Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2019. — Т.16

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2019. — V.16

ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНАТОЛІЯ МИКОЛАЙОВИЧА ПЛІЧКА

Т. Банах[1], А. Загороднюк[2], В. Маслюченко[3], І. Мацак[4], М. Островський[5], М. Попов[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна*
[2] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
[3] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
[4] *Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
[5] *St. John's University, NY (USA)*

Т. Банах, А. Загороднюк, В. Маслюченко, І. Мацак, М. Островський, М. Попов. *До 70-річчя від дня народження Анатолія Миколайовича Плічка* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2019. — Т.16. — С. 1–25.

20 липня 2019 року відомому українському математикові – Анатолію Миколайовичу Плічку – виповнилося 70 років. Більше 130 опублікованих праць з функціонального аналізу та історії математики, розв'язання 23 проблем, поставлених відомими математиками, учні, троє з яких стали докторами і ще троє – кандидатами наук, плідна багаторічна діяльність у науковому товаристві імені Шевченка – далеко не всі досягнення ювіляра.

T. Banakh, A. Zagorodnyuk, V. Maslyuchenko, I. Matsak, M. Ostrovskii, M. Popov, *To 70th birthday of Anatoly Plichko*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **16** (2019), 1–25.

The paper is dedicated to 70th birthday of Anatoly Plichko, a known Ukrainian mathematician, a specialist in geometry of Banach spaces. A. Plichko has published more than 130 papers in Functional Analysis and History of Mathematics, solved 23 problems posed by known mathematicians, promoted 6 Ph.D. student among which three made habilitations.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 01A70 *УДК:* 510

Анатолій Миколайович Плічко

1. Життєвий шлях ювіляра

Анатолій Миколайович Плічко народився 20 липня 1949 р. в селі Червона Кам'янка Кіровоградської області в родині колишнього військового. Надзвичайні математичні здібності Анатолія, які він продемонстрував протягом навчання в початкових класах середньої школи, спонукали батьків віддати його на навчання у старших класах до Київської фізико-математичної школи-інтернату, де він дістав добру математичну освіту завдяки, зокрема, Володимиру Андрійовичу Вишенському.

Після закінчення школи Анатолій вступив на механіко-математичний факультет Київського університету. Його наукові інтереси почали формуватися, коли він відвідував курс «Топологічні векторні простори», який читав Юрій Іванович Петунін. На цьому курсі Петунін запропонував студентам кілька дослідницьких задач, розв'язування яких стало першим досвідом наукової роботи для Анатолія. У 1972 р. Анатолій захистив свою дипломну роботу і вступив до аспірантури, яку він успішно закінчив у 1975 р., захистивши кандидатську дисертацію під керівництвом Ю. І. Петуніна.

Зрештою теорія банахових просторів стала областю основних наукових інтересів Анатолія (яка не була такою для його наукового керівника Ю. І. Петуніна). У зв'язку з цим Анатолій встановив тісні наукові контакти з найавторитетнішим українським (та й радянським) експертом з теорії просторів Банаха — Михайлом Йосиповичем Кадецем та членами його школи (Борисом Васильовичем Годуном, Володимиром Михайловичем Кадецем, Михайлом Йосиповичем Островським, Володимиром Петровичем Фонфом).

Однією з характерних рис творчості ювіляра було бажання і вміння знайти (у літературі або через спілкування) цікаві проблеми, щодо яких Анатолій бачив підходи, які мали шанс. Як ми бачимо, таке трапилося у багатьох випадках. Іншою рисою творчості Анатолія було те що він вважав, що математична робота є значно привабливішою, якщо вона є компанійською, тому він завжди був зацікавлений вивчати ті математичні напрямки, якими займалися його друзі (якщо вони цього бажали), щоби приєднатися до їх досліджень.

Після захисту кандидатської дисертації, у 1975-79 рр. Анатолій працює молодшим науковим співробітником Астрономічної обсерваторії при КДУ. Далі ювіляр переїжджає до Львова, де з 1980 до 1995 р. працює старшим науковим співробітником львівського Інституту Прикладних Проблем Механіки і Математики. За цей період Анатолій написав значну частину своїх наукових праць, у тому числі, докторську дисертацію. У ювілейній статті до 60-річчя від дня народження А. М. Плічка автори настільки вдало описали докторську епопею Анатолія, що розширений колектив авторів вирішив помістити цей фрагмент нижче лише з косметичними змінами.

У радянські часи захистити докторську було складніше, ніж тепер, особливо, за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. Деякі математики змінювали спеціальність – так було легше захиститися. Існувало неофіційне правило для претендентів на докторську з 01.01.01 – пройти семінар П. Л. Ульянова (він очолював ВАК з цієї спеціальності). П. Л. Ульянов – відомий спеціаліст в галузі рядів Фур'є – не має жодної публікації не з рядів Фур'є, якщо не брати до уваги 53 статті про інших математиків (з 154 усього, згідно з базою в MathSciNet). При цьому він був наділений неофіційними повноваженнями не давати "зелене світло" дисертаціям ще до захисту з усіх розділів математичного аналізу. Звичайно, в Ульянова були радники на його семінарі, які розбиралися не лише в рядах Фур'є (але чи у всіх розділах математичного аналізу?).

Ось настав час виступу Анатолія Плічка на семінарі Ульянова. На момент виступу дисертант мав праці, в яких розв'язано немало проблем, поставлених відомими математиками, про що й було розказано на семінарі. Але вердикт Ульянова був негативним: "Вы нас не достаточно впечатлили"[1]. Не зрозуміло,

[1] З листа М. Й. Кадеця Ю. І. Петуніну з цього приводу: *львовский математик А.Н. Пличко является сильным, плодотворно работающим специалистом, чье имя хорошо известно коллегам в СССР и в мире. Провал его докторской диссертации в МГУ (где нет профессионалов в области теории пространств Банаха) основан на странном убеждении, что самые авторитетные специалисты во всех областях знаний проживают именно в Москве.*

як можна було "впечатлить" людину, яка, м'яко кажучи, не є спеціалістом в геометрії банахових просторів. Можливо, Ульянов мав на увазі акцент, з яким виступив у Москві Плічко. Незважаючи на негативний вердикт Ульянова, до честі Ради київського Інституту Математики, дисертацію А. М. Плічка беруть до розгляду (у цьому значна заслуга Ю. М. Березанського і М. Л. Горбачука). Захист відбувся успішно у 1988 р., але ВАК дисертацію не затвердив.

Наступний етап дисертаційної епопеї Плічка розпочався, коли Україна здобула незалежність і створила власний ВАК. За сприянням тих самих Ю. М. Березанського і М. Л. Горбачука на Раді київського Інституту Математики прийняли до розгляду іншу дисертацію А. М. Плічка. Враховуючи неординарність обставин, дозволили не писати текст нової дисертації. Захист відбувся за сукупністю робіт і ВАК України затвердив дисертацію, і від 1994 р. А. М. Плічко – український доктор фіз.-мат. наук зі спеціальності 01.01.01 - математичний аналіз.

А. М. Плічко серед співробітників ІППММ, 1995 рік.

У 1987 р. Анатолій одружився. Народження двох синів Олексія та Андрія змусило Анатолія та його дружину розглядати варіанти переїзду з можливістю розширення житла. Підходящий варіант знайшовся лише у 1995 р.: родина Плічків переїхала до Кіровограду. З 1995 по 2005 рр. Анатолій Миколайович працював у Кіровоградському педагогічному університеті, де він став дипломованим професором у 1999 р.

З 2005 по 2018 рр. Анатолій Миколайович Плічко працював професором у Краківському політехнічному інституті (Польща), де він читав лекції з різних математичних дисциплін.

У 2018 р. Анатолій вийшов на пенсію, остаточно переїхавши до Кропивницького. Весь час роботи у науково-педагогічних закладах Анатолій плідно працював, як науковець, написавши загалом понад 130 наукових праць. Після виходу на пенсію Анатолій Миколайович продовжує працю над історичними опусами.

2. Наукові досягнення Анатолія Миколайовича

2.1. Теорія біортогональних систем

Одним з перших напрямів, в яких Анатолій знайшов багато цікавих проблем і зробив вагомий внесок, була теорія біортогональних систем. Для початку відзначимо його внесок до розв'язання проблеми С. Банаха [1, p.238]: *Чи кожний сепарабельний банахів простір має тотальну фундаментальну біортогональну систему?* Розвиваючи результат Девіса і Джонсона [2], Анатолій [7, 8] довів, що відповідь не лише «так», але й система може бути обраною з довільною межею, строго більшою за 1. Анатолію не пощастило з цим надзвичайно потужним результатом, адже трохи раніше цей самий результат було отримано в роботах Овсепяна та Пелчиньського [5, 6], і в більшості літератури результат приписують лише останнім авторам.

Після цього Анатолій взявся за розбудову теорії біортогональних систем для несепарабельних банахових просторів. Він дав відповіді на деякі з основних проблем в цій галузі, а саме:

- довів існування обмеженого M-базису у довільному слабко компактно породженому банаховому просторі [9];
- довів існування обмеженої тотальної біортогональної системи у довільному банаховому просторі [10];
- побудував приклад банахового простору без фундаментальної біортогональної системи (цей результат був також незалежно отриманий Б. В. Годуном та М. Й. Кадецем [3]);
- побудував приклад локально рівномірно опуклого простору без M-базису [12];
- довів, що M-базис у підпросторі не завжди можна розширити до M-базису усього простору [13].

Внесок Анатолія Плічка у теорію біортогональних систем у несепарабельних просторах є дуже вагомим, він по праву вважається одним з творців цієї теорії. Детальніша інформація з цього приводу може бути знайдена у монографії [4], яка містить численні посилання на праці А. М. Плічка.

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Banach, *Théorie des opérations lińeaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
2. W. J. Davis, W. B. Johnson, *On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces*, Studia Math. **45** (1973), 173–179.
3. Б. В. Годун, М. И. Кадец, *О пространствах Банаха без полных минимальных систем*, Функц. анализ и его прилож. **14**:1 (1980), 67–68.
4. P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff, V. Zizler, *Biorthogonal systems in Banach spaces*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, **26**. Springer, New York, 2008.
5. R. I. Ovsepian, A. Pełczyński, *On the existence of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2*. Studia Math. **54**:2 (1975), 149–159.
6. A. Pełczyński, *All separable Banach spaces admit for every $\varepsilon > 0$ fundamental total and bounded by $1+\varepsilon$ biorthogonal sequences*, Studia Math. **55**:3 (1976), 295–304.
7. А. М. Плічко, *Існування повної ε-ортонормальної системи в сепарабельному нормованому просторі*, Доп. АН УРСР, А, 1 (1976), 21–23.
8. А. Н. Пличко, *M-базисы в сепарабельных и рефлексивных банаховых пространствах*, Укр. Мат. ж., **29**:5 (1977), 681–685.
9. А. Н. Пличко, *Существование ограниченного M-базиса в WCG-пространстве*, Теор. функций, Функц. анализ и их прилож. (Харьков), **32** (1979), 61–69.
10. А. Н. Пличко, *Существование ограниченной тотальной биортогональной системы в банаховом пространстве*, Теор. функций, Функц. анализ и их прилож. (Харьков), **33** (1980), 111–118.
11. А. Н. Пличко, *Банахово пространство без фундаментальной биортогональной системы*, Докл. АН СССР, **254**:4 (1980), 798–801.
12. А. Н. Пличко, *О проекционных разложениях, базисах Маркушевича и эквивалентных нормах*, Мат. заметки **34**:5 (1983), 719–726.
13. А. Н. Пличко, *О базисах и дополнениях в несепарабельных банаховых пространствах. II*, Сиб. Мат. ж. **27**:2 (1986), 149–153.

2.2. Теорія функцій

У даному розділі ми згадаємо кілька робіт ювіляра, присвячених теорії функцій дійсної змінної.

Неабиякий інтерес Анатолія викликала знаменита Шотландська книга проблем С. Банаха та його колег.

Проблема 188.1 з «Шотландської книги» (М. Ейделгайт). *Нехай $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ – абсолютно неперервна на кожній вертикальній і горизонтальній прямій функція і $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1]$ – абсолютно неперервні функції. Чи є абсолютно неперервною функція $f(g_1(t), g_2(t))$? Якщо ні, то чи є це правильним за умови, що $\iint_{[0,1]^2} |f'_x|^p\,dxdy < \infty$ і $\iint_{[0,1]^2} |f'_y|^p\,dxdy < \infty$, де $p > 1$?*
Відповідь негативна в обох випадках [2].

Проблема 66 з «Шотландської книги» (С. Мазур). *Нехай функція* $z = f(x, y)$ *двох дійсних змінних* x, y *має частинні похідні першого порядку* f'_x, f'_y *і чисті частинні похідні другого порядку* f''_{xx}, f''_{yy}. *Чи існують тоді майже скрізь мішані частинні похідні другого порядку* f''_{xy}, f''_{yx}*?* Відповідь негативна [4].

Наступну задачу, на яку ювіляр привернув свою увагу, було поставлено А. Ґулісашвілі у 1982 [1].

Нехай (Ω, Σ) – вимірний простір та X – банахів простір. Функція $\varphi : \Omega \to X$ називається *тотально скалярно вимірною*, якщо множина $F_\varphi := \{f \in X^* : f \circ \varphi$ є вимірною$\}$ є тотальною в X^*. Функція φ називається *скалярно вимірною*, якщо $F_\varphi = X^*$. Кажуть, що банахів простір X має властивість $\mathcal{D}$, якщо для довільного вимірного простору (Ω, Σ) з тотальної скалярної вимірності довільної функції $\varphi : \Omega \to X$ випливає її скалярна вимірність. А. Ґулісашвілі довів [1], що якщо спряжений простір X^* є слабко* ангельським, то X має властивість $\mathcal{D}$.

Проблема. *Чи має місце обернена імплікація?* Відповідь негативна [6].

На завершення зазначимо, що в роботі [5] А. М. Плічко дає відносно прості негативні відповіді на два дещо громіздких питання Б. Н. Пшеничного [7] щодо вибору лінійного неперервного селектора.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Gulisashvili, Estimates for the Pettis integral in interpolation spaces and inversion of the embedding theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR **263** (1982), 793—798 (in Russian). English transl.: Sov. Math. Dokl. **25** (1982), 428-–432.
2. L. Maligranda, V. V. Mykhaylyuk, A. Plichko, *On a problem of Eidelheit from The Scottish Book concerning absolutely continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **375**:2 (2011), 401–411.
3. R. D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book*, Birkhäuser, Boston, 1981.
4. V. Mykhaylyuk, A. Plichko, *On a problem of Mazur from «The Scottish Book» concerning second partial derivatives*, Colloq. Math. **141** (2015), 175–181.
5. А. М. Плічко, *Про два питання Б. М. Пшеничного щодо вибору неперервного лінійного селектора*, Математика сьогодні **13** (2007), 117–118.
6. A. Plichko, *Three sequential properties of dual Banach spaces in the weak* topology*, Topology Appl. **190** (2015), 93–98.
7. Б. Н. Пшеничний, *О задаче выбора непрерывного линейного селектора*, Математика Сегодня, Киев, Вища Школа (1987), 157–159.

2.3. Поліноми на банахових просторах

Очевидно, що для кожного розривного лінійного оператора T на нормованому просторі X з необмеженості послідовності (Tx_i) випливає необмеженість послідовності $(T(x + x_i))$ для будь-якого елемента $x \in X$. Простий приклад (ми його наведемо) показує, що для поліноміального функціоналу другого степеня згаданий факт вже не має місця. Можливо у зв'язку з цими фактами з'явилась така проблема.

Проблема 56. (Мазур, Орлич [1]). *Нехай f – розривний поліноміальний функціонал степеня n на банаховому просторі X. Чи існують такі точки $x_i \in X$, що $x_i \to 0$ і $f(x + x_i) \to \infty$ або хоча б $\overline{\lim}_i |f(x + x_i)| = \infty$ для всіх $x \in X$?*

Теорема. [2] *Нехай $P : X \to Y$ – поліноміальний оператор між нормованими просторами. Якщо оператор P – розривний, то існує така збіжна до нуля послідовність (z_i) в X, що множина $\{P(x + z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ необмежена для будь-якого елемента $x \in X$.*

Теорема. [2] *На кожному нормованому просторі X лінійної розмірності ω_1 існує розривний поліноміальний функціонал p другого степеня, для якого не існує збіжної до нуля послідовності (z_i) в X з $\lim_{i\to\infty} p(x + z_i) = \infty$ для будь-якого елемента $x \in X$.*

Мотивуючись проблемою 56 і теоремою вище, введемо наступне поняття.

Означення. [2] Нехай X, Y – (для простоти) метричні групи; не обов'язково комутативні, але групову операцію позначатимемо символом $+$. Казатимемо, що відображення $F : X \to Y$ – *ізотропне*, якщо воно або скрізь неперервне, або існує така збіжна до нуля послідовність (x_i) в X, що

$$\sup_i \operatorname{dist}(F(x + x_i), F(x)) \geq c \tag{1}$$

для деякого числа $c > 0$ та будь-якого $x \in X$.

Найбільше з чисел c, для яких виконується нерівність (1), називатимемо константою ізотропності; вона може дорівнювати й ∞. Будемо вважати, що скрізь неперервне відображення має нульову константу ізотропності.

Наслідок. *Кожне поліноміальне відображення між нормованими просторами ізотропне (з константою ізотропності рівною 0 або ∞).*

Твердження. [2] *Якщо ізотропне відображення F повної метричної групи X в метричну групу Y розривне в нулі, то воно розривне на кожній залишковій множині $M \subseteq X$.*

Наслідок. [2] *Якщо ізотропне відображення з повної метричної групи X в метричну групу Y неперервне на деякій залишковій множині, то F неперервне.*

Теорема. [2] *Ізотропне відображення з довільної повної метричної групи X в сепарабельну повну метричну групу Y є неперервним тоді і лише тоді, коли воно має борелівський графік.*

Ці результати було узагальнено для ширшого класу відображень на топологічних групах у [3].

У [1] запропоновано наступні дві проблеми.

Проблема 75 з «Шотландської книги» (С. Мазур). *Нехай поліноміальний функціонал p, заданий на банаховому просторі X, обмежений на деякому ε-околі деякої множини $M \subset X$. Чи для всякого числа a знайдеться δ-окіл множини $a \cdot M$ на якому поліном p також буде обмеженим?*

Проблема 55 з «Шотландської книги» (С. Мазур). *Нехай поліноміальний функціонал p, заданий на банаховому просторі X, обмежений в деякому ε-околі деякої множини $M \subset X$. Чи існує поліноміальний функціонал q і лінійний оператор T в просторі X такі, що $p = qT$ і множина $T[M]$ є обмеженою?*

У проблемі 55 (формально) не вимагається неперервності q. Проблему 55 з вимогою неперервності q називатимемо проблемою 55'.

Для лінійних функціоналів відповідь на проблему 75, звичайно, позитивна. Легко бачити, що з позитивної відповіді на проблему 55' для даних p і q випливає позитивна відповідь для них на проблему 75; символічно записуватимемо це так: пр. 55' $\to$ пр. 75. У [2] показано, що для нескінченновимірного банахового простору відповідь на проблему 75 (отже й на проблему 55') негативна, що пр. 55 $\not\to$ пр. 55' і що пр. 75 $\not\to$ пр. 55'. Тобто

$$\text{пр. } 55 \overset{\not\to}{\leftarrow} \text{пр. } 55' \overset{\to}{\not\leftarrow} \text{пр. } 75.$$

Відповіді на проблему 55 ми не знаємо. Наступне питання є її варіантом.

Питання. Нехай p – поліноміальний функціонал на сепарабельному банаховому просторі X, обмежений на деякому околі деякої (необмеженої) множини M. Чи існує тоді (взагалі кажучи, розривний) поліноміальний функціонал q і неперервний лінійний оператор T у просторі X такі, що $p = qT$ і множина $T[M]$ обмежена?

У [2] також доведено, що множина нулів однорідного поліноміального функціонала на нескінченновимірному комплексному лінійному просторі містить нескінченновимірний підпростір.

ЛІТЕРАТУРА

1. R. D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book*, Birkhäuser, Boston, 1981.

2. A. Plichko, A. Zagorodnyuk, *On automatic continuity and three problems of «The Scottish Book» concerning the boundedness of polynomials functionals*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 477–494.

3. A. Plichko, A. Zagorodnyuk, *Isotropic mappings and automatic continuity of polynomial, analytic and convex operators*, General Topology in Banach Spaces – Nova Sci. Publl., Huntington, New York (2001), 1–13.

2.4. Несепарабельні банахові простори

Протягом усієї своєї математичної творчості Анатолій особливу увагу приділяв дослідженню несепарабельних просторів, створивши свій оригінальний підхід до розв'язання різних задач. Саме несепарабельні простори лежать в основі багатьох контрприкладів, побудованих А. М. Плічком. Результати ювіляра, що належать до теорії біортогональних систем, були згадані у підрозділі 2.1. Крім того, саме несепарабельні симетричні простори мають унікальні властивості, встановлені Анатолієм. Про це детальніше ми розповімо у даному розділі.

У своїй ґрунтовній монографії [8, Проблема 20.8] І. Зінгер поставив таке питання: *Чи кожний локально рівномірно опуклий банахів простір має M-базис?* Це питання цікаве для несепарабельних просторів, адже кожний сепарабельний банахів простір має M-базис. Розвинувши спеціальну техніку проекційних розкладів банахового простору ваги $\aleph_1$, Анатолій побудував приклад локально рівномірно опуклого банахового простору без M-базису [3].

Наступний несепарабельний контрприклад Анатолія стосується такої проблеми того ж Зінгера [8, с. 832]: *Чи кожний M-базис підпростору банахового простору з M-базисом продовжується до деякого M-базису усього простору?* В роботі [4] було побудовано контрприклад з використанням простору Шелаха, існування якого встановлено у припущенні аксіоми конструктивності [7].

Наступне питання Дж. Борвейна і Д. Тінглі [1] стосується класичного несепарабельного простору ℓ_∞: *Чи існують щільні лінійні підпростори X, Y простору ℓ_∞ з нульовим перетином, які є операторними образами?* Анатолій побудував такі підпростори в роботі [5].

А. М. Плічко не лише будував контрприклади до відомих задач про несепарабельні простори; в роботі [6] автори отримали низку позитивних результатів про несепарабельні симетричні простори. Так, узагальнюючи теорему Енфло-Розенталя про несепарабельні $L_p(\mu)$-простори [2], автори довели, що кожний симетричний банахів простір щільності $\geq \aleph_\omega$, який не є ізоморфним гільбертовому просторові, не вкладається ізоморфно у банахів простір з безумовним базисом. При $2 < p < \infty$ несепарабельний простір $L_p(\mu)$ з безатомною мірою μ насичений гільбертовими підпросторами у наступному сенсі: *кожний несепарабельний підпростір X простору $L_p(\mu)$ містить несепарабельний підпростір Z, ізоморфний гільбертовому простору*. При $1 < p < 2$ це твердження є хибним, адже несепарабельний простір $L_p(\mu)$ містить підпростір, ізоморфний $\ell_r(\omega_1)$ при $p < r < 2$, який, в свою чергу, не містить нескінченновимірних підпросторів, ізоморфних гільбертовому простору.

ЛІТЕРАТУРА

1. J. M. Borwein, D. W. Tingley, *On supportless convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **94**:3 (1985), 471–476.
2. P. Enflo, H. P. Rosenthal, Some results concerning $L^p(\mu)$-spaces, J. Funct. Anal. **14**:4 (1973), 325–348.
3. А. Н. Пличко, *О проекционных разложениях, базисах Маркушевича и эквивалентных нормах*, Мат. заметки **34**:5 (1983), 719–726.
4. А. Н. Пличко, *О базисах и дополнениях в несепарабельных банаховых пространствах. II*, Сиб. Мат. ж. **27**:2 (1986), 149–153.
5. А. Н. Пличко, *Несколько замечаний об операторных образах*, Теор. функций, Функц. анализ и их прилож. (Харьков) **53** (1990), 69-70.
6. A. M. Plichko, M. M. Popov, *Symmetric function spaces on atomless probability spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **306** (1990), 1–85.
7. S. Shelah, *A Banach space with few operators*, Isr. J. Math. **30**:1-2 (1978), 181–191.
8. I. Singer, *Bases in Banach Spaces, II*, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York (1981).

2.5. Ймовірнісні методи в функціональному аналізі

Дана тематика частково розкрита у наступному розділі у вигляді спогадів Івана Калениковича Мацака.

2.6. Історія математики

Анатолій цікавився історією ще з шкільних років, але тоді ж зрозумів, що у ті часи проводити об'єктивні історичні дослідження неможливо, тому вибрав математику. Проте, після переїзду до Львова він звернувся до історії математики, а точніше до наукових досліджень знаменитого львівського математика Стефана Банаха та його школи. У цьому немає нічого дивного, бо Плічко теорією просторів Банаха власне і займався. У цьому напрямку було опубліковано 3 статті [1, 2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Плічко, *До сторіччя з дня народження Стефана Банаха. Штрихи біографії*, Математичні Студії, **2** (1993), 5–9.
2. А. Плічко, Я. Притула, *До 60річчя публікації українського перекладу книги С. Банаха*, Математичні Студії **30**:1 (2008), 107–112.
3. M. Ostrovskii, A. Plichko, *On the Ukrainian translation of Théorie des opérations linéaires and Mazur's update of the "remarks" section*, Математичні Студії **32**:1 (2009), 96–111.
4. А. Плічко, *Віртуальна участь українців у вбивстві львівських професорів улітку 1941 року*, "День" 29.06. 2016.
5. А. Плічко, *Зауваження до книжки: Mariusz Urbanek, Genialni. Lwowska szkoia matematyczna*, Мат. Вісник НТШ, **13** (2016), 130–135.
6. A. Plichko *Two remarks on the book by Roman Duda "Pearls from a lost city. The Lvov school of mathematics"*, Математичні Студії **47**:2 (2017), 211–224.

3. Спогади колег та друзів

3.1. Тарас Онуфрійович Банах

Я познайомився з Анатолієм Миколайовичем ще в студентські роки завдяки Ліді Зарічній, дружині Михайла Зарічного, мого наукового керівника. Лідія Євгенівна та Анатолій Миколайович працювали в одному відділі в Інституті прикладних проблем механіки і математики і ми часом зустрічалися на топологічних прогулянках – так тоді називалися спільні походи математиків на природу.

Михайло Зарічний та Анатолій Плічко в Карпатах

Але, будучи студентом, я ще мало розумів, ким насправді був Анатолій Миколайович, цілком скромний чоловік з незмінною полотняною сумкою-«авоською» формату А4, яка, як він сам стверджував, ідеально пасувала під його статті. Щоправда вже тоді ходили чутки, що насправді Плічко дуже «крутий» математик, бо свого часу сам Пелчинський, зірка варшавської школи функціонального аналізу, гнав машину до кордону з Україною, щоб забрати Плічка на якусь важливу конференцію.

Дещо тісніше співпрацювати з Анатолієм Миколайовичем мені пощастило в аспірантські часи, після повернення з річного стажування в Університеті Альберти міста Едмонтон. Якраз перед розвалом Радянського Союзу почала привідкриватися «залізна завіса» і, завдяки українській діаспорі, з’явилася можливість поїхати на наукове стажування до Канади. Я виїхав восени 1990-го ще з Радянського Союзу, а через рік повернувся вже в незалежну Україну. Хоча летів все ще через Москву. Пам'ятаю, повертався потягом Москва–Львів і намагався не видавати того, що провів рік за кордоном, але досить швидко "розколовся", бо не мав поняття, хто така "просто Марія", героїня мексиканського серіалу, шалено популярного в ті часи на теренах колишнього Радянського Союзу. У Канаді я побачив зовсім інші стандарти праці і відношення до людини – відразу по приїзду мені дали в'язку ключів: від входу в університет, від факультету, університетської бібліотеки, кухні і, нарешті, власного офісу. Про такий рівень довіри у нас тоді (та і тепер теж) годі було мріяти. Завдяки цій в'язці ключів я мав можливість працювати дні і ночі. І в цьому був свій великий шарм – заїхати (на велосипеді) вночі до університету, блукати вздовж полиць безлюдної бібліотеки і досліджувати її скарби, книга за книгою, полиця за полицею. Власне там я натрапив на книгу "Open Problems in Topology", яку видав Elsevier в 1990. Книга складалася з оглядів відкритих проблем із різних розділів топології. Мене, природньо, цікавили огляди з нескінченно-вимірної топології — саме у цю модну тоді тематику скерував мене мій науковий керівник, Михайло Михайлович Зарічний. Тих оглядів було два: один авторства класика нескінченно-вимірної топології Джиммі Веста, а інший – молодих зірок Тадеуша Добровольського та Єжи Могільського, представників польської школи нескінченно-вимірної топології, що веде свою історію від Стефана Банаха та його проблем зі Шкоцької Книги. З Вестом та Добровольським мені пощастило зустрітися в 1992 році на конференції в Colorado-Springs біля міста Денвер в Сполучених Штатах, куди я їхав декілька днів автобусами з Канади (і це теж була досить екстремальна і незабутня подорож). Мені вдалося розв'язати декілька проблем зі згаданих оглядів і отримати глибше розуміння внутрішньої логіки нескінченно-вимірної топології. Однією з проблем, яка мене тоді зацікавила, була проблема топологічної класифікації операторних образів, тобто образів банахових просторів при дії лінійних операторів. Після повернення до Львова я виявив, що Анатолій Миколайович був глибоким спеціалістом саме з операторних образів. Пам'ятаю, ми тоді досить довго спілкувалися на цю тему, результатом чого стала наша спільна монографічна стаття [2] обсягом 81 сторінок, опублікована у польському журналі «Dissertationes Mathematicae». У 1992 я закінчив аспірантуру, і коли довелося шукати опонентів, то я вже мав «готового» Анатолія Миколайовича, який мені як «бонус» запропонував ще одного опонента – свого колегу з Харкова, Володимира Фонфа, який теж був відомим спеціалістом з операторних образів. Щоб схилити Фонфа стати опонентом, мені довелося їхати до Харкова і впродовж ночі в готельному номері і сигаретному димі (Фонф давав добре прикурити) пояснювати свої результати і обговорювати нерозв'язані математичні проблеми. Після захисту дисертації ми продовжували співпрацювати з Анатолієм Миколайовичем у різних областях функціонального аналізу і опублікували спільно 5 статей [1]–[5], одна з яких, до речі, присвячена розв'язанню першої проблеми зі Шкоцької книги (про ущільнення несепарабельних банахових просторів на гільбертів куб). Методами дескриптивної теорії множин, замішаної на теорії міри та нескінченно-вимірній топології, нам вдалося побудувати таке ущільнення довільного банахового простору щільності $\aleph_1$.

Не можу також не згадати роль А. М. Плічка в організації літніх шкіл в Україні. У 2000 році Анатолій Миколайович запропонував мені та його учню Андрію Загороднюку поїхати разом на зимову школу з функціонального аналізу до Чехії. Тоді вона проходила в маленькому містечку Кріштановіце біля кордону з Польщею. Чехи мають давню і славну традицію проведення зимових шкіл з абстрактного аналізу, що відбуваються щороку, починаючи від 1973 року. Такі школи організовуються подалі від цивілізації, на лоні природи, в прекрасних чеських горах посеред чудових засніжених краєвидів, що сильно сприяє неспішним дискусіям і налагоджуванню тісних людських контактів. Власне там, в чеській Сілезії, у нас з Загороднюком виникла ідея проведення подібних математичних шкіл в Україні. І така нагода дуже швидко з'явилася, коли у 2003 році Ярослав Григорович Притула, наш тогочасний декан, запропонував організувати Літню школу з топології і аналізу в селі Козьова Сколівського району. Формат цієї Школи, запозичений у чехів, виявився настільки вдалим, що традиція проведення літніх шкіл в Україні тягнеться до цього часу, незважаючи на катастрофічний стан фінансування української науки.

Подружжя Плічків під час Літньої Школи в Козьовій, 2005 рік

Тут я хочу використати нагоду і подякувати нашим подвижникам-ентузіастам, організаторам літніх шкіл в Україні, і, звичайно, Анатолію Миколайовичу Плічку, який був неодноразовим лектором на цих літніх школах і своїм прикладом показував молодому поколінню шлях у науку, хоч нелегкий, але захоплюючий.

R. Cauty, В. Кошманенко, В. Маслюченко, А. Плічко, Т. Банах

ЛІТЕРАТУРА

1. T. Banakh, A. Plichko, *On a problem of "Scottish book" concerning contractions of metric spaces onto compacta*, Mat. Stud. **8**:1 (1997), 119–122.
2. T. Banakh, T. Dobrowolski, A. Plichko, *Applications of some results of infinite-dimensional topology to the topological classification of operator images and weak unit balls of Banach spaces*, Dissert. Math. **387** (2000) 1-–81.
3. T. Banakh, A. Plichko, A. Zagoronyuk, *Zeros of continuous quadratic functionals on non-separable Banach spaces*, Colloq. Math. **100** (2004), 141—147.
4. -T. Banakh, A. Plichko, *The algebraic dimension of linear metric spaces and Baire properties of their hyperspaces*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Math. **100**:1-2 (2006), 31–37.
5. I. Banakh, T. Banakh, A. Plichko, A. Prykarpatskyi, *On local convexity of nonlinear mappings between Banach spaces*, Central Europ. J. Math. **10**:6 (2012) 2264–2271.

3.2. Андрій Васильович Загороднюк

Я познайомився з Анатолієм Миколайовичем у 1991 році. Я перевівся на навчання на 4-тий курс Львівського мех-мату з Московського університету і мені потрібно було знайти наукового керівника. Несподівано для себе я зустрів свого знайомого, Андрія Разенкова, якого я ще знав студентом у Москві і який вже був на той час аспірантом у Львові. Він порадив мені звернутися до Анатолія Миколайовича.

Я пам'ятаю нашу першу розмову на кафедрі теорії функцій і функціонального аналізу. Анатолій Миколайович запитав мене чим би я хотів займатись. Я відповів (не знаю чому), що мене цікавлять нелінійні оператори. Тоді Анатолій Миколайович відкрив ксерокопію «Шотландської книги» («The Scottish Book»), вибрав 4 задачі, які стосувались поліномів на банахових просторах і запропонував мені подумати над ними. Деякі з цих задач були на той час не розв'язаними, а деякі мали частковий розв'язок або поставлені питання можна було узагальнити на ширші випадки. Одна з задач стосувалася необмежених поліномів. Відомо, що, як і у лінійному випадку, неперервність полінома на банаховому просторі еквівалентна до обмеженості (на обмежених множинах) і якщо поліном розривний, то в околі кожної точки існує обмежена множина, образ якої необмежений. Питання було: Чи можна таку послідовність вибрати єдиною для всіх точок? Тобто, чи має місце така собі «рівномірна необмеженість» для розривних поліномів. Позитивну відповідь на це питання вдалось знайти до кінця 5-го курсу. Пізніше виявилось, що ця властивість поліномів (і деяких інших відображень) дозволяє довести нелінійні аналоги теореми про замкнений графік та обернене відображення. Для мене це було справжнім дивом і я почувався щасливим, що маю до цього причетність.

Інші проблеми стосувались множини нулів поліномів і їх дослідження привело до результату про те що множина нулів однорідного полінома на нескінченновимірному комплексному лінійному просторі складається з лінійних підпросторів нескінченної розмірності. Цей результат зацікавив Річарда Арона (Кентський університет) і дав поштовх для подальших досліджень цього питання багатьма авторами. З деякими з них почалася співпраця, яка продовжується вже багато років.

На першому році аспірантури Анатолій Миколайович відправив мене (самого!) на конференцію у Чехію (Зимова школа з функціонального аналізу). Для мене це було справжнім випробуванням, оскільки раніше я вивчав французьку мову, і на той час тільки навчився читати англомовні статті з математики. Проте, там я вперше побачив як цінують і поважають Анатолія Миколайовича у товаристві математиків світового рівня. Після цього я (самостійно і разом з науковим керівником) не раз бував на цих школах і зрештою, у 2003 році, ми з Тарасом Банахом, під керівництвом Ярослава Григоровича Притули провели першу літню школу у Львівських Карпатах. Звичайно, що Анатолій Миколайович був серед запрошених лекторів.

Хочу зізнатися, що я не був достатньо добрим студентом та аспірантом. Міг дозволити собі не прийти на спецкурс, або місяць не з'являтися до наукового керівника, намагаючись самому щось довести. Анатолій Миколайович мені ніколи не дорікав з цього приводу і завжди щиро радів, коли я все-таки приходив.

Коли я був аспірантом 2-го року, Анатолій Миколайович переїхав у Кіровоград (тепер Кропивницький). У Кіровоградському університеті, на той час не було електронної пошти і наше спілкування з приводу наукової роботи і моєї дисертації відбувалось за допомогою звичайних листів. З того часу ми зустрічаємось, в основному, на конференціях, семінарах або захистах дисертацій.

Анатолій Миколайович залишається для мене прикладом Математика, закоханого у науку, якому я безмежно вдячний. З нагоди славного ювілею, який ми нещодавно відзначили, я бажаю професору Плічку здоров'я і ще багато тих моментів у житті, коли розумієш, що Математика, часом, відкриває свої таємниці.

3.3. Володимир Кирилович Маслюченко

Тут я хочу доповнити мої спогади [1] про Анатолія Плічка розповіддю про історію написання двох наших спільних праць [2,3] та формулюванням їх основних результатів і пов'язаних з ними проблем.

1. ***Про одну сім'ю топологій на просторі ℓ_p.*** Нехай $0 < s \leq p, q \leq \infty$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ (якщо $p = s$, то $q = \infty$, і якщо $p = \infty$, то $q = s$). Тоді, як добре відомо, простір всіх мультиплікаторів з ℓ_p в ℓ_s відносно покоординатного множення послідовностей збігається з ℓ_q. Для елементів $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору ℓ_p і $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ з простору ℓ_q покладемо

$$|x|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \text{ при } p < \infty,$$

$$|x|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| \text{ при } p < \infty,$$

$$ax = (\alpha_k \xi_k)_{k=1}^{\infty} \text{ і } |x|_{a,s} = |ax|_s.$$

Сукупність множин $U_a = \{x \in \ell_p : |x|_{a,s} \leq 1\}$, де a пробігає множину $\ell_q^+ = \{a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q : \alpha_k > 0$ для кожного $k\}$, утворює базу деякої лінійної топології $\kappa_s = \kappa(\ell_p, \ell_s)$ на просторі ℓ_p, яка узагальнює відому нормальну топології Кете, що отримується при $s = 1$. Ці топології були введені мною у 1981 році і для них встановлені такі два результати.

Теорема 1. *Сім'я топологій κ_s, $0 < s \leq p$, на просторі ℓ_p строго зростає, причому всі вони породжують одну й ту ж саму збіжність послідовностей.*

Теорема 2. *Топології κ_s при $0 < s < 1$ і $0 < s \leq p$ на просторі ℓ_p не є локально опуклими.*

Ці результати я доповідав на конференції молодих учених у Львові в Інституті прикладних проблем механіки і математики у 1982 році. Анатолій Миколайович був уважним слухачем моеї доповіді, після якої ми і познайомилися. В доповіді була сформульована

Проблема 1. *Чи для кожної нескінченно малої послідовності додатних чисел γ_n і додатного числа r існує такий елемент $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ з ℓ_r^+, що для кожного елемента $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ з ℓ_r^+ нерівність*

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{v_k} > n \cdot \gamma_n$$

виконується для нескінченного числа номерів n?

Для $\gamma_n = n^{-s}$ при $0 < s < 1$ відповідь була ствердна, і я використав цей результат при доведенні теореми 2.

Після конференції ми з Анатолієм Миколайовичем довго спілкувалися, потоваришували, перейшовши на ти, і обмінялися координатами, а ввечері я вернувся в Чернівці. Толю зацікавила моя проблема, і через деякий час 18.V.1982 я отримав від нього листа з ідеєю позитивної відповіді на поставлене мною питання. Ідея була цікавою, але у викладках були помилки, зокрема, лема, на яку спиралися міркування і яка оголошувалась добре відомим твердженням, виявилась хибною, про що я написав у відповіді. Пройшло небагато часу і 19.VI.1982 надійшов лист з повним доведенням позитивної відповіді на проблему 1. Я запропонував написати Толі спільну статтю на цю тему і він погодився. Оформляючи цю статтю, я помітив, що для послідовності $\gamma_n = n^{-s}$, $0 < s < 1$, я насправді вказав таку послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r^+$, що $\lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{v_k} - n\gamma_n\big) = +\infty$ для кожного $(v_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r^+$. Тому в статті [2] була поставлена

Проблема 2. *Чи для кожної нескінченно малої послідовності додатних чисел γ_n і додатного числа r існує такий елемент $(u_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r^+$, що*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{v_k} - n\gamma_n\Big) = +\infty$$

для кожного $(v_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r^+$?

Відповіді на це питання немає і сьогодні.

2. ***Квазірефлексивні простори без банахових підпросторів.*** Гаусдорфовий локально опуклий простір X називається *квазірефлексивним*, якщо він є замкненим підпростором скінченного ковиміру у своєму другому спряженому X^{**} з сильною топологією $\beta(X^{**}, X^*)$ і топологія $\beta(X, X^*)$ збігається з вихідною топологією простору X. Класичний приклад банахового квазірефлексивного простору – це відомий простір Джеймса J_p, $1 < p < \infty$, що складається з усіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, які збігаються до нуля і мають скінченну p-у варіацію

$$\|x\|_{J_p} = \sup\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_{k_i} - \xi_{k_{i-1}}|^p + |\xi_{k_n}|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

де супремум береться по всеможливих наборах номерів $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$.

На розширеному засіданні семінару Західного наукового центру АН УРСР, присвяченій 90-ій річниці від дня народження С. Банаха, що відбулося у 1982 році, М. Й. Кадець задав питання: *чи існують локально опуклі квазірефлексивні простори, що не містять нескінченновимірних банахових підпросторів?*

А. М. Плічко був одним із ініціаторів і організаторів цього семінару, а насправді неофіційної конференції, в якій взяло участь багато фахівців з функціонального аналізу тодішнього Союзу. Толя і мене запросив взяти участь у цій події, і це для мене було великою і корисною школою в становленні мене, як математика. Насправді, як писав мені пізніше Толя, Михайло Йосипович поставив це питання ще раніше на полях Толіної кандидатської дисертації, опонентом якої він був. На цій першій банахівській конференції Толя запропонував мені зайнятися питанням Кадеця, сказавши, що у нього є міркування щодо можливої позитивної відповіді на нього. У листі до мене від 19.I.1983 він пояснює свою ідею побудови такого прикладу: слід розглянути простір $J_{p+0} = \bigcap_{q>p} J_q$ з відповідною проективною топологією і скористатися тим, що будь-який нескінченновимірний замкнений підпростір J_p містить ізоморфну копію простору ℓ_p та теоремою Пітта про те, що кожний лінійний неперервний оператор $A : \ell_p \to \ell_q$ при $p > q$ є компактним. Всі ці факти тоді були нові для мене, я їх почав обдумувати і навесні 1983 року написав текст з їх повними доведеннями, вивівши з них, що простір-перетин J_{p+0} і є квазірефлексивним простором, що не містить нескінченновимірних банахових підпросторів. Крім того, за своєю власною ініціативою я розглянув простори-об'єднання $J_{p-0} = \bigcup_{q<p} J_p$ з відповідною індуктивною топологією і довів, що і вони дають позитивну відповідь на питання М. Й. Кадеця. З того тексту постала наша спільна стаття [3], результати якої увійшли в мою кандидатську дисертацію, керівником якої став А. М. Плічко. Згодом Анатолій Миколайович допоміг нам з М. М. Поповим потрапити на VIII школу з теорії операторів, що проходила в Юрмалі, і там я доповідав отримані з ним результати [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Загороднюк, В. Маслюченко, І. Мацак, М. Попов, *Анатолій Миколайович Плічко (до 60-річчя від дня народження)*, Мат. вісник НТШ, **6** (2009), 294–312.

2. В. К. Маслюченко, А. М. Плічко, *Про одну сім'ю топологій на просторі ℓ_p*, Мат. методи і фіз.-мех. поля **35** (1992), 194-–198.

3. А. Н. Пличко, В. К. Маслюченко, *Квазирефлексивные локально выпуклые пространства без банаховых подпространств*, Теор. функций, функц. анализ и их прилож. **44** (1985), 78–84.

4. В. К. Маслюченко, А. Н. Пличко, *Квазирефлексивные топологические векторные пространства без банаховых подпространств*, VIII школа по теории операторов в функциональных пространствах (27 октября – 4 ноября 1983, Рига). Тезисы докладов. - Рига: Латв. ун-т (1983), 25–26.

3.4. Іван Каленикович Мацак

Раніше (див. [1]) я розповідав коротко про студентські та аспірантські роки Анатолія Миколайовича Плічка (скорочено А. М.), з яким ми вчились разом в одній групі в Київському університеті ім. Т. Г. Шевченка. Тут мені хотілось би додати кілька спогадів про нашу співпрацю з А. М. Можливо, цей досвід буде корисним для молоді.

Пригадуючи ті далекі 70-80-і роки XX-го століття, я приходжу до висновку: саме тоді на семінарах відомих у світі ймовірнісників А. В. Скорохода та В. С. Королюка я побачив справжню математику, а А. М. був для мене живим прикладом, як повинен працювати математик.

З А. М. ми написали чимало спільних робіт з ймовірнісних задач у банахових просторах. Статті були, звичайно, різні. Наскільки я пам'ятаю, лише одну нашу роботу відхилив рецензент, а «А. М. довго лаявся і пропонував мені посипати голову попелом». До речі, ця робота мені подобалась, але через моє погане знання західних робіт «ми з А. М. відкрили вже відомий велосипед».

Зразу скажу, що з А. М. мені було дуже комфортно працювати (мабуть ми близькі по духу?). Його українська мова (відносно англійської є сумніви) і літературний стиль були, як на мене, на «недосяжній висоті». І він, звичайно, сам опрацьовував остаточний варіант роботи. Окрім того, у нас практично не було проблем із рецензентами. Він з ними «швидко розбирався десь у 1-у раунді».

Почну із одного прикладу нашої з А. М. роботи, який мені добре запам'ятався. Здається, влітку 2011 р. я отримав (якимось незрозумілим чином) наступний результат:

Для невиродженого нормального випадкового елемента X зі значеннями у просторі $C[0,1]$ виконується нерівність

$$\exists\lambda > 0\ \forall z \in C[0,1]\ \forall r > 0\ \forall\delta > 0 \quad \mathbf{P}(\|X - z\| \in (r, r+\delta)) \le \lambda\delta \tag{2}$$

(рівномірна ліпшицевість).

Оцінки типу (2) представляють значний інтерес для ряду задач теорії ймовірностей у банахових просторах.

Я також знав результат відомого литовського математика В. Паулаускаса, що оцінка (2) не має місця у просторі c_0. Але мені були невідомі останні результати у цій області. Тому я звернувся з питанням до В. Паулаускаса: чи відомий цей результат?

Мабуть він оцінив його позитивно і запропонував подати статтю на цю тему в Lithuanian Mathematical Journal (LMJ).

Було зрозуміло, що не менш цікаве і більш загальне питання: *яка властивість банахового простору забезпечує рівномірну ліпшицевість нормального випадкового елемента?*

Це питання і було адресоване А. М. Відповідь А. М. була така: для рівномірної ліпшицевості нормального випадкового елемента достатньо, щоби банахів простір мав властивість $(\mathcal{N})$.

Банахів простір має властивість $(\mathcal{N})$, якщо існує непорожня слабко* компактна підмножина $\Gamma \subseteq U_{B^*}$ така, що $\|x\| = \max(|x^*(x)| : x^* \in \Gamma) \quad \forall x \in B$.

Звідси випливало, що у класичних просторах $C(S)$, c, l_1, виконується оцінка (2), бо вони мають властивість $(\mathcal{N})$. З іншого боку, простори $L_1[0,1]$, c_0, ℓ_p для $p > 1$ не мають властивості $(\mathcal{N})$ (відомо, що рівномірна ліпшицевість для них також не має місця.)

Десь на початку 2012 р. ми з А. М. подали статтю «On distribution of the norm for normal random elements in the space of continuous functions» до LMJ.

Влітку цього ж року отримали рецензію. Треба визнати – рецензент добре попрацював. Вона містила довгий список зауважень до англійської мови, описок і кілька «gaps» (на думку рецензента). Тут треба сказати, що робота містила окрім ймовірнісної частини, також далеко нетривіальні конструкції у банахових просторах (які, звичайно, придумав А. М.). Судячи з рецензії, рецензент був професійним ймовірнісником і добре знав класичний аналіз, але малоймовірно, що він знав банахові простори на професійному рівні.

Після відповіді А. М. рецензент відмовився від подальшого рецензування. Мабуть відповідь була занадто радикальна. В. Паулаускас мені написав, що «ми з А. М. грубіяни і бідкався де він знайде нового рецензента». Все ж на початку 2013 р. робота вийшла в LMJ [3].

Із більш ранніх наших робіт хотілось би відзначити роботу [2]. Запам'яталась вона в основному тим, що з нашої сторони робились «титанічні зусилля для доведення одної гіпотези» (про еквівалентність центральної граничної теореми у просторі Банаха та стохастичної обмеженості величини $\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}}$). Після консультацій з В. Тарієладзе на конференції у Вільнюсі виникли сумніви в справедливості «нашої гіпотези». А закінчилось все тим, що нами був побудований контрприклад. Трохи пізніше у книзі [4] було встановлено, що для виконання центральної граничної теореми слід накласти дещо сильнішу умову на $\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}}$ (дивно, але в цій книжці є згадка про нашу роботу та відповідний контрприклад, хоч «радянські автори там цитуються не густо»).

Кілька слів про наші з А. М. дослідження асимптотичної поведінки сум і максимумів незалежних випадкових елементів зі значеннями в банахових ґратках. Тоді ці роботи здавались «дуже актуальними». Мені навіть було дивно, що ця тема практично не розглядалась. Справа в тому, що класичні результати Б. В. Гнєденка про екстремальні значення незалежних випадкових величин в $\mathbb{R}^1$ ще в 70-х роках були перенесені на простори $\mathbb{R}^n$ (Л. де Хаан, С. Реснік, Дж. Пікkандс). Здається, А. М. першим ввів поняття максимуму 2-х випадкових елементів із значеннями в банахових ґратках, і нами були зроблені перші кроки у вивченні асимптотики максимумів випадкових елементів.

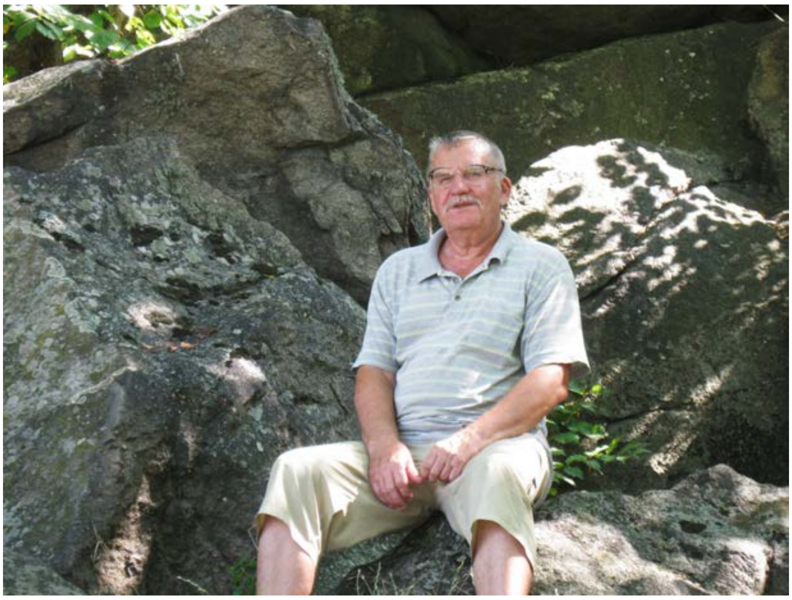
Все ж з цієї тематики залишились певні питання:

1) *Як «розумно» ввести поняття максимуму 2-х випадкових векторів?*
(модель поточкового максимуму в багатьох випадках не здається адекватною)

2) *Які відомі «переконливі» приклади ймовірнісних застосувань граничних теорем для екстремальних значень в багатовимірному випадку?*

На завершення хочу навести цитату із книги «Апологія математика» відомого англійського математика Ґ. Гарді: *Я не знаю жодного випадку, коли значне математичне відкриття було б зроблене людиною у віці після п'ятидесяти років.*

Оскільки мені досить довго доводилось мати справу з ймовірністю та статистикою, то пропоную «гіпотезу Гарді покращити» таким чином: *вона вірна у 95 випадках із 100.* Хочу висловити побажання, щоб ювіляр попав у ті щасливі 5 відсотків і зробив те значне математичне відкриття, про яке вів мову Гарді.



ЛІТЕРАТУРА

1. А. Загороднюк, В. Маслюченко, І. Мацак, М. Попов, *Анатолій Миколайович Плічко (до 60-річчя від дня народження)*, Мат. вісник НТШ. **6** (2009), 294–312.
2. И. К. Мацак, А. Н. Пличко, *Центральная предельная теорема в пространстве Банаха*, Укр. мат. ж. **40**:2 (1988), 234-–239.
3. I. Matsak, A. Plichko, *On distribution of the norm for normal random elements in the space of continuous functions*, Lith. Math. J. **53**:1 (2013), 72–79.
4. M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 23. Springer-Verlag, Berlin, (1991).

3.5. Михайло Йосипович Островський

Я познайомився з Анатолієм на початку 80-х років, коли він приїхав з доповіддю на семінар М. Й. Кадеця. Я був дуже вражений як широтою його пізнань у теорії банахових просторів, так і його відвертістю з політичних питань. Так він наприкінці першої нашої зустрічі сказав мені, що він не є членом КПРС тому що він не хоче бути членом “такої партії”.

Протягом багатьох років ми підтримували з Толею активні контакти через листування та розмови на конференціях. Наші контакти були для мене значно більш важливими, ніж їх ‘офіційний результат’ – дві спільні праці, одна з яких є з історії математики.

Так, важливою частиною мого розвязання проблеми Крейна-Красносельського-Мільмана [7] є Толіне спостереження про відстань від одиничної кулі простору $c_0[0,1]$ до одиничної кулі простору $C[0,1]$. Мій інтерес до класифікації тотальних та нормуючих підпросторів походить від Толіного зауваження на мою спільну з Є. Доманським статтю про те, що альтернативне доведення одного з наших результатів може бути одержано за допомогою слабких* секвенціальних замикань. Завдяки цьому я зацікавився класифікацією тотальних підпросторів спряжених банахових просторів і зрештою захистив докторську дисертацію у цьому напрямку.

Подальше листування з Анатолієм призвело до появи нашого з ним розуміння історії цієї класифікації, яка значно відрізняється від «офіційної», викладеної в [2] та [4]. Так, наприклад, твердження в [4, p. 57, p. 60] про те, що Островський [8] «узагальнив результати С. Банаха [1] і Б. В. Годуна [3]» хибне, оскільки відповідні доведення у вказаних джерелах недосконалі; насправді Островський узагальнив результати Мазуркевича [5] і McGehee [6] (McGehee навіть не згадується в «офіційній» історії цього напрямку). «Наше» розуміння історії цього напрямку може бути знайдено у праці А. М. Плічка [10], яка містить його важливі результати в даному напрямку, та в моєму огляді [9].

Я хотів би закінчити мої спогади тим, що на моїй пам’яті Толя ніколи не втрачав своєї доброзичливості та жадання справедливості, хоча б історичної. Останнє спонукало його до систематичної роботи в історичному напрямку.

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Banach, *Théorie des opérations lińeaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
2. S. Banach, *Theory of linear operations*, North-Holland, Amsterdam New York Oxford Tokyo, 1987.
3. B. V. Godun, *Weak* derived sets of transfinite order of sets of linear functionals*, Sib. Mat. Zh. **18**:6 (1977) 1289–1295.
4. P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff, V. Zizler, *Biorthogonal systems in Banach spaces*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, **26**. Springer, New York, 2008.
5. S. Mazurkiewicz, *Sur la dérivée faible d’un ensemble de fonctionnelles linéaires*, Studia Math., **2** (1930), 68–71.
6. O. C. McGehee, *A proof of a statement of Banach about the weak* topology*, Michigan Math. J. **15** (1968), 135–140.
7. M. I. Ostrovskii, *On the properties of the opening and related closeness characterizations of Banach spaces* (Russian), Teor. Funktsii, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **42** (1984), 97–107; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol. **136** (1987), 109–119.
8. M. I. Ostrovskii, *w^*-derived sets of transfinite order of subspaces of dual Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR, 10 (1987), 9–12.

9. M. I. Ostrovskii, *Weak* sequential closures in Banach space theory and their applications*, in: *General Topology in Banach Spaces*, ed. by T. Banakh and A. Plichko, New York, Nova Sci. Publishers, 2001, pp. 21–34; Available at `http://front.math.ucdavis.edu` as `math.FA/0203139`

10. A. Plichko, *Decomposition of Banach space into a direct sum of separable and reflexive subspaces and Borel maps*, Serdica Math. J., **23** (1997), 335–350.

3.6. Михайло Михайлович Попов

У 1982 р. на початку моєї математичної діяльності В. К. Маслюченко, мій перший фактичний науковий керівник, який на той час ще не мав наукового ступеня, запропонував мені задачу, яку йому сповістив А. М. Плічко. Це – проблема С. Ролевича про існування у довільному нескінченновимірному F-просторі нескінченновимірного сепарабельного фактор-простору. До задачі додавався від Плічка ймовірний кандидат у контрприклади – несепарабельний простір $L_p(\mu)$ з ймовірнісною безатомною мірою μ та $0 < p < 1$. Через два місяці наполегливої роботи я поїхав до Анатолія Миколайовича у Львів в гості з доведенням. А. М. люб'язно запросив мене зупинитися в нього на квартирі. Вислухавши і схваливши моє доведення, А. М. запропонував мені відправити статтю з цим доведенням у модний на той час московський журнал «Функц. анализ и его прилож.», а також погодився бути керівником моєї кандидатської дисертації. Усвідомивши, що внесок А. М. до розв'язання проблеми Ролевича у вигляді пропозиції правильного кандидата у контрприклади є вельми істотним, я запропонував написати цю статтю у співавторстві з А. М., на що А. М. категорично відмовився. Натомість, А. М. сказав, що я можу виразити йому подяку у певній формі. Майже не маючи досвіду написання статей, я не зрозумів, що йдеться про речення з подякою у статті, що вказує на автора ідеї розглядати простір $L_p(\mu)$ з $0 < p < 1$ щодо даної задачі. Натомість я невідкладно пішов у найближчий гастроном у пошуках певної подяки, яку ми з ним успішно спожили.

На той же час в мене були плани поступати у цільову аспірантуру до В. А. Успенського на кафедру алгебри і логіки МДУ з доробком у вигляді прийнятої до друку у московському журналі статті з математичної логіки. Після певного спілкування з недосяжними московськими математиками я був настільки приємно вражений спілкуванням з А. М., що вирішив відмовитися від цільової аспірантури в Москві і обрав функціональний аналіз, як основну галузь подальших наукових досліджень. Роль А. М. у цьому виборі була вирішальною.

Доброзичливість, чесність, прагнення поділитися усіма своїми знаннями та дослідницькими методами, скромність, – це ті якості Анатолія Плічка, які його відрізняють від багатьох інших науковців. Цікаво, що надзвичайна скромність Анатолія Миколайовича не завадила йому стати одним із найвідоміших у світі українських спеціалістів з функціонального аналізу, про що яскраво засвідчила конференція, яка була проведена на честь його 70-річчя у Львові в червні 2019 р, на яку приїхали 57 іноземців з 18 країн світу.

А. М. Плічко на конференції в Чернівцях, 1994 рік

Побажання ювіляру

Ми бажаємо ювіляру міцного здоров'я, плідного завершення тих справ, які він планує зробити, а також сімейного щастя.