КВАНТОВО-ГОЛОНОМНИЙ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ НА ОСНОВІ ПОТОКІВ ТИПУ ЛАКСА НА МНОГОВИДАХ ГРАСМАНА ТА ДУАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МОМЕНТА

[1]*Анатолій ПРИКАРПАТСЬКИЙ,* [2]*Анатолій САМОЙЛЕНКО,*
[3]*Мирослава КОПИЧ,* [4]*Уфук ТАНЕРІ,* [5]*Деніс БЛЕКМОР*

[1]Інситут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова 3-б, Львів 79601,
[1]АГМ-Університет Науки та Технологій, Краків 30059, Польща
[2]Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська 3, Київ-4, 01601,
[3]Національний університет „Львівська Політехніка“
вул. Степана Бандери 12, Львів 79013
[4]Східно-Середземноморський Університет, Фамагуста, Кіпр
[5]Технологічний Інститут Нью-Джерсі, Нью-Йорк 07102, США

Редакція отримала статтю 3 листопада 2003 р.

Запропоновано загальний підхід до побудови квантово-голономного обчислювального алгоритму на основі потоків типу Лакса на многовидах Грасмана, методу редукції для відображення момента та теорії зв'язностей. Показано, що асоційовані групи голономій можуть бути використані для побудови алгоритмів квантових обчислень широкого спектру практичних задач.

1. КВАНТОВІ ОБЧИСЛЕННЯ: ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ВСТУП

1.1. Розглянемо двовимірний підпростір $F^{(2)} \subset \mathcal{H}$ деякого комплексного гільбертового нескінченновимірного простору H, який називатимемо далі простором одного квантового біту (кубіту), як

$$F^{(2)} = \underset{\mathbf{C}}{\operatorname{span}} \{|0>, |1> \in \mathcal{H}\}$$

з ортонормованою базою векторів $|0>, |1>\in \mathcal{H}$ стосовно скалярного добутку $<\cdot,\cdot>$ в $\mathcal{H}$, а також його n-й тензорний степінь

$$\mathcal{H}^{(n)} = \underset{(n\,\text{разів})}{\otimes} F^{(2)},$$

що є теж гільбертовим простором розмірності $dim\mathcal{H}^{(n)} = 2^n$, який називається n-кубітовим обчислювальним середовищем.

Розглянемо як найпростішу обчислювальну задачу імплементацію у це середовище довільну класичну поліноміально-обчислювальну функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, тобто обчислимо усі значення $f(x), x \in \mathbf{R}$, одночасно з потрібною точністю.

Візьмемо довільне число $x \in \mathbf{R}$ і зобразимо його в двійковій $\{0,1\}$ – системі, тим самим, ми можемо задати бієкцію

$$x \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)_2,$$

де, за означенням,

$$x = \sum_{i\in\mathbf{Z}} x_i 2^i,$$

а $x_i \in \{0,1\}$ для всіх $i \in \mathbf{Z}$. Така послідовність $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_2$ може бути бієктивно занурена в сконструйований вище гільбертів простір $\mathcal{H}^{(n)}$ n-кубітових станів:

$$\mathbf{R} \ni x \leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)_2 \leftrightarrow |x_1, x_2, \ldots, x_n) >\in \mathcal{H}^{(n)}.$$

Отже, для будь-якого $x \in \mathbf{R}$ можна сконструювати n-кубітовий стан за допомогою індукованого відображення

$$\mathbf{R} \ni x \leftrightarrow |x_1, x_2, \ldots, x_n >:= |(x) >\in \mathcal{H}^{(n)}. \tag{1}$$

На множині $\{0,1\} \subset \mathbf{Z}_2$ є звичайні алгебраїчні операції: якщо $x, y \in \mathbf{Z}_2$, то

$$x \oplus y = x + y (\mathrm{mod} 2),$$

або

$$0\oplus 0 = 0, \quad 1\oplus 1 = 0, \quad 0\oplus 1 = 1, \quad 1\oplus 0 = 1, \quad 1\cdot 1 = 1, \quad 1\cdot 0 = 0.$$

Означення. *Унітарне перетворення гільбертового простору* $\mathcal{H}^{(n+k)}$ *вигляду*

$$\mathcal{U}_f : |(x), (a) >\to |(x), (a) \oplus (f(x)) >, \tag{2}$$

де $(f(x))$ *та* (a) *відповідно позначають* $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))_2$ *та* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)_2$ *стосовно відображення* (1) *називається квантовим обчисленням стосовно будь-якого вектора* $|(a) >\in \mathcal{H}^{(k)}, k \in \mathbf{Z}_+$.

Це обчислення зазвичай виражається графічно у вигляді

$$\begin{array}{lcl} |(x) >\rightarrow & \boxed{\mathcal{U}_f} & \rightarrow |(x) > \\ |(a) >\rightarrow & & \rightarrow |(a) \oplus (f(x)) > . \end{array}$$

Із (2) на основі лінійності отримуємо, що

$$\mathcal{U}_f : \sum_{x\in\mathbf{R}} |(x), (a) >\rightarrow \sum_{x\in\mathbf{R}} |(x), (a) \oplus (f(x)) > .$$

Таким чином, видно, що оператор $\mathcal{U}_f : \mathcal{H}^{(n+k)} \rightarrow \mathcal{H}^{(n+k)}$ обчислює усі пари $|(x), (f(x)) >$, $x \in \mathbf{R}$, тобто графік відображення $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, що й було вихідною задачею.

Розглянемо, наприклад, [20], логічне відображення $f : \mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbf{R}$, таке, що $f(x) = 1$, якщо знак елемента $x \in X_1$ змінюється на протилежний, і $f(x) = 0$, якщо залишається незмінним, де, за визначенням, $\mathbf{R} = X_0 \cup X_1$, $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Візьмемо елемент $|(a) >\in \mathcal{H}^{(1)}$ у вигляді

$$|(a) >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0 > -|1 >)$$

і обчислимо значення

$$\mathcal{U}_f \left(\sum_{x\in\mathbf{R}} \alpha_x |(x) > \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0 > -|1 >) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{x\in X_0} \alpha_x |(x), 0 > - \sum_{x\in X_0} \alpha_x |(x), 1 > \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{x\in X_1} \alpha_x |(x), 1 > - \sum_{x\in X_1} \alpha_x |(x), 0 > \right) =$$

$$= \left(\sum_{x\in X_0} \alpha_x |(x) > - \sum_{x\in X_1} \alpha_x |(x) > \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0 > -|1 >) . \tag{3}$$

З (3) видно, що оператор $\mathcal{U}_f$ дійсно змінив знаки усіх елементів $x \in X_1$ на протилежний.

Алгоритми обчислень, подібні до (3), вирішують, як відомо [20], наступні важливі для застосувань проблеми, не розв'язані досі у загальному випадку за розумний проміжок часу за допомогою класичних комп'ютерів:

i) розклад на прості множники (факторизація) достатньо великого цілого числа $x \in \mathbf{Z}_+$ (P.Shor, 1994);

ii) пошуковий або сортувальний алгоритм для знаходження об'єкта в структурованому або неструктурованому середовищі даних (L.K.Grover, 1996; T.Hegg, 1997);

iii) швидке дискретне перетворення Фур'є (P.Shor,1994);

iv) знаходження мінімальних періодів періодичних функцій (P. Shor, 1994, A. Kitayev, 1995) та інші проблеми.

Важливим компонентом квантових обчислювальних алгоритмів є побудова відповідних унітарних перетворень та подальше контролювання їх дій на вектор-інформаційних даних з відповідного квантового обчислювального середовища.

Наступне спостереження завдяки [19], [21] виявилось особливо плідним для побудови нового підходу до реалізації квантових обчислювальних алгоритмів. А саме, візьмемо довільний самоспряжений проекційний оператор $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $P^2 = P$ і побудуємо оператор

$$U := \mathbf{1} - 2P.$$

Тоді, $U^{+}U = \mathbf{1}$, тобто відображення $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ є унітарним. Воно зветься [19] „юнітоном" і має велике значення для конструювання так званих базових квантових обчислювальних „воріт" (gates). Оскільки ці проекційні оператори, будучи залежними у загальному випадку від деякого простору параметрів, належать до многовиду петель Грасмана $Gr(\mathcal{H})$ [1], [19], проблема їх вивчення стосовно кодування заданої інформації в квантове інформаційне середовище та її квантове обчислення стає особливо важливою [19], [21].

Стосовно цього обчислювального аспекту на основі асоційованих многовидів Грасмана, ми вивчимо нижче деякі властивості гамільтонових потоків типу Лакса [10], [22] на сиплектичних грасманіанах петель в рамках схеми редукції Марсдена–Вайнстейна, дуальних відображень момента та теорії зв'язності. Нижче ми конструюємо так зване квантово-голономне обчислювальне перетворення, що діє в межах квантового обчислювального середовища, використовуючи спеціальні інваріанти Казіміра канонічної симплектичної структури на грасманіані петель, наділеному так званою зв'язністю Ульмана [13].

2. ГРАСМАНОВІ МНОГОВИДИ ПЕТЕЛЬ

2.1. Як відомо [1], многовид Грасмана асоційований з лінійним ермітовим простором $\mathcal{H}$ над $\mathbf{C}$, що є прикладом компактного простору, визначається як

$$G(\mathcal{H}) := \bigcup_{m} G_m(\mathcal{H}),$$

де $G_m(\mathcal{H})$, $m = \overline{1, \dim \mathcal{H}}$, є множиною усіх ермітових матриць, що задовольняють умову:

$$G_m(\mathcal{H}) := \{P \in Hom(\mathcal{H}) : P = P^2, P = P^+, SpP = m \in \mathbf{Z}_+\}.$$

Спряження "$+$" взято відносно звичайного скалярного добутку $< \cdot, \cdot >$ на $\mathcal{H}$. Квадратичне обмеження означає, що власні значення матричного оператора $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ є 0 або 1. Кожну компоненту $G_m(\mathcal{H})$ Грасманіана $G(\mathcal{H})$ можна також розглядати як фактор-простір унітарної групи $U(\mathcal{H})$:

$$G_m(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/(U(m) \times U(\mathcal{H}^\perp)),$$

де простір $\mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{H}$ є ортогональним до $U(m)\mathcal{H}$, тобто $U(m)\mathcal{H}^\perp = 0$, і група $U(\mathcal{H})$ діє транзитивно на кожну компоненту $G_m(\mathcal{H})$ як:

$$ad \;\; a : P \to aPa^+, \quad a \in U(\mathcal{H}). \tag{4}$$

2.2. Оскільки нас цікавлять інтегровні потоки на Грасманіані $G(\mathcal{H})$, необхідно визначити можливі інваріантні симплектичні структури як на компактному грасмановому многовиді $M := G(\mathcal{H})$, так і на Грасманіані петель $C_{\mathbf{S}^1}(M) = \Pi_{x \in \mathbf{S}^1} G(\mathcal{H})$, параметризованому точками кола $\mathbf{S}^1$. Найпростішу симплектичну структуру на $G(\mathcal{H})$ можна записати [2]

$$\omega^{(2)} := Sp(PdP \wedge dPP), \tag{5}$$

і вона є інваріантною стосовно натуральної $U(\mathcal{H})$-дії (4). Наступна лема стверджує, що 2-форма (5) є дійсно симплектичною.

Лема 1. *2-форма* (5) *на* $G(\mathcal{H})$ *є замкненою і невиродженою.*

Лема 2. *Дія* (4) *унітарної групи петель* $C_{\mathbf{S}^1}(U(\mathcal{H}))$ *на многовиді петель Грасмана* $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ *є гамільтоновою з еквіваріантним відображенням моменту* $l := C_{\mathbf{S}^1}(M) \to C_{\mathbf{S}^1}(u^*(\mathcal{H}))$, *яке визначається формулами*

$$il(P) = P, \qquad l^2(P) + il(P) = 0 \tag{6}$$

для усіх $P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, де $C_{\mathbf{S}^1}(u^*(\mathcal{H}))-$ спряжений простір до Лі-алгебри петель $C_{\mathbf{S}^1}(u(\mathcal{H}))$ унітарної групи Лі петель $C_{\mathbf{S}^1}(U(\mathcal{H}))$.

Як наслідок можна побудувати векторне поле

$$K : C_{\mathbf{S}^1}(M) \to T(C_{\mathbf{S}^1}(M)),$$

породжене певною функцією Гамільтона. За означенням

$$i_K \Omega^{(2)} = -dH_X(P),$$

звідки випливає, що для фіксованого $X \in C_{\mathbf{S}^1}(u(\mathcal{H}))$

$$dP/dt := K[P] = i[P, X]. \tag{7}$$

Результат (7) цілком збігається з отриманими в [2], [4], [5], маючи потрібну структуру типу Лакса [6–10]. Ця форма тут взагалі не використовує петлеву структуру фазового простору $C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Щоб побудувати потоки типу Лакса на Грасманіані петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, далі буде розглянуто новий потужний апарат, що базується на теорії дуального відображення моменту, запропонованого у [8].

3. СИМПЛЕКТИЧНІ СТРУКТУРИ НА ГРАСМАНОВИХ МНОГОВИДАХ ПЕТЕЛЬ

3.1. Точка $P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, справджуючи квадратичне обмеження $P^2 = P$, може бути вкладена згідно з лемою 2 у приєднаний простір $C_{\mathbf{S}^1}(u^*(H))$. Зобразимо отриману схему:

$$\begin{tikzcd} g^* \arrow[d, "\pi"'] & C_{\mathbf{S}^1}(M) \arrow[l] & G \times C_{\mathbf{S}^1}(M) \arrow[l, ":"'] \arrow[dll, "id"'] \\ C_{\mathbf{S}^1}(M) & & \end{tikzcd}$$

де $G := C_{\mathbf{S}^1}(U(H))$, g^* – відповідний спряжений простір до Лі-алгебри $g := C_{\mathbf{S}^1}(u(H))$ стосовно коінваріантної симетричної і невиродженої форми Кілінга, $\pi : g^* \to C_{\mathbf{S}^1}(M)$ – відповідна проекція на $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, генерована обмеженням $l^2 + il = 0$ для $l \in g^*$ згідно (6). Розглянемо симплектичну структуру (5) як редукцію натуральної структури Лі–Пуассона на g^*, [6–10]. На просторі g^* існує структура Лі–Пуассона

$$\{\gamma, \mu\}_{Lie} := (l, [\nabla\gamma(l), \nabla\mu(l)]), \tag{8}$$

визначена для будь-яких гладких функціоналів γ і $\mu \in \mathcal{D}(g^*)$, де ∇ – відповідне градієнтне відображення. Застосовуючи згадане вище квадратичне обмеження $il^2 + l = 0$ для $l \in g^*$, з (8) можна обчислити методами теорії стандартної редукції Дірака таку ж симплектичну структуру, як (5). Це доводить теорему.

Теорема 1. *Дужка Пуассона на просторі $\mathcal{D}(C_{\mathbf{S}^1}(M))$ породжена симплектичною структурою* (5) *є редукцією за Діраком природної дужки Лі–Пуассона* (8) *на $\mathcal{D}(g^*)$ стосовно відображення моменту і квадратичного обмеження* (6).

3.2. Описаний вище підхід до редукцій можна узагальнити на випадок, коли Лі-алгебру петель g розширити в термінах стандартного коциклу Маурера–Картана [6]. Відповідна дужка Лі–Пуассона на розширеному спряженому просторі $\hat{g}^*$ має вигляд

$$\{\gamma, \mu\}_0 := (l, [\nabla\gamma(l), \nabla\mu(l)]) + (\nabla\gamma(l), d\nabla\mu(l)/dx). \tag{9}$$

Тому дужка Лі–Пуассона (9) після накладання обмеження (6) продукує нову симлектичну структуру $\hat{\Omega}_0^{(2)} \in \Lambda^2(C_{\mathbf{S}^1}(M))$, узагальнюючи симплектичну структуру (5) на Грасманіані петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Зробимо цікаве і корисне розширення описаної вище конструкції.

Легко довести [7], що для будь-якого $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ дужки

$$\{\gamma, \mu\}_\lambda := (\ell + \lambda J, [\nabla\gamma(\ell), \nabla\mu(\ell)]) + (\nabla\gamma(\ell), d\nabla\mu(\ell)/dx),$$

$$\{\gamma, \mu\}_\lambda := (\ell, [\nabla\gamma(\ell), \nabla\mu(\ell)]) + \lambda^{-1}(\nabla\gamma(\ell), d\nabla\mu(\ell)/dx) \tag{10}$$

визначають на $\hat{g}^*$ пучки дужок Пуассона, які теж можна зредукувати на Грасманіан петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, якщо матриця $J \in g^*$ є сталою. Як наслідок, отримується пучок симплектичних структур $\hat{\Omega}_\lambda^{(2)} \in \Lambda^2(C_{\mathbf{S}^1}(M))$, $\lambda \in \mathbf{C}$, параметризований сталими матрицями $J \in \hat{g}^*$. Відповідні потоки типу Лакса на Грасманіані $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ будуються як гамільтонові системи $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, генеровані функціоналами Казіміра пучка дужок Пуассона (10), зредукованого на $C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Інваріанти Казіміра дужки (10) розглядаються у [6], [7] як розв'язки рівняння Новікова–Марченка:

$$d\nabla H(\lambda)(\ell)/dx = [\ell + \lambda J, \nabla H(\lambda)(l)],$$

$$d\nabla H(\lambda)(\ell)/dx = \lambda[\ell, \nabla H(\lambda)(l)],$$

де $H(\lambda) \in I_\lambda(\hat{g}^*)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ – функціонал Казіміра дужки (10). Враховуючи далі, що дужка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_1 := d/d\lambda\{\cdot,\cdot\}_\lambda|_{\lambda=0}$ володіє інваріантом

Казіміра $h_0 \in I_1(\hat{g}^*)$, можна спробувати побудувати асимптотичне при $|\lambda| \to \infty$ розвинення функціонала $H(\lambda) \in I_\lambda(\hat{g}^*)$ з головним членом $H_0 \in I_1(\hat{g}^*)$ вигляду

$$H(\lambda) \simeq H_0 + \sum_{j \geq 1} H_j \lambda^{-j}. \tag{11}$$

Коефіцієнти $H_j \in \mathcal{D}(\hat{g}^*)$, $j \in \mathbf{Z}_+$, утворюють інволютивну ієрархію функціоналів стосовно дужок $\{\cdot,\cdot\}_0$ і $\{\cdot,\cdot\}_1$. Цей факт є справедливим також для відповідних зредукованих на Грасманіан $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ симплектичних структур $\hat{\Omega}_0^{(2)}$ і $\hat{\Omega}_1^{(2)}$.

Нагадаємо, що знаходження асимптотичного розв'язку (11) є достатньо складною, ще не вирішеною в загальному вигляді аналітичною задачею. Один з можливих підходів до цього завдання полягає у відшуканні деякої додаткової інваріантної редукції фазового простору $\hat{g}^*$ на відповідний підпростір $\hat{g}^*_{red} \subset \hat{g}^*$, визначений як фактор-простір стосовно шарування, спричиненого деяким розподілом [7] на $\hat{g}^*$. Наприклад, позначимо через $\hat{g}^*_J \in \hat{g}^*$ максимальний фіксований інтегральний підмноговид розподілу

$$D_1 := \{K \in T(\hat{g}^*) : K(l) = [J, \nabla\gamma(l)], \quad l \in \hat{g}^*, \quad \gamma \in \mathcal{D}(\hat{g}^*)\}, \tag{12}$$

який є інтегровним, $[D_1, D_1] \subset D_1$. Визначимо інший розподіл D_0 на $\hat{g}^*$:

$$D_0 := \{K \in T(\hat{g}^*) : K(l) = [l - d/dx, \nabla h_0], \quad l \in \hat{g}, \quad h_0 \in I_1(\hat{g}^*)\}, \tag{13}$$

який також є інтегровним на $\hat{g}^*$, тобто $[D_0, D_0] \subset D_0$. Множина максимальних інтегровних підмноговидів розподілу (13) утворює шарування $\hat{g}^*_J/D_0$, листами якого є лінії перетину $\hat{g}^*_J$ з відповідними листами розподілу (13). Припускаючи, що шарування $\hat{g}^*_J/D_0$ є достатньо регулярним, можна визначити фактор-многовид $\hat{g}^*_{red} := \hat{g}^*_J/(\hat{g}^*_J/D_0)$. З (12) випливає, що $\hat{g}^*_J = \hat{g}^{\perp}_J$, де $\hat{g}^{\perp}_J \subset \hat{g}^*$ – ізотропна підалебра Лі стосовно елемента $J \in \hat{g}^*$, тобто $ad^*_{\hat{g}_j} J = 0$, і $\hat{g}^{\perp}_J \subset \hat{g}^*$ – її ортогональний підпростір стосовно звичайного скалярного добутку Кілінга на $\hat{g}$. Для того, щоб фактор $\hat{g}^*_{red}$ визначався інваріантно, необхідно, щоб умова $D_0(\hat{g}^*_J) \subset \hat{g}^*_J$ виконувалася для вибраного елемента $J \in \hat{g}^*$, що справджується за припущенням.

4. ВНУТРІШНЯ СТРУКТУРА ГРАСМАНІАНА ПЕТЕЛЬ І ДУАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МОМЕНТА

4.1. Відомо [6], [7], [10], що великий клас інтегровних динамічних систем на скінченновимірному многовиді можна отримати, будуючи відображення момента у дуальні простори деяких алгебр Лі петель за допомогою Лі–алгебричного підходу. Щоб успішно використати конструкцію у випадку грасманового многовиду петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, представимо многовид $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ як такий, що вкладений у матричний многовид $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M) := C_{\mathbf{S}^1}(M_{m,N}) \times C_{\mathbf{S}^1}(M_{m,N})$, з канонічною симплектичною структурою, яка узагальнює використану раніше у [8], [16] структуру

$$\tilde{\Omega}^{(2)} := \int\limits_0^{2\pi} dx Sp(dF \wedge dQ^T), \tag{14}$$

де T – транспонування, $(F,Q) \in C_{\mathbf{S}^1}(M_{m,N}) \times C_{\mathbf{S}^1}(M_{m,N})$ – простір усіх матриць петель з $Hom(\mathbf{C}^N;\mathbf{C}^m)$ з рангом m, $m = \overline{1,N}$. Довільну точку з $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ можна представити як композицію $(F,Q) \rightarrow P := Q^T F$ з обмеженнями:

$$F^T Q = (Q^T F)^*, \qquad F^T Q F^T Q = F^T Q, \tag{15}$$

що задовольняють вкладення $P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, де "$*$" – звичайне комплексне спряження. У випадку, коли $Q = F^* \in C_{\mathbf{S}^1}(M_{m,N})$, отримуємо, що $P = F^+F \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, якщо $F^+FF^+F = F^+F$ для будь-яких $F \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$ зі скалярним обмеженням $Sp(F^+F) = m$, сталим на $C_{\mathbf{S}^1}(M)$.

Існує природна симплектична дія контурної групи Лі $G = C_{\mathbf{S}^1}(U(\mathcal{H}))$ на простір $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$, визначена як

$$a : (F,Q) \rightarrow (F_a, Q_a), \tag{16}$$

де

$$F_a := Fa^+, \qquad Q_a := aQ^T$$

для будь-яких $a \in G$, $(F,Q) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$.

Теорема 2. *Дія* (16) *на* $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$ *є гамільтоновою з еквіваріантним відображенням момента* $l : \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M) \rightarrow \hat{g}^*$, *що визначається як*

$$l(F,Q) = Q^T F. \tag{17}$$

Доведення теореми базується на міркуваннях, подібних до тих, які використовувались для доведення леми 2 попереднього підрозділу.

4.2. Оскільки на приєднаному просторі $\hat{g}^*$ існує природна структура Лі–Пуассона (8), її редукція на многовид $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$ породжує симплектичну структуру (14). Беручи до уваги обмеження (15) і результат (17), можна знайти пучок симплектичних структур на Грасманіані петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, редукуючи пучок дужок Пуассона (10) стосовно обмежень

$$l^+ = -l, \quad l^2 + il = 0, \quad iSp\, l = m, \; m \in \mathbf{Z}_+. \tag{18}$$

Відображення (17) дозволяє побудувати схему:

$$\begin{array}{ccccc} G \times \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M): & \longrightarrow & \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C_{\mathbf{S}^1}(M), \\ & & \downarrow l & \nearrow_{\pi} & \\ & & \hat{g}^* & & \end{array} \tag{19}$$

де проекції π і $\tilde{\pi}$ задовольняють умову $\pi \circ l = \tilde{\pi}$ стосовно обмежень (18). Оскільки відображення момента (17) не ін'єктивне, є труднощі при знаходженні пучка симплектичних структур $\tilde{\Omega}_\lambda^{(2)} \in \Lambda^2(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M))$, $\lambda \in \mathbf{C}$, відповідного до пучка дужки Пуассона (10) на g^*, і при узагальненні зредукованої дужки (14) стосовно обмеження $F^T Q = (Q^T F)^*$. Як згадувалося вище, конструкція стає тривіальною, коли $Q = F^*$, породжуючи оригінальну симплектичну структуру

$$\tilde{\Omega}^{(2)} := \int_0^{2\pi} dx Sp(dF \wedge dF^+) \tag{20}$$

на просторі петель $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) := \Big\{(F, Q = F^*) \subset \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)\Big\}$. Очевидно, що симплектичну структуру (20) отримано з дужки Лі–Пуассона (8) на g^* стосовно діаграми (19) з використанням загальних формул:

$$i\delta\gamma/\delta F = (\delta\gamma/\delta l)^T Q^T, \qquad i\delta\gamma/\delta Q = (\delta\gamma/\delta l) F^T,$$

де $il = il(F, Q) := Q^T F \in g^*$ і $\gamma \in \mathcal{D}(g^*)$ – довільний гладкий функціонал. Редукуючи за Діраком симплектичну структуру (20) на підмноговид $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ стосовно другого обмеження $F^+ F = F^+ F F^+ F$, де $(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$, можна знайти точну симплектичну структуру, яку далі можна зредукувати до симплектичної структури (5).

Зауважимо, що оригінальна симплектична структура (14) є інваріантна також щодо наступної $G(m)$-контурної групової дії:

$$F :\longrightarrow F_a := aF, \qquad Q^T :\longrightarrow Q_a^T := Q^T a^+, \tag{21}$$

де $a \in G(m) := C_{\mathbf{S}^1}(U(m))$, $m := rank(F, Q)$. Дія (21) породжує таке відображення момента на многовид $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M) \ni (F, Q)$:

$$q : (F, Q) \longrightarrow F Q^T \in g^*(m). \tag{22}$$

З відображенням (22) пов'язана наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccccc} G(m)\times \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M): & \longrightarrow & \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M) & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & C_{\mathbf{S}^1}(M) \\ & & \downarrow q & \pi \nearrow & \\ & & \hat{g}^*(m) & & \end{array} \tag{23}$$

Оскільки $rank(F,Q)=m$, то очевидно, що $rank(F,Q^T)=m$, $\det q\neq 0$ і $Sp\, q=m$. Припускаючи далі, що $q\equiv 1$, можна переконатися, що попереднє відображення момента $l(F,Q)\in g^*$ задовольняє обмеження $il^2+l=0$ тотожно. Тому можна редукувати многовид петель $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$ на многовид петель Грасмана $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ стосовно обмежень $FQ^T=\mathbf{1}$, $FQ^T=Q^*F^+$. Відповідна редукована симплектична структура на многовиді $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ співпадає з (5), якщо накладено достатню умову $Q=F^*$ для обмеження $-l^+=l$. Крім того, завдяки подібності діаграм (19) і (23) стосовно взаємних групових дій, справедлива теорема.

Теорема 3. *Дужка Лі–Пуассона* (8)*, зредукована на многовид Грасмана* $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ *щодо обмеження* $il^2+l=0$ *і відображення моментa* $il(F,F^+)=F^+F=P\in C_{\mathbf{S}^1}(M)$*, збігається з дужкою Пуассона, породженою симплектичною структурою* (20)*, інваріантно зредукованою на* $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ *щодо обмеження першого класу* $q(F,F^+)=FF^+\equiv\mathbf{1}$ *завдяки звичайній процедурі Марсдена–Вейнстайна* [3].

Як наслідок з цієї теореми можна побудувати потрібну симплектичну структуру на $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M)$, породжену дужкою Пуассона (9) на приєднаному просторі $\hat{g}^*$ до центрально розширеного контура алгебри Лі $\hat{g}=g\oplus\mathbf{C}$ в розумінні стандартного 2-коциклу Маурера–Картана на g. Знаходження ієрархії функціоналів Казіміра за схемою, описаною в розділі 3, дозволяє правильно побудувати інтегровні потоки типу Лакса на многовиді петель Грасмана $C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Повертаючись до діаграми (23), спробуємо вивчити природну зв'язність, що виникає на відповідному головному розшаруванні методом, запропонованим у [11], [12]. Справді, обмеження $FF^+=\mathbf{1}$, накладене на многовид петель $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, визначає ін'єктивну проекцію $\tilde{\pi}:\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)\to C_{\mathbf{S}^1}(M)$ на многовид петель Грасмана $C_{\mathbf{S}^1}(M)$ з симплектичною структурою $\hat{\Omega}^{(2)}\in\Lambda^2(C_{\mathbf{S}^1}(M))$, яка отримана методом редукцій Дірака з дужки Лі–Пуассона (9) на $\hat{g}^*$. Для того, щоб точно знайти зв'язність над $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, потрібно означити природним чином дотичний простір до шарів розшарування (23) у точці $(F,F^+)\in C_{\mathbf{S}^1}(M)\times G(m)$ над елементом $P=F^+F\in C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Отриманий при обчисленнях вектор $X_v\in T(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$ є вертикальним тоді і тільки тоді, коли $\tilde{\pi}_*(X_v) = 0$ у будь-якій точці $(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, де $\tilde{\pi}(F, F^+) := F^+F = P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, тобто $X_v^+F + F^+X_v = 0$.

Будемо називати вектор $X_h \in T(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$ горизонтальним, якщо він є ортогональним стосовно скалярного добутку Sp-типу до простору вертикальних векторів, означених вище. Звідси випливає, що

$$\int_0^{2\pi} dx Sp(X_h^+ \cdot AF) = 0 \tag{24}$$

для всіх $A \in C_{\mathbf{S}^1}(u(m))$ у точці $(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$. Оскільки $A^+ = -A$ для будь-якого $A \in C_{\mathbf{S}^1}(u(m))$, з (24) знаходимо, що $FX_h^+ - X_hF^+ = 0$. Сформулюємо ці результати в лемі.

Лема 3. *Дотичний простір $T(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$ може бути розщепленим інваріантно стосовно $G(m) \times G-$ дії на многовиді $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ у пряму суму $T_h(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) \oplus T_v(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) = T(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$, де*

$$T_h(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) = \left\{X \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) : XF^+ - FX^+ = 0\right\},$$

$$T_v(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) = \left\{X \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) : X^+F + F^+X = 0\right\}$$

у будь-якій точці $(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ з умовою $FF^+ = \mathbf{1}$.

Оскільки горизонтальний підпростір $T_h(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$ є G-інваріантним, що означає $F_aF_a^+ = \mathbf{1}$ і $X_aF_a^+ - F_aX_a^+ = 0$, де $F_a := F_a^{-1}$, $F_a^+ := aF$ і $X_a := Xa^+$, $X_a^+ := aX^+$ для будь-якого $a \in G := C_{\mathbf{S}^1}(U(H))$, то можна визначити 1-форму зв'язності $\omega \in \Lambda^1(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) \otimes g(m)$, яка задовольняє умови $\omega(X_h = FB^+) = 0$, $\omega(X_v = AF) = A$ для усіх $X_h \in T_h(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$, $X_v \in T_v(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$, з $A \in g(m)$, $B \in g$. Користуючись результатами [11], [13], побудуємо вираз типу Ульмана, що визначає форму зв'язності $\omega \in \Lambda^1(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)) \otimes g(m)$ наступним чином:

$$dFF^+ - FdF^+ = \frac{1}{2}\left(FF^+\omega + \omega FF^+\right). \tag{25}$$

Аналогічно до [11], [12] 1-форма зв'язності ω, знайдена з (25), задовольняє необхідну властивість калібрувального перетворення

$$r_a^*\omega = a^+da + ad_*(a^+)\omega$$

для усіх $a \in G(m)$. Якщо нормуюча умова $FF^+ = \mathbf{1}$ виконується на $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, то рівняння (25) разом з тотожністю для 1-форми

$$dFF^+ + FdF^+ = 0$$

визначає шукану 1-форму зв'язності. Зауважимо, що побудована вище зв'язність отримана з діаграми (23) у випадку, коли група Лі петель $G(m)$ діє на многовиді петель $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, нехтуючи структуру його центрального розширення, введену вище. Якщо брати до уваги центральне розширення групи петель $G(m)$, то для точного обчислення відповідних горизонтальних і вертикальних векторів з дотичного простору $T(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$ треба використати результуючу симплектичну структуру $\hat{\Omega}^{(2)} \in \Lambda^2(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$. При цьому обмеження $FF^+ = \mathbf{1}$, накладене на многовид $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, є інваріантним стосовно звичайної редукції Дірака симплектичної структури (20) завдяки тотожності

$$\{Q(A), Q(B)\} = Q([A,B]) :\stackrel{q=\mathbf{I}}{\Longrightarrow} 0$$

для будь-яких $A, B \in g(m)$, де $Q(\cdot) = (Q, \cdot)$. Ця інваріантність порушується, коли редукувати відповідну центрально розширену симплектичну структуру $\hat{\Omega}^{(2)} \in \Lambda^2(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$, отриману з дужки Лі–Пуассона (9) спроектовану на многовид петель $(\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*))$. Зауважимо, що потоки типу Лакса на многовидах типу Грасмана розглядалися, крім [2], [4], [5], [16], також в статтях [14], [15], [17], грунтуючись в основному на класичному алгебричному підході. Цікавим результатом з [15] є доведення інтегровності за Лаксом нелінійної динамічної системи

$$dP/dt = 2[P_{xx}, P] \tag{26}$$

на многовиді петель Грасмана $C_{\mathbf{S}^1}(M)$. Було б вартим уваги результатом отримати потоки такого ж типу за допомогою нашого підходу дуального відображення моменту.

5. СТРУКТУРА ГРУП ГОЛОНОМІЙ КВАНТОВОГО ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

5.1. Розглянемо головний розшарований простір $G(m) \times \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) \xrightarrow{\tilde{\pi}} C_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, де, за означенням,

$$\tilde{\pi}(F, \tilde{F}) := F^+F \in C_{\mathbf{S}^1}(M^*)$$

для кожної пари $(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$. Оскільки многовид $\tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ є симплектичним з симплектичною структурою (20), можна її редукувати на многовид петель Штіфеля $St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ [1] стосовно відображення момента $q : \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) \to g^*(m)$, поклавши $q(F, F^+) = 0$, $Sp(FF^+) = m$. Тим самим отримуємо, що

$$St_{\mathbf{S}^1}(M^*) = \{(F, F^+) \in \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) : FF^+ = \mathbf{1}_m\}.$$

Так як група петель $G(m)$ діє також на многовид Штіфеля $St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, залишаючи його інваріантним, можна обмежити проекцію $\tilde{\pi} : \tilde{C}_{\mathbf{S}^1}(M^*) \to C_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ на многовид $St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, отримуючи нове так зване універсальне грасманове головне розшарування петель

$$G(m) \times St_{\mathbf{S}^1}(M^*) \xrightarrow{\tilde{\pi}} C_{\mathbf{S}^1}(M) \tag{27}$$

з базою, що співпадає з грасмановим многовидом петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$.

Припустимо, що елемент $P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$ діє на унітарний вектор-простір $\mathcal{H}^{(N)}$ розмірності $\dim\mathcal{H}^{(N)} = 2^N$ і розглянемо підпростір образу $ImP \subset \mathcal{H}^{(N)}$, тобто для кожного $f \in ImP$ виконується умова $Pf = f$. Цим шляхом можна сконструювати асоційоване з (27) векторне розшарування

$$G(m) \times C_{\mathbf{S}^1}(M;\mathcal{H}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} C_{\mathbf{S}^1}(M),$$

де, за означенням,

$$C_{\mathbf{S}^1}(M;\mathcal{H}) := \{(P, ImP) : P \in C_{\mathbf{S}^1}(M)\}$$

і групова дія $A : (P, ImP) \to (P, ImP \circ A)$ для будь-якого $A \in G(m)$ задається наступним чином. Нехай вектори $f_j \in ImP$, $j = \overline{1,m}$, утворюють деяку базу простору ImP, тобто кожен вектор $f \in ImP$ розкладається як $f = \sum\limits_{j=1}^{m} f_j c_j(f)$ з деякими комплексними коефіцієнтами $c_j(f) \in \mathbf{C}$, $j = \overline{1,m}$. Тоді дія $f \circ A := \sum\limits_{j,k=1}^{m} f_j A_{jk} c_k(f)$ для будь-якого m-вимірного матричного зображення $A \in G(m)$. З іншого боку, розглянемо універсальне грасманове розшарування петель (27) і обчислимо наступну величину:

$$PF^+ = (F^+F)F^+ = F^+(FF^+) = F^+,$$

оскільки для будь-якої пари $(F, F^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ виконується $FF^+ = \mathbf{1}_m$. Таким чином, можна ототожнити матрицю $F^+ \in C_{\mathbf{S}^1}(M_{N+m})$ з матрицею, що складається з базових векторів $f_j \in ImP$, $j = \overline{1,m}$, побудованих вище, тобто можна позначити матрицю

$$F^+ := (f_1, f_2, \ldots, f_m) := |F>$$

для кожної пари $(F, F^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ і записати наступні вирази:

$$P = |F><F|, \qquad ImP = \operatorname*{span}_{\mathbf{C}} |F> .$$

5.2. Перейдемо до вивчення деяких спеціальних потоків на грасмановому многовиді петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, які пов'язані з функціоналами Казіміра другого пучка симплектичних структур (10), а саме

$$\{\gamma, \mu\}_\lambda := (\ell, [\nabla\gamma(\ell), \nabla\mu(\ell)]) + \lambda^{-1}(\nabla\gamma(\ell), d\nabla\mu(\ell)/dx) \tag{28}$$

для усіх $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ та $\gamma, \mu \in D(\tilde{\mathcal{J}}^*)$. Відповідні рівняння на функції Казіміра є

$$d\nabla H(\lambda; \ell)/dx = \lambda[\ell, \nabla H(\lambda; \ell)], \tag{29}$$

для усіх $\lambda \in \mathbf{C}$ та $\ell \in \tilde{\mathcal{J}}^*$. Використовуючи вираз типу (11), з (29) отримуємо, що при $i\ell = P$

$$d\nabla H_{j+1}(P)/dx = [P, \nabla H_j(P)]$$

для $j \in \mathbf{Z}_+$, $\nabla H_0(P) = P$. Стосовно структури Пуассона (28), редукованої на грасманів многовид петель $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, можна записати наступну нескінченну ієрархію гамільтонових потоків на $C_{\mathbf{S}^1}(M)$:

$$dP/dt_j = [P, \nabla H_j(P)], \tag{30}$$

де $t_j \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}_+$, є відповідними еволюційними параметрами. При $j = 1$ з (30) можна отримати нелінійний гамільтоновий потік на $C_{\mathbf{S}^1}(M)$, що точно співпадає з (26).

Із (30) видно, що величина $SpP = \dim(ImP) = m$ є інваріантом стосовно всіх потоків d/dt_j, $j \in \mathbf{Z}_+$. Це означає, що для кожного $t_j \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}_+$,

$$P(t_j) = W^+(t_j)P_0W(t_j), \tag{31}$$

де матриця $P_0 \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$ є сталою і $W(t_j) \in G = C_{\mathbf{S}^1}(\mathcal{U}(\mathcal{H}^{(N)}))$ задовольняє наступну умову, що випливає з (30):

$$\nabla H_j(P) = W^+(t_j)dW_j(t_j)/dt_j. \tag{32}$$

Вирази (32) є важливими для так званих [19], [20], [21] квантово-голономних обчислювальних алгоритмів. 1-форма зв'язності на головному штіфелевому розшаруванні петель (27) у фіксованій точці $(F_0, F_0^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ набуває вигляду:

$$\omega(F_0, F_0^+) = -F_0 dF_0^+ \in \mathcal{J}(m). \tag{33}$$

Нагадаємо, що $G = C_{\mathbf{S}^1}(\mathcal{U}(\mathcal{H}))$ діє природним чином на штіфелів многовид петель $St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ як $W_0(F_0, F_0^+) = (F_0W, W^+F_0^+)$, де $W \in G$ і

$(F, F_0^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$. При цій дії елемент $P_0 := F_0^+ F_0 \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$ перетворюється в елемент $W_0 P_0 = W^+ F_0^+ F_0 W = W^+ P_0 W \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$, $W \in G$, що співпадає з перетвореннями (4) та (31). З іншого боку, 1-форма зв'язності (32) перетворюється, відповідно, у

$$\omega(W(F_0, F_0^+)) = \omega(F_0, F_0^+) + < F_0 | dW W^+ | F_0 > \tag{34}$$

для будь-якої пари $(F_0, F_0^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$ та $W \in G$. Як результат виразів (34) та (32), отримуємо, що для $P_0 = F_0^+ F_0$ у точці $P = W^+ P_0 W \in C_{\mathbf{S}^1}(M)$

$$\omega(W(F_0, F_0^+)) = \omega(F_0, F_0^+) + \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} < F_0 | W \nabla H_j(P) W^+ | P_0 > dt_j.$$

З іншого боку, використовуючи (34), можна обчислити відповідну 2-форму кривини

$$\Omega(W(F_0, F_0^+)) := d\omega + \omega \wedge \omega =< F | W^+ dW \wedge (P - \mathbf{1}_{(N)}) W^+ dW | F >, \tag{35}$$

де покладено $F := F_0 W$, $W \in G$. Оскільки з (32) отримуємо, що на параметричному підмноговиді $C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)}) \subset C_{\mathbf{S}^1}(M)$, матрична диференціальна 1-форма

$$W^+(t) dW(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} W^+(t) \frac{\partial W(t)}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j \in \mathbf{Z}_+} \nabla H_j(P) dt_j,$$

то вираз (35) зводиться до наступної матричної 2-форми:

$$\Omega(F, F^+) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}_+} < F | \nabla H_j(P)(P - \mathbf{1}_{(N)}) \nabla H_k(P) | F > dt_j \wedge dt_k.$$

Візьмемо будь-яку петлю σ на параметричному підмноговиді $C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$, побудованому вище. Тоді можна обчислити відповідне відображення групи голономій [12] у наступній хронологічно-впорядкованій символічній формі:

$$\Gamma_\omega(\sigma) := \mathcal{P} \exp \left\{ \oint_\sigma \omega \right\} \in \mathrm{Hol}(\omega; \mathrm{G(m)}) \tag{36}$$

як результат паралельного перенесення точки $(F_0, F_0^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, такої, що $P_0 = F_0^+ F_0 \in C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$, вздовж цієї петлі. Найпростіший випадок є тоді, коли петля $\sigma \subset C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$ залежить 2π-періодично лише від двох параметрів як $x, t \in \mathbf{R}$. Тоді відображення групи голономій (36) зводиться до наступного символічного виразу:

$$\Gamma_\omega(\sigma) := \mathcal{P}\exp\left\{\oint\limits_\sigma \omega\right\} = \mathcal{P}\exp\left\{\int\limits_{D(\sigma)} \Omega(F, F^+)\right\} =$$

$$= \mathcal{P}\exp\left\{\int\limits_{D(\sigma)} < F|\nabla H_0(P)(P - \mathbf{1}_{(N)})\nabla H_1(P)|F > dx \wedge dt\right\},$$

де $D(\sigma)-$ довільний кусково-гладкий двовимірний диск на параметричному підмноговиді $C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$, такий, що його границя $\partial D(\sigma) = \sigma$. Таким чином, в рамках голономно-квантового обчислювального середовища $G(m) \times St_{\mathbf{S}^1}(M^*) \xrightarrow{\tilde{\pi}} C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$ побудовано вище в натуральний спосіб два важливі об'єкти: першим є кодування інформації у „вакуумний" простір $ImP_0 \subset \mathcal{H}^{(N)}$, що характеризується парою матриць $(F, F^+) \in St_{\mathbf{S}^1}(M^*)$, і другим є обробка, або обчислення інформації як відображення

$$\Gamma_\omega(\sigma) : f \to f \circ \Gamma_\omega(\sigma)$$

для будь-якого інформаційного вектора $f \in ImP_0$ та відповідної петлі $\sigma \subset C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$. Ці дві операції в рамках квантово-голономного середовища $G(m) \times St_{\mathbf{S}^1}(M^*) \xrightarrow{\tilde{\pi}} C_{\mathbf{S}^1}(M_{(t)})$ повинні бути ефективно реалізовані, використовуючи стандартні юнітонні „входи" [20] та їх адаптацію до проблемно-орієнтованих обчислень.

ПОДЯКИ

Один з авторів (А.Прикарпатський) сердечно вдячний професорові В.Мітковському за цікаві обговорення проблем цієї праці під час засідання Польського математичного товариства, що відбулося 7 травня 2002 року в Кракові. Автори особливо вдячні професорам Є.Кубарському, Р.Воляку та Т.Рибіцкєму, організаторам міжнародної конференції „Geometry and Topology of Manifolds" в м.Криниці (Польща), що відбулася 29.04–4.05.2002р., за запрошення А.Прикарпатського виступити з доповіддю на тему диференціально-геометричних та інформаційних аспектів сучасної теорії квантових обчислень.

[1] *Wells R. O.* Differential analysis on complex manifolds // Prentice-Hall Inc., N.Y., (1973).

[2] *Rajeev S. G., Kalyana R. S., Siddhartha S.* Symplectic manifolds, coherent states and semiclassical approximation // Math.Phys.J., Vol. 35, No 5, P. 2259–2269, (1994).

[3] *Abraham R., Marsden J.* Foundation of mechanics // The Benjamin Commings Publ. Co., Masachusets, (1978).

[4] *Bloch A. M.* Lax type flows on Grassmann manifolds // Contemporary Math., Vol. 68, P. 39–50, (1987).

[5] *Bloch A. M.* A completely integrable Hamiltonian systems associated with line fitting in complex vector space // Bull. AMS, Vol. 12, P. 250–256, (1985).

[6] *Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов.– М.: Наука, 1996. – 527 с.

[7] *Magri F.* On the geometry of soliton equations // Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 41, P. 247–270, (1995).

[8] *Adams M. R., Harnard J., Hartubise J.* Dual momentum maps into loop algebras // Lett.Math.Phys., Vol.20, (1990).

[9] *Rejman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations // Inv. Math., Vol. 63, P. 423–432, (1981).

[10] *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects.– Netherlands: Kluwer, – 560 p., (1998).

[11] *Dittmann J., Rudolph G.* On a connection governing transport along (2+2) -density matrices // Geometry and Physics J., Vol. 10, P. 93–106, (1992).

[12] *Chruscinski D., Jamiolkowski A.* Faza geometryczna: teoria i zastosowania // Nicolai Copernicus Univer. Publisher, Torun Poland, (1996).

[13] *Uhlmann A.* Parallel transport and „quantum“ holonomy along density operators // Rep. Math. Physics, Vol. 24, P. 229–240, (1986).

[14] *Olmo del M. A., Rodrigues M. A., Winternitz P.* Integrable systems based on SU(p,q) homogeneous manifold // Report CRM–1834, Sept., Universite de Montreal QC, Canada, (1992).

[15] *Sato M.* Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifolds // RIMS Kokyuroku, vol. 439, P. 30–40, (1981).

[16] *Prykarpatsky A. K., Blackmore D. L., Hentosh O. Ye.* The finite dimensional Moser type reductions of modified Boussinesq and super Korteweg de Vries Hamiltonian systems via gradient holonomic algorithm and dual moment maps // New Frontiers in Physics, Proc. of Intern. Conf. at the Institute for Basic Res., Monteroduni, Italy, Hadronic Press, vol. 11, P. 271–292, (1996).

[17] *Hazewinkel M.* Riccati and soliton equations // Report AMPR-9103, CWI, Amsterdam, (1995).

[18] *Prykarpatsky Ya. A., Blackmore D. L., Samuliak R. V.* The integrability of Lie-invariant geometric objects generated by Ideals in Grassmann algebras // Journ. of Nonl. Math. Phys., Vol.5. No 54, (1998).

[19] *Fujii K.* More on Optical Holonomic Quantum Computer, arxiv: quant-ph/0005129,31 May (2000); From geometry to Quantum computation, quant-ph/0107128,26 May (2001).

[20] *Rieffel E. and Polak W.* An introduction to Quantum Computing for Non-Physicists, xxxlanl archive:quant-ph/9809016.

[21] *Zanardi P., Rasetti M.* Holonomic Quantum Computation, Phys. Lett, A 264; quant-ph/9904011, quant-ph/9907103, (1999).

[22] *Prykarpatsky A. K., Zagrodzinski J. A., Blackmore D. L.* Lax type flows on Grassmann manifolds and dual momentum mappings // Reports on Math. Phys., Vol. 40, P. 539–549, (1997).

QUANTUM HOLONOMIC COMPUTING VIA LAX TYPE FLOWS ON GRASSMANN MANIFOLDS AND DUAL MOMENTUM MAPPINGS

[1]*Anatoliy PRYKARPATSKY,* [2]*Anatoliy SAMOYLENKO,*
[3]*Myroslava KOPYCH,* [4]*Ufuk TANERI,* [5]*Denis BLACKMORE*

[1]Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine and
AGH University of Science and Technology, Krakow, Poland
[2]Institute of Mathematics of NASU
3 Tereshchenkivska str., Kyiv-4, 01601, Ukraine
[3] Lviv Polytechnic National University
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[4]Eastern Mediterranean University, Cyprus
[5]NJIT, Newark, NJ 07102, USA

A general approach to holonomic quantum computing via Lax-type flows on Grassmann manifolds based on the momentum mapping reduction and connection techniques is developed. It is shown that the associated holonomy groups can be effectively used in costruction of algorithms for quantum computations in diverse practical problems.