] *Мельник Т.А., Сивак Е.А.* Асимптотический анализ параболической полулинейной задачи с нелинейными граничными многофазовыми взаимодействиями в перфорированной области // *Проблемы математического анализа*. – 2009. – **43**. – С. 107-128.

- [31] *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence: AMS, 1977.
- [32] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.
- [33] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.

**HOMOGENIZATION OF QUASILINEAR PARABOLIC
PROBLEMS WITH ALTERNATING NONLINEAR
FOURIER AND UNIFORM DIRICHLET BOUNDARY
CONDITIONS IN A THICK TWO-LEVEL JUNCTION
OF TYPE 3:2:2**

Taras MEL'NYK, Dmytro SADOVYI

Kyiv National Taras Shevchenko University
Volodymyrska str. 64, Kyiv 01033
E-mails: melnyk@imath.kiev.ua,
sadvoyj@univ.kiev.ua

The asymptotic behavior of solutions to quasilinear parabolic problems is studied in a thick two-level junction of type 3 : 2 : 2. This junction consists of a cylinder Ω_0 with ε -periodically strung thin disks of variable thickness. The disks are divided into two levels depending on their geometric structure and boundary conditions. We consider problems with alternating uniform Dirichlet and nonlinear Fourier conditions. In addition, the nonlinear Fourier boundary conditions depend on additional perturbed parameters. Subject to those parameters we prove convergence theorems for such problem (as $\varepsilon \rightarrow 0$) and investigate the influence of the boundary conditions on the asymptotic behavior of the solutions.