ПРО ДЕЯКІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ БАГАТОВИМІРНОГО J-ДРОБУ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

©2011 р. Роман ДМИТРИШИН

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *dmytryshynr@hotmail.com*

Редакція отримала статтю 19 травня 2011 р.

У статті розглянуто багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними, який є узагальненням неперервного J-дробу. Досліджено збіжність багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними з комплексними частинними чисельниками і знаменниками та дійсними частинними чисельниками в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

1 Вступ

Функціональні неперервні дроби (g-дроби, J-дроби, C-дроби) відіграють важливу роль при дослідженні голоморфних і мероморфних функцій [1, 2, 3, 4]. Серед різноманітних багатовимірних узагальнень таких дробів найбільш пристосованими до наближення функцій багатьох змінних є гіллясті ланцюгові дроби [5, 6]. Найпростішими за структурою конструкціями, аналогічними структурі кратних степеневих рядів, є

УДК: 517.524; MSC 2000: 11A55, 40A15, 11J70

Ключові слова і фрази: багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними, збіжність, рівномірна збіжність

гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними (ГЛДзНЗ) [5, 7], а саме,

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})} = \sum_{i_1=1}^{i_0} \cfrac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z}) + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}(\mathbf{z})}{b_{i(2)}(\mathbf{z}) + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z}) + \ddots}}}, \qquad (1)$$

де $i(k) = i_1, i_2, \ldots, i_k$ — мультиіндекс, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$; $i_0 = N$, $N \in \mathbb{N}$; $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ — комплексні функції, визначені на множині $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$; $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Одним із найважливіших питань в аналітичній теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень є питання збіжності дробів.

Нехай

$$f_n(\mathbf{z}) = \overset{n}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}$$

— n-й підхідний дріб ГЛДзНЗ (1), $n \ge 1$.

ГЛДзНЗ (1), елементи якого визначені на множині $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$, називається збіжним (рівномірно збіжним) в $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$, якщо послідовність його n-х підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}$ збігається (рівномірно збігається) в $\mathcal{P}$. При цьому область $\mathcal{P}$ називається областю збіжності (областю рівномірної збіжності) ГЛДзНЗ (1).

У даній роботі досліджено збіжність (рівномірну збіжність) багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \textstyle\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)}+z_{i_k}} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{i_0} \cfrac{-a_{i(1)}^2}{b_{i(1)} + z_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{-a_{i(2)}^2}{b_{i(2)} + z_{i_2} + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k} + \ddots}}}, \qquad (2)$$

де $i_0 = N$, $N \in \mathbb{N}$, $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$ — комплексні сталі, причому всі $a_{i(k)} \ne 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, в деяких областях простору $\mathbb{C}^N$.

2 Допоміжні твердження

Із теореми 2 [8] випливає справедливість такого твердження.

Теорема 1. *Нехай існують додатні сталі* α, $\alpha < 1$, *і* β, $\beta < \dfrac{\pi}{2(1+\alpha)}$, *такі, що для всіх можливих мультиіндексів елементи ГЛДзНЗ*

$$\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}}{1} = \sum_{i_1=1}^{i_0} \cfrac{c_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{c_{i(2)}}{1 + \ddots + \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{c_{i(k)}}{1 + \ddots}}}, \tag{3}$$

де $i_0 = N,\ N \in \mathbb{N}$ *задовольняють умови*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}| - \mathrm{Re}(c_{i(k)} e^{-i(\beta_{i(k-1)} + \beta_{i(k)})})}{\cos\beta_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\alpha) p_{i(k-1)}, \quad 1 \le i_p \le i_{p-1},$$

$1 \le p \le k,\ k \ge 1,$
де $\beta_{i(k)}$, $p_{i(k)}$ — *деякі дійсні числа такі, що*

$$|\beta_{i_0}| \le \beta, \quad |\beta_{i(k)}| \le \beta, \quad 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ k \ge 1;$$

$$p_{i_0} \ge 0, \quad 0 \le p_{i(k)} \le (1-\alpha)\cos\beta_{i(k)}, \quad 1 \le i_p \le i_{p-1},\ 1 \le p \le k,\ k \ge 1.$$

Тоді

(i) значення всіх підхідних дробів ГЛДзНЗ (3) *скінченні й розміщені у півплощині*

$$\mathcal{V} = \left\{\varpi :\ \mathrm{Re}(\varpi e^{-i\beta_{i_0}}) \ge 1 - p_{i_0}\right\};$$

(ii) існують скінченні границі послідовностей парних $\{f_{2n}\}$ *і непарних* $\{f_{2n-1}\}$ *підхідних дробів ГЛДзНЗ* (3)*;*

(iii) ГЛДзНЗ (3) *збігається, якщо виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)} |c_{i(k)}|\right)^{-1} = \infty.$$

В монографії [5, теорема 2.13, с. 62] доведено справедливість наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай*

$$\mathcal{F} = \big\{ f_n(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{D},\ \mathcal{D} \in \mathbb{C}^N,\ n \geq 1 \big\}$$

— послідовність голоморфних функцій в області $\mathcal{D}$, рівномірно обмежених всередині цієї області.

Якщо послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ збігається у кожній точці множини $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, яка є $2N$-вимірним околом, N-вимірним дійсним околом або N-вимірним комплексним околом точки $z_0 \in \mathcal{D}$, то $\{f_n(\mathbf{z})\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині множини $\mathcal{D}$ до голоморфної функції в $\mathcal{D}$.

3 Основні результати

Нехай

$$g_n(\mathbf{z}) = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(k)} + z_{i_k}}$$

— n-й підхідний дріб багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (2), $n \geq 1$.

Теорема 3. *Нехай для ГЛДзНЗ* (2) *виконуються такі умови:*

(а) $b_{i(k)} = id_{i(k)}$, $d_{i(k)} \geq 0$, $1 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$, $i_0 = N$;

(б) $a_{i(k)}$ *— ненульові комплексні сталі, що задовольняють нерівності*

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{(\operatorname{Im} a_{i(k)})^2}{l_{i_k}(1 - g_{i(k)})} \leq (1-\delta) l_{i_{k-1}} g_{i(k-1)},\ 1 \leq i_p \leq i_{p-1},\ 1 \leq p \leq k,\ k \geq 1, \quad (4)$$

де $0 < \delta < 1$, $l_{i_0} = 1$, l_{i_k}, $1 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $1 \leq p \leq k$, $k \geq 1$ *— деякі додатні числа, а* $\{g_{i(k)}\}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$g_{i_0} \geq 0, \quad 0 \leq g_{i(k)} \leq 1 - \delta, \quad 1 \leq i_p \leq i_{p-1},\ 1 \leq p \leq k,\ k \geq 1. \qquad (5)$$

Тоді

(i) послідовності парних $\{g_{2n}(\mathbf{z})\}$ *і непарних* $\{g_{2n-1}(\mathbf{z})\}$ *підхідних дробів ГЛДзНЗ* (2) *збігаються до голоморфних функцій в області*

$$\mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta) = \\ = \Bigg\{\mathbf{z}: \; |d - iz_n| > \frac{l_n}{\cos\big(\arg(d - iz_n)\big)}, \\ |\arg(d - iz_n)| < \frac{\pi}{2(1+\delta)}, \; 1 \le n \le N\Bigg\}, \quad (6)$$

де $d = \inf\limits_{i(k)} d_{i(k)}$, *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$;

(ii) ГЛДзНЗ (2) *збігається до функції, голоморфної в* $\mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$, *якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max_{i(k)} \frac{|a_{i(k)}|^2}{l_{i_{k-1}} l_{i_k}} \right)^{-1} = \infty.$$

Доведення. Еквівалентними перетвореннями багатовимірний J-дріб з нерівнозначними змінними (2) зведемо до вигляду

$$i \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{1}, \quad (7)$$

де

$$c_{i(1)}(\mathbf{z}) = \frac{a_{i(1)}^2}{d_{i(1)} - iz_{i_1}}, \quad 1 \le i_1 \le N,$$

$$c_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{a_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})}, \quad 1 \le i_p \le i_{p-1}, 1 \le p \le k, k \ge 2.$$

Покладемо $r_{i_0} = d_{i_0} = 1$, $\alpha_{i_0} = z_{i_0} = 0$, $p_{i_0} = g_{i_0} \ge 0$ і

$$\frac{1}{d_{i(k)} - iz_{i_k}} = r_{i(k)} e^{i\alpha_{i(k)}}, \quad p_{i(k)} = g_{i(k)} \cos \alpha_{i(k)}, \quad 1 \le i_p \le i_{p-1},$$

$1 \le p \le k, \; k \ge 1.$

Тоді для будь-якого мультиіндексу $i(k)$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, із умов (4) отримуємо

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{\left|\dfrac{a_{i(k)}^2}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})}\right| - \operatorname{Re} \dfrac{a_{i(k)}^2 e^{-i(\alpha_{i(k-1)}+\alpha_{i(k)})}}{(d_{i(k-1)} - iz_{i_{k-1}})(d_{i(k)} - iz_{i_k})}}{r_{i(k)} l_{i_k} (1 - g_{i(k)})} \le$$
$$\le 2(1-\delta) r_{i(k-1)} l_{i_{k-1}} g_{i(k-1)}$$

або

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})| - \operatorname{Re}(c_{i(k)}(\mathbf{z}) e^{-i(\alpha_{i(k-1)}+\alpha_{i(k)})})}{\dfrac{r_{i(k)} l_{i_k}}{\cos \alpha_{i(k)}} (\cos \alpha_{i(k)} - p_{i(k)})} \le 2(1-\delta) \frac{r_{i(k-1)} l_{i_{k-1}}}{\cos \alpha_{i(k-1)}} p_{i(k-1)}. \quad (8)$$

На підставі умов (5) маємо

$$0 \le p_{i(k)} \le (1-\delta) \cos \alpha_{i(k)}, \quad (9)$$

де $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$. Тому для кожного $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$ і для будь-якого мультиндексу $i(k)$, $1 \le i_p \le i_{p-1}$, $1 \le p \le k$, $k \ge 1$, отримуємо

$$r_{i(k)} l_{i_k} = \frac{l_{i_k}}{|d_{i(k)} - iz_{i_k}|} \le \frac{l_{i_k}}{|d - iz_{i_k}|} < \cos\big(\arg(d - iz_{i_k})\big) \le \cos \alpha_{i(k)}. \quad (10)$$

Використовуючи співвідношення (9) і (10), нерівність (8) запишемо у вигляді

$$\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})| - \operatorname{Re}(c_{i(k)}(\mathbf{z}) e^{-i(\alpha_{i(k-1)}+\alpha_{i(k)})})}{\cos \alpha_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\delta) p_{i(k-1)}.$$

Отже, компоненти ГЛДзНЗ (2) задовольняють умови теореми 1 тоді і лише тоді, коли $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$.

Із твердження (ii) теореми 1 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів ГЛДзНЗ (2) збігаються до скінченних значень для всіх $\mathbf{z} \in \mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$ і, крім того, із твердження (i) цієї теореми заключаємо, що значення всіх ГЛДзНЗ

$$Q_{i(1)}^{(n)}(\mathbf{z}) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{1}, \quad 1 \le i_1 \le N, \quad n \ge 2,$$

розміщені у відповідних півплощинах

$$\mathcal{V}_{i(1)}(\alpha_{i(1)}, p_{i(1)}) = \{w : \ \mathrm{Re}(we^{-i\alpha_{i(1)}}) \geq 1 - p_{i(1)}\}, \quad 1 \leq i_1 \leq N.$$

Із нерівностей (9) випливає, що в області $\mathcal{P}(l_1, l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$ всі

$$Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z}) \neq 0.$$

Очевидно, що

$$g_n(\mathbf{z}) = i \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})}, \quad n \geq 1,$$

— голоморфні функції в області (6). Нехай $C = \max_{1 \leq i_1 \leq N} \frac{|a^2_{i(1)}|}{l_{i_1}}$.

Оскільки

$$|\alpha_{i(1)}| \leq |\arg(d - iz_{i_1})| < \frac{\pi}{2(1+\delta)}, \quad 1 \leq i_1 \leq N,$$

то з умов (9) і (10) маємо

$$|g_n(\mathbf{z})| = \left| \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{Q^{(n)}_{i(1)}(\mathbf{z})} \right| \leq \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a^2_{i(1)}|}{(1 - p_{i(k)})|d_{i(1)} - iz_{i_1}|} \leq \frac{CN}{\delta} = M,$$

тобто послідовність $\{g_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно обмежена всередині області $\mathcal{P}(l_1,\ l_2, \ldots, l_N, d, \delta)$. Із теореми 2 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів ГЛДзНЗ (2) рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області (6). Твердження (ii) отримуємо із твердження (iii) теорем 1 і 2. □

Наступна теорема стосується області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними з дійсними частинними чисельниками.

Теорема 4. *Нехай ГЛДзНЗ* (2) *такий, що*

$$b_{i(k)} = id_{i(k)}, \quad d_{i(k)} \geq 0, \quad 1 \leq i_p \leq i_{p-1},\ 1 \leq p \leq k,\ k \geq 1,\ i_0 = N,$$

а всі $a_{i(k)}$ *— додатні дійсні сталі.*

Тоді

(i) послідовності парних $\{g_{2n}(\mathbf{z})\}$ *і непарних* $\{g_{2n-1}(\mathbf{z})\}$ *підхідних дробів ГЛДзНЗ* (2) *збігаються до голоморфних функцій в області*

$$\mathcal{R}(d,\delta)=\left\{\mathbf{z}:\ |\arg(d-iz_n)|<\frac{\pi}{2(1+\delta)},\ 1\le n\le N\right\},$$

де $d=\inf\limits_{i(k)} d_{i(k)}$, δ, $0<\delta<1$, *— деяка стала, причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $\mathcal{R}(d,\delta)$;

(ii) ГЛДзНЗ (2) *збігається до функції, голоморфної в* $\mathcal{R}(d,\delta)$, *якщо існує дійсна стала* $M>0$, *така, що* $|d-iz_n|\ge M$, $1\le n\le N$, *і, крім того,*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\max_{i(k)} a_{i(k)}^2\right)^{-1}=\infty.$$

Доведення. Якщо всі $a_{i(k)}>0$, то умови (4) справджуються при кожному $l_n>0$, $1\le n\le N$.

Нехай $\mathcal{K}$ — довільна компактна підмножина області $\mathcal{R}(d,\delta)$. Тоді вірні такі включення:

$$\mathcal{K}\subset\mathcal{P}(l_1,l_2,\ldots,l_N,d,\delta)\subset\mathcal{R}(d,\delta)$$

для деяких досить малих l_n, $1\le n\le N$. Тому теорема 4 є наслідком теореми 3. □

4 Висновки

Досліджено області збіжності для багатовимірних J-дробів, відмінні від відомих раніше. Залишається відкритим питання оцінки швидкості збіжності таких дробів в областях їх збіжності (рівномірної збіжності).

[1] *Beckermann B.* On the convergence of bounded J-fractions on the resolvent set of the corresponding second order difference operator // J. Approx. Theory. — 1999. — **99**, № 2. — P. 369–408.

[2] *Blythe R.A, Janke W., Johnston D.A., Kenna R.* Continued fractions and the partially asymmetric exclusion process // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — **42**, № 32. — P. 1751–8113.

[3] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

[4] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. — Vol. 1: Convergence Theory. — Amsterdam-Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. — 308 p.

[5] *Боднар Д.І.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[6] *Dmytryshyn R.I.* The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comp. and Appl. Math. — 2004. — **164**–**165**. — P. 265–284.

[7] *Dmytryshyn R.I.* The multidimensional g-fraction with nonequivalent variables corresponding to the formal multiple power series // Карпатські мат. публ. — 2009. — **1**, № 2. — С. 145–151.

[8] *Антонова Т.М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — **42**, № 4. — С. 7–12.

ABOUT SOME REGIONS OF CONVERGENCE OF A MULTIDIMENSIONAL *J*-FRACTION WITH INDEPENDENT VARIABLES

Roman DMYTRYSHYN

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine
e-mail: *dmytryshynr@hotmail.com*

In this paper we consider the multidimensional J-fraction with independent variables which is the generalization of the continued J-fraction. We investigate the convergence of the multidimensional J-fraction with the complex partial numerators and denominators and the real partial numerators in the some regions of the space is studied.