

## ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ МСЕ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

©2012 р. Аркадій КІНДИБАЛЮК, Микола ПРИТУЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *a.kindybaluk@mail.ru, mykola.prytula@gmail.com*

Редакція отримала статтю 6 квітня 2012 р.

Для сингулярно збуреної крайової задачі з рівнянням адвекції-дифузії запропоновано схему методу скінченних елементів з кусково-степеневими базисними функціями. Розглянуто їхні властивості та знайдено оптимальне значення параметра стабілізації. Результати обчислювальних експериментів свідчать про ефективність застосування степеневих базисних функцій.

### 1 Вступ

У математичних моделях екології та метеорології зустрічаються рівняння адвекції-дифузії, що описують міграцію забруднення чи еволюцію температурного поля [1, 2, 3].

Конструювання ефективних алгоритмів побудови чисельних розв'язків сингулярно збуреної крайової задачі з рівнянням адвекції-дифузії є актуальною проблемою [4, 5].

УДК: 517.925: 519.6; MSC 2010: 65N12, 65N30

*Ключові слова і фрази:* метод скінченних елементів, сингулярно збурена задача, степеневі базисні функції, рівняння адвекції-дифузії

На сьогодні одним з найпоширеніших методів числового розв'язування крайових задач математичної фізики є метод скінченних елементів (МСЕ) [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Його основи ґрунтуються на варіаційному формулюванні крайової задачі та дискретизації Рітца-Гальоркіна з використанням базисних функцій з локальними носіями, які приводять до розрідженої системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для відшукування значень розв'язку у вузлах сітки [8, 9].

Серед поширених методів для розв'язування сингулярно збурених задач адвекції-дифузії зазначимо стабілізовані [10] та адаптивні схеми [2, 6, 11, 12, 13], а також схеми з кусково-експоненціальними базисними функціями [4, 14, 15, 16, 17, 18].

У роботі запропоновано альтернативну обчислювальну схему на підставі кусково-степеневих базисних функцій і проведено її аналіз.

Знайдено оптимальне значення параметра стабілізації для кусково-степеневих базисних функцій, яке залежить від структури сітки та даних задачі.

## 2 Формулювання задачі

Розглянемо крайову задачу, яка описує стаціонарний процес адвекції-дифузії [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти функцію } u=u(x) \text{ таку, що:} \\ Au := -\frac{d^2u}{dx^2} + Pe\frac{du}{dx} = f \text{ в } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

де число  $Pe$  відоме як критерій подібності Пекле, функція  $f = f(x)$  характеризує інтенсивність внутрішніх розподілених джерел забруднення чи тепла.

Варіаційне формулювання задачі (1) має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано простір допустимих функцій} \\ V := H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}, \\ \text{білінійну форму } c(u, v) := \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + Pe \frac{du}{dx} v \right) dx, \\ \text{лінійний функціонал } \langle l, v \rangle := \int_0^1 f v dx \\ \text{знайти } u \in V \text{ такий, що,} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \forall v \in V \end{array} \right. \quad (2)$$

Задача (2) є коректно сформульована [5]. Як наслідок, білінійна форма породжує енергетичну норму  $\|v\|_V = \sqrt{c(u, v)}$ .

Оператор  $A$  задачі (1) не є симетричний, тому побудова її числового розв'язку є обчислювально складною [5].

Щоб мати уявлення про особливість розв'язку задачі 1, для часткового випадку  $f \in R$ , інтегруванням рівняння задачі (1) наводимо її точний розв'язок [14]:

$$u(x) = \left( x - \frac{e^{Pex} - 1}{e^{Pe} - 1} \right) \frac{f}{Pe}.$$

Зазначимо, що для великих значень числа Пекле похідні такого розв'язку в околі точки  $x = 1$  можуть набувати дуже великих значень [14]:

$$u'(x) = \left( 1 - Pe \frac{e^{Pex}}{e^{Pe} - 1} \right) \frac{f}{Pe} \approx O(f), u''(x) = -Pe \frac{e^{Pex}}{e^{Pe} - 1} f \approx O(fPe).$$

Саме цим відображається той факт, що в околі точки  $x = 1$  експоненціальна складова породжує так званий примежовий шар [5, 14, 20].

Ця особливість структури розв'язку задачі (1) у випадку великих чисел Пекле робить непридатними до застосування класичні схеми методу скінченних елементів або методу скінченних різниць [14, 20].

### 3 Кусково степеневі базисні функції

Зафіксуємо натуральне число  $(N + 1)$  та розіб'ємо відрізок  $[0, 1]$  на скінченні елементи  $K_{i+\frac{1}{2}} := (x_i, x_{i+1})$  довжини  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Дробовим індексом позначаємо номер скінченого елемента і певні його характеристики. Наприклад:  $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$  — центр ваги скінченого елемента  $K_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$  — діаметр скінченого елемента,  $q_{i+\frac{1}{2}} = \{q(x)\}_{x=x_{i+\frac{1}{2}}}$  — значення функції  $q(x)$  у точці  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ .

На кожному зі скінченних елементів виберемо апроксимацію варіаційної задачі (2) у вигляді лінійної комбінації

$$u(x) \approx u_{i+\frac{1}{2}}(\alpha; x) = q_i \varphi_i(\alpha; x) + q_{i+1} \varphi_{i+1}(\alpha; x), \forall x \in \bar{K}_{i+\frac{1}{2}}, i = 0, \dots, N \quad (3)$$

степеневих функцій, які в локальних координатах скінченого елемента  $K_{i+\frac{1}{2}}$  мають вигляд:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha, \xi_i) = 1 - \xi_i^\alpha, \\ \varphi(\alpha, \xi_{i+1}) = \xi_i^\alpha, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\xi_i = \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$ ,  $\forall x \in \bar{K}_{i+\frac{1}{2}} := [x_i, x_{i+1}]$ ,  $q_i$  — значення функції  $u = u(x)$  у вузлі  $x = x_i$ , а стала  $\alpha$  відіграє роль параметра стабілізації.

Головні властивості апроксимації, що розглядаємо, визначаються безпосередніми обчисленнями як і у випадку експоненціальних апроксимацій [14].

Степеневі базисні функції є інтерполяційні та лінійно незалежні:

$$\begin{cases} \varphi_k(\alpha; x_m) = \delta_{km}, k, m = \overline{i, i+1}, \\ \varphi_i(\alpha; x) + \varphi_{i+1}(\alpha; x) \equiv 1, \forall x \in \bar{K}_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Для величин, які характеризують середнє значення апроксимації  $u_{i+\frac{1}{2}}(\alpha; x)$  та швидкості її зміни на скінченному елементі  $K_{i+\frac{1}{2}}$ , введемо позначення

$$\begin{cases} q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (q_{i+1} + q_i), \\ \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{q_{i+1} - q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

тоді апроксимації (3) можна надати вигляду

$$\begin{aligned} u_{1+\frac{1}{2}} &= q_i \varphi_i(\alpha; x) + q_{i+1} \varphi_{i+1}(\alpha; x) = \\ &= \left( q - \frac{1}{2} h \dot{q} \right)_{i+\frac{1}{2}} \varphi_i(\alpha; x) + \left( q + \frac{1}{2} h \dot{q} \right)_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{i+1}(\alpha; x) = \\ &= q_{i+\frac{1}{2}} + \left( \varphi_{i+1}(\alpha; x) - \frac{1}{2} \right) \{ h \dot{q} \}_{i+\frac{1}{2}}, \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{cases} u'_{i+\frac{1}{2}} = \alpha \xi_i^{\alpha-1} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}}, \\ u''_{i+\frac{1}{2}} = \alpha(\alpha-1) \frac{1}{h} \xi_i^{\alpha-2} \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5)$$

Зазначимо, що на кожному скінченному елементі степенева апроксимація (3) має два вузли інтерполявання, що робить її в цьому аспекті подібною до структури кусково-лінійної апроксимації на триангуляції  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^N$ .

Можна вважати лінійну апроксимацію як частковий випадок степеневі апроксимації:

$$\begin{cases} \varphi_i(\alpha; x)|_{\alpha=1} = 1 - \xi_i(x), \varphi_{i+1}(\alpha; x)|_{\alpha=1} = \xi_i(x) \\ u_{i+\frac{1}{2}}(\alpha; x)|_{\alpha=1} = q_i(1 - \xi_i) + q_{i+1}\xi_i(x), \\ u'_{i+\frac{1}{2}}(x)|_{\alpha=1} = \dot{q}_{i+\frac{1}{2}}, \\ u''_{i+\frac{1}{2}}(x)|_{\alpha=1} = 0, \forall x \in \overline{K}_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Тобто довільну неперервну кусково-лінійну функцію, визначену на триангуляції  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^N$ , можна відтворити кусково-степеневою функцією шляхом безпосередньої підстановки  $\alpha = 1$  у (4) та (5).

Враховавши головні крайові умови задачі (1), отримаємо, що  $q_0 = 0$ ,  $q_{N+1} = 0$ , і запишемо кусково-визначену апроксимацію  $u_h(\alpha; x)$  у такий спосіб

$$u_h(\alpha; x) = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i(\alpha; x), \forall x \in [0, 1], \quad (6)$$

де апроксимацію МСЕ подано як лінійну комбінацію кусково-визначених степеневих базисних функцій

$$\varphi_m(\alpha; x) := \begin{cases} 0, & \forall x \in [0, x_{m-1}] \cup (x_{m+1}, 1]; \\ \xi_{m-1}^\alpha, & \forall x \in (x_{m-1}, x_m]; \\ 1 - \xi_m^\alpha, & \forall x \in (x_m, x_{m+1}]. \end{cases} \quad m = \overline{1, N}$$

Вважаємо, що саме ця система функцій формує базис вибраного нами простору апроксимацій  $V_h \subset V$ , причому розмірність простору  $\dim V_h = N_h$ . Надалі зосередимось на побудові та аналізі наближених розв'язків варіаційної задачі (2), дискретизоване формулювання якої має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано триангуляцію } T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^{N_h} \text{ та} \\ \text{пов'язаний з нею простір степеневих апроксимацій } V_h \subset V, \\ \text{знайти розв'язок } u_h \in V_h \text{ рівняння} \\ c(u_h, v) = \langle l, v \rangle \forall v \in V_h. \end{array} \right.$$

#### 4 Обчислення на скінченному елементі

Для проведення обчислень на скінченних елементах нам будуть потрібні складові варіаційного рівняння вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+\frac{1}{2}}(u, v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + P e^{\frac{du}{dx}} v \right) dx, \\ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, v \rangle := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx. \end{array} \right. \quad (7)$$

Вибираючи послідовно в кожному з доданків (7) за допустимі функції  $v_{m=1}^2 = \{1 - \xi^\alpha, \xi^\alpha\}$  і приймаючи за  $u$  апроксимацію (3), після безпосередніх обчислень інтегралів від добутків поліноміальних функцій одержуємо, що

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'_h v'_m) dx \right\}_{m=1}^2 = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1} \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'_h v_m) dx \right\}_{m=1}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_m dx \right\}_{m=1}^2 = h_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Отже, складові (7), враховуючи (8-10), набули вигляду

$$\left\{ c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, v_m) \right\}_{m=1}^2 = \left[ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{Pe}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\left\{ \langle l_{i+\frac{1}{2}}, v_m \rangle \right\}_{m=1}^2 = h_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{\alpha+1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

У варіаційному рівнянні (2) прийемо  $v = u \in V$ , тоді співвідношення  $\|u\|_V^2 = \langle l, u \rangle$  виражає закон збереження маси чи теплової енергії [3]. Величина  $\|u\|_V^2$  характеризує масу речовини, що бере участь у процесах дифузії, а  $\langle l, u \rangle$  — кількість речовини, що накопичилась у наслідок діяльності внутрішніх джерел забруднення.

З огляду на важливість застосування енергетичної норми  $\|u\|_V^2$  та лінійного функціонала  $\langle l, u \rangle$  наводимо правило їхнього обчислення на скінченному елементі  $K_{i+\frac{1}{2}}$ :

$$\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2 \equiv c_{i+\frac{1}{2}}(u, u) = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} h\dot{q} + Peq\dot{q} \right\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} f_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha+1} (\alpha q_i + q_{i+1}), \quad (14)$$

$$\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V}^2 \equiv c_{i+\frac{1}{2}}(u, u) = \{h\dot{q} + Peq\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle = \{fhq\}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

де  $Pe_{i+\frac{1}{2}} := Pe h_{i+\frac{1}{2}}$  сітковий критерій Пекле [19].

Зазначимо, що індекс  $\alpha$  вказує на те, що значення енергетичної норми степеневі апроксимації та лінійного функціоналу обчислюємо за правилами (13) та (14), тобто значення параметра  $\alpha$  враховуємо при обчисленні енергетичної характеристики.

**Доведення.** Формули (13) та (14) виводимо безпосередніми обчисленнями шляхом підстановки (3) у (7). Справді, для  $\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2$  маємо:

$$\|u\|_{i+\frac{1}{2}, V, \alpha}^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((u')^2 + Peuu') dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u') dx + \frac{Pe}{2} (u^2(x_{i+1}) - u^2(x_i)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= h_{i+\frac{1}{2}} (q_i^2 - 2q_i q_{i+1} + q_{i+1}^2) \int_0^1 \xi^{2\alpha-2} d\xi + Peq\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} = \\
 &= h_{i+\frac{1}{2}} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} (q_i^2 - 2q_i q_{i+1} + q_{i+1}^2) + Peq\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} h\dot{q}^2 + Peq\dot{q} \right\}.
 \end{aligned}$$

При обчисленні інтегралу  $\int_0^1 \xi^{2\alpha-2} d\xi$  приходимо до вимоги на значення параметра стабілізації:  $\alpha \geq 1$ .

Для лінійного функціоналу  $\langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha$  отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \langle l_{i+\frac{1}{2}}, u \rangle_\alpha &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f (q_i \varphi_i + q_{i+1} \varphi_{i+1}) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f q_i \varphi_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f q_{i+1} \varphi_{i+1} = \\
 &= \frac{h_{i+\frac{1}{2}} f_{i+\frac{1}{2}}}{\alpha+1} (\alpha q_i + q_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Формули (15) та (16) є частковим випадком (13) та (14) відповідно при значенні параметра  $\alpha = 1$ .  $\square$

## 5 Система рівнянь МСЕ

Для коректно сформульованої варіаційної задачі (2) на триангуляції  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^{N_h}$  побудуємо простір апроксимацій  $V_h$ , базис  $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{N_h}$  якого становить кусково-визначені неперервні степеневі функції вигляду (4). Вважатимемо, що поділ  $T_h = \left\{ K_{i+\frac{1}{2}} \right\}_{i=0}^{N_h}$  рівномірний, тобто  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i = h = \overline{const}, i = \overline{0, N_h}$  та функція  $f$  задачі (1) є сталою на відрізку  $[0, 1]$ . Тоді система лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для знаходження коефіцієнтів апроксимації (6) із врахуванням (11) та (12) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} + \frac{Pe}{2} \right) q_{i-1} + \left( \frac{2\alpha^2}{h(2\alpha-1)} \right) q_i + \\
 & + \left( \frac{Pe}{2} - \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)} \right) q_{i+1} = hf, \quad i = \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{17}$$



або в іншій формі запису:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}\right)\left(\frac{q_{i+1}-2q_i+q_{i-1}}{h^2}\right)+Pe\left(\frac{q_{i+1}-q_{i-1}}{2h}\right)=f, i=\overline{1, N_h}. \quad (18)$$

Форма запису системи лінійних алгебричних рівнянь (18) методу скінченних елементів наочно відображає його відмінність від методу скінченних різниць, який безпосередньо замінює похідні вихідного диференціального рівняння крайової задачі (1) відповідними різницеви-ми співвідношеннями з точністю до порядку  $O(h^2)$ .

## 6 Оцінка параметра стабілізації

Щоб ефективно застосувати степеневі базисні функції до розв'язування крайової задачі (1), необхідно визначити оптимальне значення параметра стабілізації  $\alpha$ .

Для цього систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ (17) запишемо у явному вигляді відносно вузлового значення  $q_i$  апроксимації (3):

$$\left(\frac{2\alpha^2}{h(2\alpha-1)}\right)q_i=\left(\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)}+\frac{Pe}{2}\right)q_{i-1}+\left(\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)}-\frac{Pe}{2}\right)q_{i+1}+hf. \quad (19)$$

Для коректності схеми (19) достатньо вимагати, щоб коефіцієнти при  $q_{i-1}, q_{i+1}$  були невід'ємними і принаймні один коефіцієнт був строго додатній [1, 19], тобто

$$\begin{cases} \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)}+\frac{Pe}{2}\geq 0, \\ \frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)}-\frac{Pe}{2}\geq 0, \end{cases}$$

або

$$\frac{\alpha^2}{h(2\alpha-1)}-\frac{|Pe|}{2}\geq 0. \quad (20)$$

Розв'язком нерівності (20) є множина значень параметра стабілізації

$$\alpha\geq\frac{Peh}{2}+\sqrt{\frac{Peh}{2}\left(\frac{Peh}{2}-1\right)}.$$

Вивчимо питання про оптимальне значення параметра стабілізації. Введемо функцію

$$\mu(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}, \quad (21)$$

тоді систему лінійних алгебричних рівнянь (18) можна подати у вигляді

$$-\mu(\alpha) \left( \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} \right) + Pe \left( \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2h} \right) = f, i = \overline{1, N_h}. \quad (22)$$

Звідси легко бачити, що система (22) апроксимує розв'язок такої крайової задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\mu(\alpha) \frac{d^2 u}{dx^2} + Pe \frac{du}{dx} = f \text{ в } \Omega := (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array} \right.$$

Зауважимо, що з використанням експоненціальних базисних функцій МСЕ отримана СЛАР апроксимує не вихідне рівняння, а модифіковане рівняння (див. [14, с. 164]).

Провівши дослідження властивостей функції (21), знаходимо, що в точках  $\alpha_1 = 0$  та  $\alpha_2 = 1$  маємо точки локального максимуму та локального мінімуму відповідно. На проміжках  $(-\infty, 0)$  та  $(1, +\infty)$  функція зростає, а на проміжку  $(0, 1)$  функція  $\mu(\alpha)$  спадає. При значенні параметра  $\alpha = 1$  значення функції  $\mu(\alpha)$  дорівнює одиниці, а це означає, що за такого значення параметра стабілізації СЛАР (18) апроксимує вихідну крайову задачу (1). При збільшенні значення параметра  $\alpha$  збільшується похибка стосовно точного розв'язку та зростає за модулем коефіцієнт при найстаршій похідній. Отже, значення параметра стабілізації слід обрати мінімальним з множини значень параметра, які гарантують коректність схеми (19). Таким чином, оптимальним значенням параметра стабілізації при заданій тріангуляції та даних крайової задачі (1), врахувавши обмеження  $\alpha \geq 1$  є

$$a_h = \max \left\{ 1, \left( \frac{Peh}{2} + \sqrt{\frac{Peh}{2} \left( \frac{Peh}{2} - 1 \right)} \right) \right\}.$$

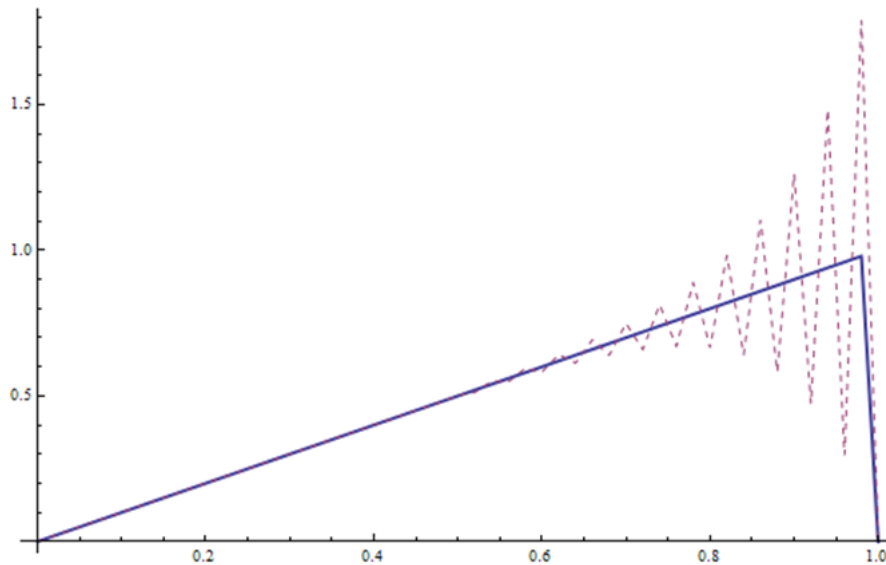


Рис. 1: Графіки апроксимацій МСЕ наближених розв'язків з  $Pe = 1000$  та  $N = 30$

Для нерівномірних сіток значення параметра стабілізації на кожному скінченному елементі врахувавши позначення сіткового критерію Пекле набуває вигляду:

$$a_{h,i+\frac{1}{2}} = \max \left\{ 1, \left\{ \frac{Pe}{2} + \sqrt{\frac{Pe}{2} \left( \frac{Pe}{2} - 1 \right)} \right\}_{i+\frac{1}{2}} \right\}.$$

Таким чином, степеневі базисні функції враховують не тільки особливості застосованої триангуляції, а й дані задачі.

## 7 Аналіз числових результатів

Наведемо результат обчислень за описаною вище схемою для крайової задачі (1) для значень числа Пекле  $Pe = 1000$ ,  $f = 1000$  на рівномірній сітці з кількістю вузлів  $N = 50$ . Параметри стабілізації за таких умов:  $\alpha = 19,4868$  для степеневих базисних функцій і  $a = 4,85165 \cdot 10^8$  для експоненціальних базисних функцій.

На рис. 1 зображено графіки наближених розв'язків задачі (1), обчислених з використанням класичних лінійних (пунктирна лінія) та

степеневих (суцільна лінія) апроксимацій МСЕ.

З наведеного рисунку випливає, що наближення, знайдене з використанням степеневих базисних функцій, не демонструє нефізичних осциляцій, що, відповідно, забезпечує високу точність наближення у вузлах сітки, навіть, якщо крок  $h$  достатньо великий.

Оскільки точний розв'язок задачі (1) є відомий, то обчислення оцінок швидкостей збіжності апроксимацій на сітці з кроком  $h$  здійснюватимемо за правилом:

$$p_h = \log_2 \frac{\|u - v_h\|}{\|u - v_{\frac{h}{2}}\|}$$

де через  $\|\cdot\|$  позначено норму у просторі Гільберта,  $u$  — точний розв'язок задачі (1),  $v_h$  — апроксимація МСЕ, побудована на сітці з кроком  $h$  з використанням кусково-лінійних  $u_h$  чи експоненціальних  $u_h^*$ , чи степеневих  $u_h^o$  апроксимацій. Результати обчислення норм похибок та швидкостей збіжності на послідовності рівномірно згущених сіток наведені у таблицях 1 та 2.

Табл. 1: Норми похибок в нормі простору  $L_2(\Omega)$

Крок $h$	$\ u - u_h\ $	$\ u - u_h^*\ $	$\ u - u_h^o\ $
1/10	2,49812	0,178475	0,178475
1/20	0,468522	0,123315	0,123315
1/40	0,158986	0,0831465	0,0831465
1/80	0,0760067	0,0531665	0,0531664
1/160	0,0333322	0,0301021	0,0300452
1/320	0,0120872	0,0133297	0,0123915
1/640	0,0035535	0,0043904	0,0035195

Табл. 2: Оцінки швидкості збіжності відповідно до типу базисних функцій в нормі простору  $L^2(\Omega)$

Порядок збіжності $p_h$	лінійні	експоненціальні	степеневі
$p_{1/10}$	2,41465	0,533374	0,533374
$p_{1/20}$	1,55922	0,568621	0,568621
$p_{1/40}$	1,0647	0,645138	0,645141
$p_{1/80}$	1,18921	0,820653	0,82338
$p_{1/160}$	1,46344	1,17522	1,27778
$p_{1/320}$	1,76617	1,6022	1,81589

Наведені результати засвідчують, що зі згущенням сітки порядки швидкостей збіжності степеневих апроксимацій постійно зростають, прямуючи до величин, що передбачені теоретичним аналізом похибок.

Вивчимо енергетичні характеристики наведених вище апроксимацій. Розглянемо закон збереження для рівняння (1):

$$\int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = \int_0^1 f u dx, \text{ або } \|u\|_V^2 = \langle l, u \rangle.$$

Оскільки точний розв'язок  $\tilde{u} = \tilde{u}(x)$  задачі (1) при значеннях  $Pe = 1000$ ,  $f = 1000$  є відомий, то маса речовини, що бере участь у процесах дифузії у такій системі становить  $M_D = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = 499$ , а маса речовини, що утворилась за рахунок внутрішніх джерел забруднення становить  $M_S = \int_0^1 f u dx = 499$ . Очевидно, що  $M_D = M_S$ .

Для обчислення енергетичних характеристик апроксимації введемо такі позначення:

$m_D = \|v_h\|_V^2$  — маса речовини, обчислена з розв'язку  $v_h$  за правилом обчислення енергетичної норми лінійної апроксимації, проте сам розв'язок  $v_h$  може бути знайдений з використанням лінійних, експоненціальних чи степеневих базисних функцій. Тобто, якщо вузлові значення розв'язку отримано з використанням степеневих базисних функцій, то енергетичну норму обчислюємо згідно правила обчислення енергетичної норми лінійної апроксимації.

$m_D^\alpha = \|v_h\|_{V,\alpha}^2$  — маса речовини, обчислена відповідно до типу апроксимації. Тобто, якщо вузлові значення розв'язку  $v_h$  отримано з використанням степеневих базисних функцій, то енергетичну норму обчислюємо згідно правила (13) обчислення енергетичної норми степеневі апроксимації, що відображено індексом  $\alpha$ .

Аналогічно введені позначення  $m_S = \langle l, v_h \rangle$  та  $m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$ , що характеризують масу речовини, яка утворилась за рахунок внутрішніх джерел забруднення. Зазначимо, що індекс  $D$  означає дифузійні процеси, а  $S$  — джерела забруднення. Результати обчислень на рівномірно згущених сітках наведено у таблицях 3–5.

Табл. 3: Значення енергетичної норми та лінійного функціоналу лінійної апроксимації

Крок $h$	$m_D = \ v_h\ _V^2$	$m_S = \langle l, v_h \rangle$
$h = 1/10$	19283,1	2239,57
$h = 1/20$	3422,93	692,724
$h = 1/40$	2040,95	477,768
$h = 1/80$	1729,48	488,302
$h = 1/160$	1273,11	494,285
$h = 1/320$	765,328	497,099
$h = 1/640$	391,658	498,316

Табл. 4: Значення енергетичної норми та лінійного функціоналу експоненціальної апроксимації

Крок $h$	$m_D = \ v_h\ _V^2$	$m_S = \langle l, v_h \rangle$	$m_D^\alpha = \ v_h\ _{V,\alpha}^2$	$m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$
$h = 1/10$	405,9	405	450	360,9
$h = 1/20$	452,2	451,25	475	428,45
$h = 1/40$	476,287	475,312	487,5	464,1
$h = 1/80$	488,562	487,578	493,746	482,394
$h = 1/160$	492,843	493,763	494,96	491,644
$h = 1/320$	455,52	496,805	456,562	496,132
$h = 1/640$	330,077	498,188	333,784	498,034

Табл. 5: Значення енергетичної норми та лінійного функціоналу степеневі апроксимації

Крок $h$	$m_D = \ v_h\ _V^2$	$m_S = \langle l, v_h \rangle$	$m_D^\alpha = \ v_h\ _{V,\alpha}^2$	$m_S^\alpha = \langle l, v_h \rangle_\alpha$
$h = 1/10$	405,9	405	450	360,896
$h = 1/10$	452,2	451,25	475	428,441
$h = 1/10$	476,287	475,313	487,5	464,081
$h = 1/10$	488,566	487,578	493,75	482,357
$h = 1/10$	494,763	493,77	496,875	491,591
$h = 1/10$	497,877	496,88	498,438	496,212
$h = 1/10$	381,603	498,299	381,868	498,239

Значення енергетичної норми для лінійної, експоненціальної та степеневі апроксимацій наведено у таблиці 6, а значення лінійного функціоналу для таких апроксимацій наведено у таблиці 7.

Табл. 6: Значення енергетичної норми лінійної, експоненціальної та степеневі апроксимацій

Крок $h$	лінійна ап.	експоненціальна ап.	степенева ап.
$h = 1/10$	19283,1	450	360,896
$h = 1/20$	3422,93	475	428,441
$h = 1/40$	2040,95	487,5	464,081
$h = 1/80$	1729,48	493,746	482,357
$h = 1/160$	1273,11	494,96	491,591
$h = 1/320$	765,328	456,562	496,212
$h = 1/640$	391,658	333,784	498,239

Табл. 7: Значення лінійного функціоналу лінійної, експоненціальної та степеневі апроксимацій

Крок $h$	лінійна ап.	експоненціальна ап.	степенева ап.
$h = 1/10$	2239,57	360,9	360,896
$h = 1/10$	692,724	428,45	428,441
$h = 1/10$	477,768	464,1	464,081
$h = 1/10$	488,302	482,394	482,357
$h = 1/10$	494,285	491,644	491,59
$h = 1/10$	497,099	496,132	496,212
$h = 1/10$	498,316	498,034	498,239

Наведені результати свідчать про те, що при рівномірному згущенні сітки енергетичні характеристики степеневі апроксимації прямують до величин, передбачених теоретичним аналізом швидше, ніж енергетичні характеристики лінійної та експоненціальної апроксимацій.

## 8 Висновки

Ефективність використання запропонованих кусково-степеневих базисних функцій у методі скінченних елементів обґрунтовано на прикладі розв'язку сингулярно збуреної крайової задачі з примежовим шаром для рівняння адвекції-дифузії.

Теоретичний аналіз та числові результати свідчать про доцільність використання кусково-степеневих апроксимацій для розв'язування таких задач.

Запас стійкості кусково-степеневих базисних функцій МСЕ є безпосереднім наслідком спеціальної побудови базисних функцій простору апроксимацій  $V_h$ , структура яких залежить не тільки від структури сітки, а й від даних задачі, що розглядається.

Визначено оптимальне значення параметру стабілізації, яке гарантує мінімальну похибку стосовно точного розв'язку та стійкість наближеного розв'язку крайової задачі.

Запропоновану схему МСЕ з кусково-степеневими апроксимаціями можна узагальнити на багатовимірний випадок крайових задач для еліптичних рівнянь, що дає змогу проводити обчислення на сітках складених з прямокутників чи паралелепіпедів.

Наведені результати похибок та енергетичних характеристик вказують на ефективність степеневих базисних функцій та апроксимацій.

- [1] *Копитко М.* Чисельна схема з нелінійною корекцією потоків для розв'язування задач конвекції і дифузії // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2000. — **2**. — С. 135–141.
- [2] *Шинкаренко Г., Козаревська Ю.* Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: адаптивний метод скінченних елементів. Ч. 1 // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2002. — **5**. — С. 153–165.
- [3] *Шинкаренко Г.А.* Основи екології. — Львів. — 2006.
- [4] *Мандзак Т.І., Савула Я.Г.* Математичне моделювання і числовий аналіз адвекції-дифузії у неоднорідних середовищах // НАН України. Центр матем. моделювання Ін-ту проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. — Львів:Сплайн, 2009. — 148 с.
- [5] *Савула Я.Г.* Чисельний аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів, 2004. — 221 с.
- [6] *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямлинець А.* Кусково-лінійні апроксимації адаптивного методу скінченних елементів



для одновимірних крайових задач // Вісник Львівського ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2006. — **11**. — С. 3–18.

- [7] *Шинкаренко Г.А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. — Київ: НМК ВО, 1991. — 88 с.
- [8] *Morton K.* Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems. — London: Chapman 'n' Hall, 1996. — 372 p.
- [9] *Zienkiewicz O., Taylor R.L.* The Finite Element Method Vol.1: The basis. — Butterworth-Heinemann, 2000. — 689 p.
- [10] *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for Flow Problems. — Chichester: Wiley and Sons, 2003. — 350 p.
- [11] *Bangers W., Rannacher R.* Adaptive Finite Element Method for Differential Equations. — Basel: Birkhauser, 2003. — 207 p.
- [12] *Melenk J.M.* hp-Finite Element Method for Singular Perturbations. — Berlin: Springer, 2002. — 283 p.
- [13] *Verfurth R.* A posteriori error estimator for convection-diffusion problem // Numer. Math. — 1998. — №80. — P. 641–663.
- [14] *Сінчук Ю., Шинкаренко Г.* Експоненціальні апроксимації МСЕ для сингулярно збурених задач конвекції-дифузії реакції // Вісник Львів. ун-ту, Сер. прикл. матем. та інформ. — 2007. — **12**. — С. 157–169.
- [15] *Andjerid S., Aiffa M., Flatherty J.E.* Computational methods for singularly perturbed systems // Singular Perturbations Concepts of Differential Equations (Cronin J., O'Malley R. E., eds.), AMS, Providence, 1998. — 34 p.
- [16] *De Groen P.P.N., Hemker P.W.* Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems // Numerical Analysis of Singular Perturbations Problems, Hemker P.W., J.J. II. Miller eds. New York: Academic Press. — 1979. — P. 217–249.

- [17] *Hemker P.W.* A numerical study of stiff two-point boundary value problems. — Amsterdam: Mathematical Center, 1977. — 178 p.
- [18] *Melenk J.M., Schwab C.* An hp finite element method for convection-diffusion problems. — Technical Report 97-05. Eidgenössische Technische Hochschule, 1997. — 47 p.
- [19] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физмат. лит. — 1989. — 432 с.
- [20] *Roos Hans-Görg, Stynes Martin, Tobiska Lutz.* Numerical methods for singularly perturbed differential equations Convection Diffusion and Flow problems. — Berlin: Springer, 1999. — 348 p.

**POWER BASIS FUNCTIONS USAGE IN FINITE ELEMENT  
METHOD FOR SOLVING ADVECTION-DIFFUSION  
SINGULAR PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEM**

*Arkadii KINDYBALIUK, Mykola PRYTULA*

Ivan Franko National University in L'viv  
1 Universytetska Str., L'viv 79000,

e-mail: *a.kindybaluk@mail.ru, mykola.prytula@gmail.com*

Finite element schema with piecewise power basis functions for singularly perturbed boundary value problem with advection-diffusion equation has been suggested. Properties of these functions have been discussed. Optimal value of stabilization parameter has been found. Results of numerical experiments proved advantages of power basis functions.