ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ЦИКЛІЧНИХ 2-ГРУП В ГРУПАХ НЕСКІНЧЕННИХ УНІТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

©*2012 р. Андрій ОЛІЙНИК*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 60, Київ 01601

e-mail: *olijnyk@mechmat.univ.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 10 травня 2012 р.

Розглядаються групи нескінченних унітрикутних матриць над кільцями з одиницею. Запропоновано загальну конструкцію вільних добутків циклічних 2-груп в групах вузьких нескінченних унітрикутних матриць над кільцями характеристики 2.

1 Вступ

Групи нескінченних унітрикутних матриць природно виникають в різних розділах математики. Зокрема, встановлено їх безпосередній зв'язок з групами автоморфізмів регулярних кореневих дерев як скінченної [1], так і нескінченної валентності [2]. При цьому в термінах таких матриць природно інтерпретується поняття скінченної становості для автоморфізмів кореневих дерев [3]. Однією з природних задач, які при цьому виникають, є знаходження явного вигляду підгруп груп нескінченних унітрикутних матриць, які були б ізоморфні наперед заданим групам скінченно станових автоморфізмів кореневих дерев. Зокрема, приклади вільних груп нескінченних унітрикутних матриць над полем з двох елементів побудовано в [4], а над кільцем цілих чисел — у [5].

УДК: 512.54; MSC 2010: 20E06, 20H25

Ключові слова і фрази: вільні добутки, унітрикутні матриці

В даній роботі розглядаються конструкції вільних добутків циклічних 2-груп нескінченними унітрикутними матрицями над асоціативними кільцями з одиницею характеристики два. Вводиться поняття вузької нескінченної унітрикутної матриці (аналогічне введеному в [5] поняттю смугастої матриці) і показується, як у напівгрупі таких матриць будувати вільні добутки циклічних 2-груп. Наводяться явні приклади вільних добутків скінченного числа груп порядку 2 та вільного добутку довільної циклічної 2-групи і групи порядку 2.

2 Попередні відомості

Нехай R — асоціативне (не обов'язково комутативне) кільце з одиницею. Нескінченною (верхньою) унітрикутною матрицею над кільцем R називається матриця $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in R$, $i, j \geq 1$, у якої $a_{ij} = 0$ при $i > j \geq 1$ і $a_{ii} = 1$ для довільного $i \geq 1$, тобто матриця вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $a_{ij} \in R$ $(i = 1, 2, \dots, j = i+1, i+2, \dots)$. Послідовність $a_{1,i}, a_{2,i+1}$, $a_{3,i+2}, \dots$ будемо називати i-тою верхньою діагоналлю матриці A, $i \geq 1$.

Для нескінченних матриць над R, в кожному стовпчику яких лише скінченне число елементів є ненульовими, коректно визначена дія множення. Тому дія множення є коректно визначеною для матриць вигляду (1). Множина всіх таких матриць утворює групу відносно множення, яку будемо називати групою нескінченних унітрикутних матриць над кільцем R та позначати символом $UT_\infty(R)$. Нескінченна одинична матриця буде нейтральним елементом цієї групи, а матрицю, обернену до матриці виду (1), можна обчислити, користуючись стандартною процедурою обчислення оберненої матриці.

Символом R^∞ позначимо правий R-модуль усіх послідовностей елементів з кільця R. Для довільної послідовності

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in R^\infty$$

її добуток на нескінченну унітрикутну матрицю визначається рівністю

$$\bar{x}A = (x_1, x_2 + x_1 a_{12}, \ldots, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i a_{in-1}, \ldots). \qquad (2)$$

Тим самим визначено праву дію групи $UT_\infty(R)$ ендоморфізмами R-модуля R^∞. Легко бачити, що так визначена дія буде точною. З означення дії відразу випливає, що її орбіти характеризуються таким чином.

Твердження 2.1. *Орбіта послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in R^\infty$ має вигляд*

$$\bar{x} + I,$$

де I — декартів добуток $I_1 \times I_2 \times I_3 \times \ldots$, в якому I_1 — нульовий ідеал, а I_k — правий ідеал кільця R, породжений елементами $x_1, \ldots, x_{k-1}$, $k \geq 2$.

Матрицю $A = (a_{ij}) \in UT_\infty(R)$ назвемо вузькою, якщо існує таке число $k \geq 0$, що $a_{ij} = 0$ для всіх i, j таких, що $i + k < j$, і $a_{i,i+k} \neq 0$ для деякого $i > 0$. Число k назвемо шириною матриці A.

Безпосередньо перевіряється, що має місце

Лема 2.1. *Нехай матриці $A, B \in UT_\infty(R)$ є вузькими ширини k, l відповідно. Тоді добуток AB є вузькою матрицею ширини, не більшої за $k + l$.*

Звідси випливає, що усі вузькі матриці утворюють піднапівгрупу в групі $UT_\infty(R)$. Зауважимо, що матриця, обернена до вузької, сама вузькою може не бути. Позначимо символом $BUT_\infty(R)$ підгрупу групи $UT_\infty(R)$, породжену множиною всіх вузьких матриць.

Для довільного натурального k символом R_k будемо позначати кільце квадратних матриць порядку k над R. Кожну матрицю з групи $UT_\infty(R_k)$ можна розглядати, як матрицю з $UT_\infty(R)$. Таким чином, для кожного $k \geq 1$ група $UT_\infty(R_k)$ є підгрупою $UT_\infty(R)$.

3 Вільні добутки циклічних 2-груп

Нехай далі характеристика кільця R рівна двом.

Для довільної квадратної матриці A над R позначимо символом $U(A)$ вузьку нескінченну унітрикутну матрицю виду

$$\begin{pmatrix} E & A & O & O & \dots \\ O & E & A & O & \dots \\ O & O & E & A & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де E, O — відповідно, одинична і нульова матриці того ж порядку, що й A.

Лема 3.1. *Матриця $U(A)$ виду* (3) *є інволюцією тоді й лише тоді, коли матриця A є нільпотентною степеня* 2.

Доведення. Оскільки

$$U(A)^2 = \begin{pmatrix} E & A+A & A^2 & O & O & O & \dots \\ O & E & A+A & A^2 & O & O & \dots \\ O & O & E & A+A & A^2 & O & \dots \\ O & O & O & E & A+A & A^2 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{pmatrix},$$

а характеристика R рівна двом, то звідси отримуємо, що матриця $U(A)^2$ є одиничною тоді й лише тоді, коли A^2 нульова. Звідси випливає необхідне твердження. □

Опишемо тепер загальний спосіб, за допомогою якого можна будувати точні зображення вільного добутку довільного скінченного числа циклічних груп другого порядку нескінченними вузькими унітрикутними матрицями над кільцем R.

Нехай натуральне число $n \geq 3$ фіксоване. Наведемо конструкцію вільного добутку n циклічних груп порядку 2, яка залежить від натурального числа t. У правому R-модулі R^t виберемо такі n ненульових векторів $v_1, \dots, v_n$, а в кільці R_t розглянемо такі n квадратних матриць $A_1, \dots, A_n$, що:

1. кожна з матриць $A_1, \dots, A_n$ є нільпотентною степеня 2;

2. для довільних i, j ($1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) виконана рівність

$$v_i A_j = v_j.$$

Визначимо тепер нескінченні унітрикутні матриці $U(A_1), \ldots, U(A_n)$. Має місце

Теорема 3.1. *Підгрупа групи $BUT_\infty(R)$, породжена матрицями $U(A_1), \ldots, U(A_n)$, розкладається у вільний добуток n циклічних груп порядку 2.*

Доведення. Зауважимо, що за лемою 3.1 матриці $U(A_1), \ldots, U(A_n)$ є інволюціями. Тому досить перевірити, що добуток

$$U = U(A_{i_1}) \ldots U(A_{i_m}),$$

в якому $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, причому $i_j \neq i_{j+1}$ для $1 \leq j < m$, не дорівнює одиничній матриці.

Введемо позначення

$$U_j = U(A_{i_1}) \ldots U(A_{i_j}), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Кожну з матриць $U_1, \ldots, U_m$ можемо розглядати, як елемент групи $BUT_\infty(R_t)$, оскільки $A_1, \ldots, A_n \in R_t$. Тоді з правила множення матриць індукцією за j отримуємо, що у матриці U_j кожен з елементів j-тої верхньої діагоналі дорівнює добутку $A_{i_1} \ldots A_{i_m}$. Таким чином, кожен з елементів m-тої верхньої діагоналі матриці U дорівнює добутку $A_{i_1} \ldots A_{i_m}$. Але цей добуток є ненульовою матрицею, оскільки $v_{i_1} A_{i_1} \ldots A_{i_m} = v_{i_m}$, а v_{i_m} є ненульовим за припущенням. □

Ця теорема допускає природне узагальнення. А саме, нехай для натурального числа $n \geq 2$ у модулі R^t вибрано такі n підмножин ненульових елементів $V_1, \ldots, V_n$, а в кільці R_t такі n матриць $B_1, \ldots, B_n$, що виконуються умови:

1. для кожного i, $1 \leq i \leq n$, матриця B_i є нільпотентною степеня 2^{k_i} для деякого $k_i \geq 1$;
2. для довільних i, j ($1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$) для кожного елемента $v_i \in V_i$ та натурального числа l такого, що $1 \leq l \leq 2^{k_j} - 1$, має місце включення $v_i B_j^l \in V_j$.

Тоді аналогічно доводиться

Теорема 3.2. *Матриці $U(B_1), \ldots, U(B_n)$ породжують групу, яка розкладається у вільний добуток n циклічних груп порядків $2^{k_1}, \ldots, 2^{k_n}$ відповідно.*

4 Приклади

Будемо розглядати матриці над полем $\mathbb{Z}_2$ з двох елементів.

1) Розглянемо у просторі $\mathbb{Z}_2^n$ вектори

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,\ldots,1,1),\\ v_2 &= (1,1,\ldots,1,0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n &= (1,0,\ldots,0,0) \end{aligned}$$

і визначимо матриці $A_1,\ldots,A_n$ порядку n такими рівностями (при цьому їх рядки будемо розглядати, як вектори з простору $\mathbb{Z}_2^n$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} v_i \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ v_i \\ v_i \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}, (2 \le i \le n-1), A_n = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ v_n \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Застосувавши теорему 3.1, отримуємо, що нескінченні унітрикутні матриці $U(A_1),\ldots,U(A_n)$, породжують вільний добуток n циклічних груп порядку 2.

2) Зафіксуємо тепер довільне натуральне число k. Нехай $e_1,\ldots,e_{2^k}$ — стандартний базис $\mathbb{Z}_2^{2^k}$. Покладемо $V_1 = \{e_2,\ldots,e_{2^k}\}$, $\quad V_2 = \{e_1\}$. Нехай B_1 — нільпотентна клітина Жордана порядку 2^k, а B_2 — матриця порядку 2^k, у якої перший рядок нульовий, а всі інші рівні e_1. З теореми 3.2, отримуємо, що група, породжена нескінченними унітрикутними матрицями $U(B_1)$ та $U(B_2)$, розкладається у вільний добуток циклічних груп порядків 2^k і 2.

[1] *Леонов Ю., Некрашевич В., Сущанський В.* Зображення вінцевих добутків унітрикутними матрицями // Доповіді НАН України. — 2005. — №4. — С 29–33.

[2] *Голубовски В.* Автоморфизмы корневых деревьев счетной валентности // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2007. — **343**. — С. 199-–205.

[3] *Olijnyk A., Sushchansky V.* Representations of free products by infinite unitriangular matrices over finite fields // Intern. J. Algebra and Computation. — 2004. — **14**, №5-6. — P. 741–749.

[4] *Олийнык А.С., Сущанский В.И.* Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Матем. заметки. — 2000. — **67**, №1. — С 386–391.

[5] *Hołubowski W.* Free subgroups of the group of infinite unitriangular matrices // Inter. J. Algebra and Computation. — 2003. — **13**, №1. — P. 81–86.

FREE PRODUCTS OF CYCLIC 2-GROUPS IN GROUPS OF INFINITE UNITRIANGULAR MATRICES

Andriy OLIYNYK

Taras Shevchenko National University
60 Volodymyrska Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *olijnyk@mechmat.univ.kiev.ua*

Groups of infinite unitriangular matrices over unitary rings are considered. A general construction of free products of cyclic 2-groups in groups of narrow infinite unitriangular matrices over rings of characteristic 2 is presented.