ВЕКТОРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ЗАМКНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ НА ТЕНЗОРНИХ ДОБУТКАХ

 Мар'ян ДМИТРИШИН

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *m_dmytryshyn@hotmail.com*

Редакція отримала статтю 26 травня 2011 р.

Для скінченних наборів замкнених операторів на тензорних добутках банахових просторів описано простори цілих векторів експоненціального типу. Побудовано спектральні розклади для операторів з дискретним спектором. Наведено застосування в теорії регулярних еліптичних операторів.

1 Вступ

Коло проблем, де використовується техніка векторів експоненціального типу, охоплює значну частину спектральної теорії операторів над банаховими просторами та її застосувань. У цьому зв'язку можна відзначити праці [1, 2], присвячені розв'язанню проблеми наближення елементів банахового простору різними класами гладких векторів замкненого оператора, у тому числі векторами експоненціального типу. Застосування до згаданої проблеми поняття квазінормованого абстрактного простору Бєсова наведено у праці [3].

Для замкнених операторів у банахових просторах побудовано функціональне числення на ультрагладких векторах в класі голоморфних

УДК: 517.98; MSC 2000: 41A65, 47A57, 47A58, 46E35

Ключові слова і фрази: вектори експоненціального типу, замкнені оператори, тензорні добутки

функцій [4]. Це числення розширено на алгебру символів, яка є проективною границею банахових скінченновимірних алгебр [5].

У даній статті побудовано спектральні розклади для операторів з дискретним спектором на тензорних добутках банахових просторів, а також показано застосування отриманих результатів на прикладі регулярних еліптичних операторів в обмежених областях. Для таких операторів підпростори векторів експоненціального типу складаються з цілих аналітичних функцій експоненціального типу, які задовольняють певні крайові умови.

2 Тензорні добутки просторів векторів експоненціального типу

Нехай $\left\{\mathfrak{X}_j, \|.\|_{\mathfrak{X}_j}\right\}_{j=1}^J$ — скінченний набір банахових просторів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $\otimes_j\mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{X}_J$ — їх тензорний добуток, на якому задаємо проективну норму

$$\|w\|_{\otimes_j\mathfrak{X}_j} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1}\cdot\ldots\cdot\|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J},$$

де inf береться за всіма зображеннями елемента $w \in \otimes_j\mathfrak{X}_j$ у вигляді суми $w = \sum_{n=1}^N \otimes_j x_n^j$ із скінченним N, $x_n^j \in \mathfrak{X}_j$ і $\otimes_j x_n^j \equiv x_n^1 \otimes \ldots \otimes x_n^J \in \otimes_j\mathfrak{X}_j$. Поповнення простору $\otimes_j\mathfrak{X}_j$ у проективній нормі позначимо через $\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j \equiv \mathfrak{X}_1\tilde{\otimes}\ldots\tilde{\otimes}\mathfrak{X}_J$.

На просторі $\mathfrak{X}_j$, $j = 1,\ldots,J$, розглядаємо необмежений замкнений лінійний оператор $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ із щільною областю визначення $\mathcal{D}(A_j)$.

Слідуючи [6], для будь-якого числа $\nu > 0$ визначимо банахів простір цілих векторів експоненціального типу оператора A_j

$$\mathcal{E}^\nu(A_j) \equiv \left\{x \in \mathcal{D}(A_j) :\ \|x\|_{\mathcal{E}^\nu(A_j)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\|A_j^k x\|_{\mathfrak{X}_j}}{\nu^k} < \infty\right\}$$

і побудуємо тензорний добуток $\otimes_j\mathcal{E}^\nu(A_j) \equiv \mathcal{E}^\nu(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}^\nu(A_J)$ із проективною нормою

$$\|w\|_{\otimes_j\mathcal{E}^\nu(A_j)} = \inf_{w=\sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^N \|x_n^1\|_{\mathcal{E}^\nu(A_1)}\cdot\ldots\cdot\|x_n^J\|_{\mathcal{E}^\nu(A_J)}.$$

Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{E}^\nu(A_j)$ в цій нормі позначаємо через $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^\nu(A_j)$.

Кожному оператору A_j над простором $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$ поставимо у відповідність оператор

$$\mathcal{A}_j \equiv I_1 \otimes \ldots \otimes A_j \otimes \ldots \otimes I_J,$$

де I_j — одиничний оператор в $\mathfrak{X}_j$. Оператор $\mathcal{A}_j$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) \equiv \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \otimes_i x_n^i \in \tilde{\otimes}_i \mathfrak{X}_i : \ x_n^j \in \mathcal{D}(A_j), \ x_n^i \in \mathfrak{X}_i \text{ при } i \neq j \Big\}$$

замкнений в $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$. Розглянемо композицію операторів $\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J \equiv A_1 \otimes \ldots \otimes A_J$ з областю визначення $\bigcap_{j=1}^J \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, що є щільною в $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$. Для будь-якого $\nu > 0$ визначений замкнений підпростір

$$\mathcal{E}^\nu(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \equiv \left\{ w \in \bigcap_{j=1}^J \mathcal{D}(\mathcal{A}_j) : \ \|w\|_{\mathcal{E}^\nu(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)} < \infty \right\}$$

з нормою

$$\|w\|_{\mathcal{E}^\nu(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)} = \sum_{k_1, \ldots, k_J = 1}^{\infty} \Big\| \Big[\Big(\frac{A_1}{\nu} \Big)^{k_1} \otimes \ldots \otimes \Big(\frac{A_J}{\nu} \Big)^{k_J} \Big] w \Big\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j}.$$

Лема 1. *Для будь-якого числа $\nu > 0$ справедливий топологічний ізоморфізм*

$$\mathcal{E}^\nu(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \simeq \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^\nu(A_j). \tag{1}$$

Доведення. Справді, для будь-якого $w \in \bigcap\limits_{j=1}^{J} \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ безпосередньою перевіркою отримуємо

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \ldots, k_J = 1}^{\infty} \Big\| \Big[\Big(\frac{A_1}{\nu} \Big)^{k_1} \otimes \ldots \otimes \Big(\frac{A_J}{\nu} \Big)^{k_J} \Big] w \Big\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j} = \\ &= \sum_{k_1, \ldots, k_J = 1}^{\infty} \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \Big[\sum_{n=1}^{N} \Big\| \Big(\frac{A_1}{\nu} \Big)^{k_1} x_n^1 \Big\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \Big\| \Big(\frac{A_J}{\nu} \Big)^{k_J} x_n^J \Big\|_{\mathfrak{X}_J} \Big] = \\ &= \inf_{w = \sum_n \otimes_j x_n^j} \sum_{n=1}^{N} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}^\nu(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}^\nu(A_J)} = \|w\|_{\otimes_j \mathcal{E}^\nu(A_j)}, \end{aligned}$$

що і доводить (1). □

Лема 2. *Для будь-яких* $0 \leq \nu \leq \gamma$ *і* $w \in \mathcal{E}^{\nu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)$ *справедливі вкладення*

$$\mathcal{E}^{\nu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \subset \mathcal{E}^{\gamma}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \subset \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j. \tag{2}$$

Доведення. Перше із вкладень (2) випливає з нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}^{\nu}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}^{\nu}(A_J)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}^{\gamma}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}^{\gamma}(A_J)}.$$

В силу нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathfrak{X}_J} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{\mathcal{E}^{\gamma}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_n^J\|_{\mathcal{E}^{\gamma}(A_J)} < \infty$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \otimes_j x_n^j$ абсолютно збіжний в просторі $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$. Оскільки простір $\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$ повний, то $\sum_{n=1}^{\infty} \otimes_j x_n^j = w \in \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$, звідки отримуємо друге вкладення в (2). □

На основі вкладень (2) визначимо локально опуклу індуктивну границю $\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \equiv \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}^{\nu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \operatorname{ind} \mathcal{E}^{\nu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)$.

Для кожного оператора A_j визначимо локально опуклу індуктивну границю $\mathcal{E}(A_j) \equiv \bigcup_{\nu > 0} \mathcal{E}^{\nu}(A_j) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \operatorname{ind} \mathcal{E}^{\nu}(A_j)$, яка є повним локально опуклим простором типу (DF), неперервно вкладеним в $\mathfrak{X}_j$ [4]. Побудуємо тензорний добуток $\otimes_j \mathcal{E}(A_j) \equiv \mathcal{E}(A_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}(A_J)$ з проективною локально опуклою топологією. Поповнення простору $\otimes_j \mathcal{E}(A_j)$ в цій топології позначимо $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}(A_j)$. З урахуванням властивостей просторів типу (DF) [7], справедливий топологічний ізоморфізм просторів $\tilde{\otimes}_j \mathcal{E}(A_j) \simeq \lim\limits_{\nu \to \infty} \operatorname{ind} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu}(A_j)$. Звідси і з рівності (1) маємо

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \simeq \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}(A_j) \simeq \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{ind} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^{\nu}(A_j). \tag{3}$$

3 Спектральний розклад

Перейдемо до побудови спектральних розкладів операторів з дискретним спектором над тензорними добутками банахових просторів.

Нехай спектр $\sigma(A_j)$ оператора A_j над простором $\mathfrak{X}_j$ складається із ізольованих власних значень $\{\lambda_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ скінченної алгебраїчної кратності, причому $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_{jk}=\infty$. Позначимо через $\mathcal{R}_k(A_j)$ кореневий підпростір оператора A_j, що відповідає власному значенню λ_{jk}.

Нехай $\{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)\}$ — послідовність просторів, що відповідає неспадній послідовності додатних чисел $\{\nu(n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, такій, що $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(n)=\infty$ і $\mathcal{E}(A_j)=\bigcup_{\nu(n)>0}\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)$. Розглянемо також послідовність просторів $\{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J)\}$ і визначимо простір рядів вигляду

$$l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j]\equiv\ \Big\{w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n\in\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j : w_n\in$$
$$\in\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J),\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J)}<\infty\Big\}$$

з нормою $\|w\|_{l_1}=\inf\limits_{w=\sum_n w_n}\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J)}$.

Теорема 1. *Нехай для кожного $j=1,\ldots,J$ підпростір $\mathcal{E}(A_j)$ є щільним в $\mathfrak{X}_j$. Тоді реалізуються ізометричні ізоморфізми*

$$\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\simeq l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j], \tag{4}$$

$$\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j\simeq\Big\{w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n:\ \ w_n\in\tilde{\otimes}_j\,\mathrm{span}\Big\{\mathcal{R}_k(A_j):\ |\lambda_{jk}|<\nu(n)\Big\},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J)}<\infty\Big\}. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки $\|w\|_{\otimes_j\mathfrak{X}_j}\le\|w\|_{l_1}$, $w\in l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j]$, то справедливе вкладення

$$l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1\circ\ldots\circ\mathcal{A}_J);\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j]\subset\tilde{\otimes}_j\mathfrak{X}_j. \tag{6}$$

Користуючись теоремою 6.4 [8], виберемо деяке зображення елемента w у вигляді абсолютно збіжного ряду $w=\sum_{k=1}^{\infty}\otimes_j x_k^j$ і покладемо

$$|w|_n=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^1\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_1)}\cdot\ldots\cdot\|x_k^J\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_J)}.$$

З означення норми простору $\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)$ випливає, що для всіх $x \in \mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)} = \|x\|_{\mathfrak{X}_j}$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} |w|_n = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_1)} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_J)} = \\ = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^1\|_{\mathfrak{X}_1} \cdot \ldots \cdot \|x_k^J\|_{\mathfrak{X}_J}.$$

Беручи inf по всіх зображеннях елемента w, отримуємо

$$\inf \lim_{n\to\infty} |w|_n = \|w\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \inf |w|_n = \lim\limits_{n\to\infty} \|w\|_{\otimes_j \mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)}$, то, в силу рівності (1), маємо

$$\|w\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j} = \lim_{n\to\infty} \|w\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)}, \ w \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J). \tag{7}$$

Для всіх $w \in \mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)$ і $\mu \geq \nu(n)$ виконується нерівність $\|w\|_{l_1} \leq \|w\|_{\mathcal{E}^{\mu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)}$. Звідси, використовуючи (7), отримуємо $\|w\|_{l_1} \leq \|w\|_{\otimes_j \mathfrak{X}_j}$ для всіх $w \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)$. Таким чином, справедливе вкладення $\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \subset l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J); \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j]$.

З рівності $\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) = \tilde{\otimes}_j \bigcup_{\nu(n)>0} \mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j)$ та умови щільності $\overline{\mathcal{E}(A_j)} = \mathfrak{X}_j$ випливає рівність $\overline{\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)} = \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j$. Тому

$$\tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j \subset l_1[\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J); \tilde{\otimes}_j \mathfrak{X}_j]. \tag{8}$$

Вкладення (8) і (6) дають (4).

Згідно з теоремою 2.2 [5], виконується рівність

$$\mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j) = \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_k(A_j) : \ |\lambda_{jk}| < \nu(n)\Big\}.$$

Звідси і з леми 1 маємо

$$\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \simeq \tilde{\otimes}_j \operatorname{span}\Big\{\mathcal{R}_k(\mathcal{A}_j) : \ |\lambda_{jk}| < \nu(n)\Big\}. \tag{9}$$

Ізометрія (5) безпосередньо випливає з (4) і (9). $\square$

4 Регулярно еліптичний оператор

Нехай Ω — обмежена область класу C^∞ в $\mathbb{R}^n$ з границею $\partial\Omega$ і $\{L_{\rho_j}(\Omega)\}_{j=1}^J$, $1 < \rho_j < \infty$ — скінченний набір просторів комплексних сумовних функцій $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ зі звичайними нормами

$$\|u(x)\|_{L_{\rho_j}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^{\rho_j} dx \Big)^{1/\rho_j}.$$

У просторі $L_{\rho_j}(\Omega)$ розглядаємо регулярно еліптичний набір операторів (див. означення 5.2.1/4 з [9])

$$(A_j u)(x) = \sum_{|\alpha_j| \le 2m} a_{\alpha_j}(x)\, D^{\alpha_j} u(x)\,, \quad a_{\alpha_j}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_{ji} u)(x) = \sum_{|\alpha_j| \le m_i} b_{i,\alpha_j}(x)\, D^{\alpha_j} u(x)\,, \quad b_{i,\alpha_j}(x) \in C^\infty(\partial\Omega),\ i = 1, \dots, m.$$

Оператор A_j з областю визначення

$$\mathcal{D}(A_j) = \Big\{ u \in W^{2m}_{\rho_j}(\Omega) : B_{ji} u_{|\partial\Omega} = 0,\ i = 1, \dots, m \Big\}$$

є замкненим оператором в $L_{\rho_j}(\Omega)$ [9, 5.4.3]. У припущенні, що $\rho(A_j) \neq \{\emptyset\}$, спектр $\sigma(A_j) = \{\lambda_{jk}\}_{k=1}^\infty$ оператора A_j складається із ізольованих власних значень λ_{jk} скінченної алгебраїчної кратності, причому $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{jk} = \infty$.

Теорема 2. *Справедливий топологічний ізоморфізм просторів*

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J) \simeq \liminf_{\nu\to\infty} \tilde{\otimes}_j \mathcal{E}^\nu(A_j, B_{ji}), \tag{10}$$

де $\mathcal{E}^\nu(A_j, B_{ji}) = \Big\{ u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \sum_{k=0}^\infty \frac{\|A_j^k u\|_{L_{\rho_j}(\Omega)}}{\nu^k} < \infty,\ B_{ji} A_j^k u_{|\partial\Omega} = 0,\ \ i = 1, \dots, m \Big\}$.

Доведення. Згідно з теоремою 2 [10], для кожного набору операторів A_j, B_{ji} виконується така рівність

$$\mathcal{E}(A_j) = \liminf_{\nu\to\infty} \mathcal{E}^\nu(A_j, B_{ji}). \tag{11}$$

З рівностей (11) і (3) безпосередньо отримуємо топологічний ізоморфізм (10). $\square$

Надалі припустимо, що $a_{\alpha_j}(x) \equiv a_{\alpha_j}$, тобто, коефіцієнти оператора A_j є сталими. Через $Exp\,(L_{\rho_j}(\Omega))$ позначимо простір цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на Ω належить простору $L_{\rho_j}(\Omega)$.

Теорема 3. *Нехай для кожного $j = 1, \ldots, J$ підпростір $\mathcal{E}(A_j)$ є щільним в $L_{\rho_j}(\Omega)$. Тоді*

$$\tilde{\otimes}_j L_{\rho_j}(\Omega) \simeq \Big\{ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n : \ w_n \in \tilde{\otimes}_j Exp_{\,A_j, B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\|_{\mathcal{E}^{\nu(n)}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J)} < \infty \Big\}, \tag{12}$$

де $Exp_{A_j, B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)) = \Big\{ u \in Exp\,(L_{\rho_j}(\Omega)) : B_{ji} A_j^k u_{|\partial\Omega} = 0,\ i = 1, \ldots, m,$ $k = 0, 1, \ldots \Big\}$.

Доведення. Згідно з теоремою 3 [10], $\mathcal{E}(A_j) = \bigcup_{\nu(n)>0} \mathcal{E}^{\nu(n)}(A_j) = Exp_{\,A_j, B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega))$ для кожного $j = 1, \ldots, J$. Звідси і з рівності (3) маємо

$$\tilde{\otimes}_j Exp_{\,A_j, B_{ji}}(L_{\rho_j}(\Omega)) \simeq \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{ind} \mathcal{E}^{\nu}(\mathcal{A}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{A}_J). \tag{13}$$

Рівність (12) випливає із рівності (4) з урахуванням (13). $\square$

[1] *Горбачук М.Л., Горбачук В.І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. ж. — 1995. — **47**, № 5. — С. 616–628.

[2] *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Операторный подход к вопросам аппроксимации // Алгебра и анализ. — 1997. — **9**, № 6. — С. 90–108.

[3] *Дмитришин М.І., Лопушанський О.В.* Абстрактні простори Бєсова, асоційовані із замкненими операторами в банахових просторах // Доповіді НАН України. — 2007. — № 12. — С. 16–22.

[4] *Лопушанський О.В.* Операторне числення на ультрагладких векторах // Укр. мат. ж. — 1992. — **44**, № 4. — С. 502–513.

[5] *Lopushansky O., Dmytryshyn M.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum. Chapter 12 in book *"General Topology in Banach Spaces".* Nova Sci. Publ., Huntington, New York. — 2001. — P. 137-145.

[6] *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. — 1983. — **27**, № 9. — С. 791–793.

[7] *Grotendieck A.* Produits tensorial topologeus et espases nucleaire // Mem. Amer. Math. Soc. — 1995. — **16**, № 2. — P. 1–140.

[8] *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 359 с.

[9] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — 664 с.

[10] *Lopushansky O.V., Dmytryshyn M.I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. — 1998. — **9**, № 1. — С. 70–77.

EXPONENTIAL TYPE VECTORS OF CLOSED OPERATORS ON TENSOR PRODUCTS

Maryan DMYTRYSHYN

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine
e-mail: *m_dmytryshyn@hotmail.com*

For the finite sets of closed operators on tensor products of Banach spaces, the spaces of entire exponential type vectors are described. The spectral decompositions are built for operators with discrete spectrum. An application to the theory of regular elliptic operators is shown.