Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДАЛЬНИХ ГРУП ТА ЇХ МНОГОВИДІВ, I

Тетяна Савочкіна, Ігор Мельник

Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди

Т. Савочкіна, І. Мельник. *Структурні властивості модальних груп та їх многовидів, I* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 45–50.

У статті представлені нові результати про модальні групи, які можуть бути використані для дослідження модальних груп та груп з інших класів.

T. Savochkina, I. Melnyk, *Structural properties of modal groups and varieties, I*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 45–50.

In the paper we present our new results of the modal groups, which are useful for exploration of modal groups and groups from other classes.

Вступ

Дослідження Р. Бера і О. Оре в кінці 30-х років XX-го століття започаткували розвиток одного із важливих напрямків теорії груп: будова груп з обмеженням на структуру (гратку) підгруп. Подальші дослідження М. Судзукі, Г. Біркгофа, С.М. Чернікова (та його учнів) зробили більш зрозумілим зв'язок між будовою групи G і будовою її гратки підгруп $L(G)$ ([1]—[3]). Так, наприклад, вільні групи і деякі типи абелевих груп охарактеризовано браткою їх підгруп. З іншого боку, відомо [1], що у більшості випадків група не визначається структурою своїх підгруп. Класичним результатом у цьому напрямку є характеризація скінченних розв'язних груп і скінченних p-груп, знайдена М.Судзукі у теоремах 14 і 23 з [1].

Особливий інтерес для вивчення мають такі групи G, у яких гратка підгруп $L(G)$ належить фіксованому многовиду граток α. Клас усіх таких груп позначимо через $\alpha(G)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20D30 *УДК:* 512.54
Ключові слова і фрази: Modal groups
E-mail: savochkinat@rambler.ru
.

Фундаментальні результати для модулярних груп (многовид $\alpha = \mathfrak{M}$) і дистрибутивних груп (многовид $\alpha = \mathfrak{D}$) викладено у монографії [1].

У роботі [4] досліджувався многовид граток $\mathfrak{U}_n$, тобто таких граток L, на яких істинна нерівність

$$T\bigcap(\bigcap_{i,j}(A_i + A_j)) \leq \sum_{k=1}^{n}(T\bigcap A_k) \qquad (1)$$

для довільних елементів $T, A_i \in L$, де $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$.

Зацікавленість до цього многовиду $\mathfrak{U}_n$ виникла у зв'язку з тим, що перетин $\mathfrak{U}_3 \cap \mathfrak{M}$ покриває многовид дистрибутивних граток.

Модальні групи параметра n, тобто групи G, для яких гратка підгруп $L(G) \in \mathfrak{U}_n$, вперше досліджувалися одним із авторів ще у 1981 році ([5], [6]). Назріла необхідність опублікування основних результатів цих досліджень, а також низки нових фактів про модальні групи, отриманих авторами. У даній роботі:

1) обгрунтовано основні твердження про будову модальних груп параметра $n = 3, 4$;

2) встановлено низку нових фактів, що стосуються структури модальних груп параметра $n = 5$;

3) наведено опис деяких многовидів модальних груп, і їх граток підмноговидів.

Зауваження. а) Для довільної абстрактної гратки L і елементів $x, y \in L$ позначимо: $x \cap y = \inf\{x, y\}$ та $x + y = \sup\{x, y\}$. Якщо $L(G)$ – гратка підгруп групи G, то для елементів $A, B \in L(G)$ маємо: $A \cap B$ – перетин підгруп; $A + B$ – найменша підгрупа із G, яка містить у собі підгрупи A і B.

б) Усі неозначені в статті поняття і позначення можна знайти в [7]—[9].

1. Загальні властивості модальних груп

Система підгруп $\sum = \{A_1, \dots, A_n\}$ групи G називається модальною, якщо для усякої підгрупи T із G істинна нерівність (1).

Як відомо ([9]), порядком елемента $c \in G$, стосовно підгрупи $D \leq G$, називається таке найменше натуральне число $l = l_D$, для якого елемент $c^l \in D$. Якщо такого числа не існує, то покладемо $l = 0$. Наступна теорема є аналогом відповідного твердження для дистрибутивних пар підгруп [1, стор. 17].

Покладемо:

$$M = \bigcap_{i \neq j}(A_i + A_j); \quad A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k; \quad K = T \cap A_1 + \dots + T \cap A_n.$$

Нехай $l_i = l_i(t)$ – порядок елемента $t \in M \setminus A$ відносно підгрупи A_i.

Теорема 1.1. *Для того, щоб система підгруп $\sum$ була модальною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого елемента $t \in M \setminus A$ порядки $l_1, \dots, l_n$ були взаємно прості і хоча б два числа із них відмінні від нуля.*

Доведення. Припустимо, що $\sum = \{A_1, \dots, A_n\}$ – модальна система підгруп групи G. Розглянемо елемент $t \in M \setminus A$. Із нерівності (1) випливає, що $T = \langle t \rangle = T \cap A_1 + ... + T \cap A_n$, де у правій частині хоч би два доданки відмінні від одиничної підгрупи. Нехай l_i –

порядок елемента t стосовно підгрупи A_i. Зрозуміло, що $T \cap A_i = \langle a_i \rangle$, де $a_i = t^{l_i}$. Отже, маємо рівність $t = a^{r_1} \cdot a^{r_2} \cdots a^{r_n} = t^{\nu}$, де $\nu = l_1 \cdot r_1 + l_2 \cdot r_2 + \cdots + l_n \cdot r_n$. Звідси випливає конгруенція $l_1 \cdot r_1 + l_2 \cdot r_2 + \cdots + l_n \cdot r_n \equiv 1 \pmod{m}$, якщо $m = |t| < \infty$ і $l_1 \cdot r_1 + l_2 \cdot r_2 + \cdots + l_n \cdot r_n = 1$, якщо $|t| = \infty$. Для кожного із цих випадків маємо $(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$, тобто числа l_i взаємно прості.

Доведемо обернене твердження. Розглянемо довільну підгрупу $T \leq M$ і покажемо, що $T \leq K$. Нехай елемент $t \in M \setminus A$ і l_i – порядок t відносно підгрупи A_i. За умовою $(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$, а тому знайдуться такі цілі числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, що $z_1 \cdot l_1 + z_2 \cdot l_2 + \cdots + z_n \cdot l_n = 1$. Далі маємо: $t = t^{z_1 \cdot l_1 + z_2 \cdot l_2 + \cdots + z_n \cdot l_n} \in K$. Оскільки включення $T \cap M \leq K$ істинне для довільної підгрупи $T \leq M$, то воно є справедливим і для довільної підгрупи $T \leq G$. □

Наслідок 1.2. *Примарна група G модальна, параметра $n \geq 2$, тоді і тільки тоді, коли для довільних підгруп $A_1, \ldots, A_n$ із G виконується включення*

$$\bigcap_{i,j} (A_i + A_j) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad i \neq j.$$

Доведення. Розглянемо довільний елемент $t \in M$ і припустимо, що $t \notin A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. За умовою $|t| = p^m$, де p – просте число. За теоремою 2.1 порядки l_i елемента t відносно підгруп A_i (відповідно), задовольняють умову: хоча б два числа із l_i відмінні від нуля і $(l_1, l_2, \ldots, l_n) = 1$. З іншого боку, очевидно, $l_i \,\vdots\, p$, для $i = \overline{1, n}$. Отримали суперечність. Отже, встановлено, що підгрупа $M \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Доведемо тепер достатність умови $M \subseteq A$. Отже, для групи G маємо вказане включення. Для довільної підгрупи $T \leq G$ маємо:

$$T \cap M \subseteq T \cap A = \bigcup_{i=1}^{n} (T \cap A_i) \subseteq T \cap A_1 + \cdots + T \cap A_n.$$

Отже, група G модальна параметра n. □

Наслідок 1.3 (теорема 19.2.1, [8])**.** *Для довільної дистрибутивної примарної групи G гратка підгруп $L(G)$ є ланцюгом.*

Доведення. За означенням, група G дистрибутивна [8], якщо для довільних підгруп T, A, B із G виконується рівність $T \cap (A + B) = T \cap A + T \cap B$. Оскільки G 2-модальна p-група, то за попереднім маємо рівність $A + B = A \cup B$. Звідси випливає, що $A \leq B$ або $B \leq A$. Отже, встановлено, що гратка $L(G)$ – ланцюг. □

Зауваження. а) Система підгруп $\{H_i\}_{i \in I}$ групи G називається залежною (відносно $\subseteq$), якщо існують такі дві підгрупи H_i, H_j $(i \neq j)$, що $H_i \subseteq H_j$. У супротивному випадку система H_i називається незалежною. Згідно [1], система підгруп $\{H_i\}$ називається модулярною, якщо усяка трійка її елементів задовольняє модулярний закон: $x \cap (x \cap y + z) = x \cap y + x \cap z$.

б) Для усякої залежної модулярної системи $\sum_1 = \{T, A_1, \ldots, A_n\}$ підгруп групи G виконується модальний закон (1). Дійсно, якщо підсистема $\{A_i\}$ залежна, то, очевидно,

$\sum_1$ задовольняє модальний закон (1). Припустимо тепер, що система $\{A_i\}$ незалежна. Якщо підгрупа $T \leq A_j$, для деякого індекса j, то $T \cap M \leq T \leq T + K_1 = K$ і все встановлено. Нехай підгрупа $T \geq A_j$, тоді $T \cap M \subseteq T \cap (A_l + A_j) = T \cap A_l + T \cap A_j \leq K$. Отже, для системи підгруп $\sum_1$ виконується закон (1).

в) Нехай $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – підгрупи групи G і $G = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$, $k \geq 3$. Якщо підгрупа B_k не міститься в об'єднанні $B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}$, тоді $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k$. Дійсно, розглянемо елемент $h \in B_k \setminus B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1}$ і припустимо, що існує елемент $z \in B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \setminus B_k$. Зрозуміло, що $h \cdot z \notin B_k$ і $h \cdot z \notin B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1}$. За умовою $G = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$, а тому отримали суперечність. Таким чином, $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k$.

г) Клас $\mathfrak{M}_n$ усіх модальних груп (параметра n) замкнений відносно підгруп і гомоморфних образів.

2. Характеристика модальних груп параметра $n = 3$

За означенням група G модальна параметра $n = 3$ (надалі просто 3-модальна), якщо для довільних підгруп T, A, B, C групи G істинна нерівність:

$$T \cap (A + B) \cap (A + C) \cap (B + C) \leq T \cap A + T \cap B + T \cap C$$

Наступне твердження дає повний опис 3-модальних груп.

Теорема 2.1. *Група G 3-модальна тоді і тільки тоді, коли вона належить до одного із наступних типів груп:*

1) G – локально циклічна група;

2) G – група кватерніонів або нециклічна група 4-го порядку;

3) $G = A \times B$, де A – локально циклічна група, кожен елемент якої має непарний порядок, а B – група типу 2).

Доведення. Розглянемо довільну 3-модальну групу G. Для елементів $a, b \in G$ визначаємо підгрупи: $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle b \cdot a \rangle$, $T = \langle b \cdot a \cdot b^{-1} \rangle$ і нехай елемент $t = b \cdot a \cdot b^{-1} \notin A$. Очевидно, що $t \in (A + B) \cap (A + C) \cap (B + C)$ і $t \notin A \cup B \cup C$. За умовою модальності групи G маємо рівність $T = T \cap A + T \cap B + T \cap C$, оскільки $A + B = A + C = B + C = \langle a, b \rangle \geq T$. За теоремою 2.1, знайдуться числа l_A, l_B, l_C такі, що $t^{l_A} \in A$, $t^{l_B} \in B$, $t^{l_C} \in C$ і $(l_A, l_B, l_C) = 1$. Тоді $l_A \cdot x + l_B \cdot y + l_C \cdot z = 1$ для деяких цілих чисел x, y, z. Звідси випливає, що $t = b \cdot a \cdot b^{-1} = (b \cdot a^r \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot a^s \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot a^m \cdot b^{-1})$, де $r = l_A \cdot x, s = l_B \cdot y, m = l_C \cdot z$. Очевидно, $b \cdot a^r \cdot b^{-1} = t^r \in A$, $b \cdot a^s \cdot b^{-1} \in A$, $b \cdot a^s \cdot b^{-1} \in A$. Далі, із рівності $b \cdot a^m \cdot b^{-1} = (b \cdot a)^\gamma$ маємо $a^m = (a \cdot b)^\gamma = (b \cdot a)^\gamma \in A$. Отже, $t = b \cdot a \cdot b^{-1} \in A$, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення, що $t = b \cdot a \cdot b^{-1} \notin A$, невірне. Отже, встановлено, що для довільних елементів $a, b \in G$ маємо $b \cdot a \cdot b^{-1} \in A = \langle a \rangle$. Отже, встановлено, що 3-модальна група G є або абелевою, або групою Гамільтона.

Нехай елементи $a, t \in G$ і $|a| = \infty$, $t \neq 1$, $|t| < \infty$. Оскільки усяка гамільтонова група періодична, то G необхідно абелева група. Розглянемо підгрупи: $T = \langle t \rangle$, $A = \langle a \rangle$, $B = \langle t \cdot a \rangle$, $C = \langle t \cdot a^2 \rangle$. Із умови модальності групи G випливає рівність $T = T \cap A +$

$T \cap B + T \cap C$. Враховуючи, що a, $t \cdot a$, $t \cdot a^2$ – елементи нескінченного порядку, маємо $T \cap A = T \cap B = T \cap C = \{1\} = T$, що суперечить умові $t \neq 1$. Таким чином доведено, що усяка 3-модальна група G або періодична група, або група без скруту.

Нехай G – 3-модальна група без скруту. За встановленим вона абелева. Покажемо, що G – локально циклічна група. Нехай x, y — довільні елементи відмінні від 1 із G. Припустимо, що $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$. Для підгруп $T = \langle x \rangle$, $A = \langle y \rangle$, $B = \langle x \cdot y \rangle$, $C = \langle x \cdot y^2 \rangle$ маємо рівність $C = C \cap A + C \cap B + C \cap T$. Так як $T \cap A = \{1\}$, то $C \cap A = C \cap B = C \cap T = \{1\}$, а тому $x \cdot y^2 = 1$, що неможливо. Отже, обов'язково $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \{1\}$. Далі, G – абелева група, а тому якщо елементи x, y не породжують циклічну підгрупу, то вони породжують прямий добуток двох циклічних підгруп, що за встановленим неможливо. Таким чином, 3-модальна група G без скруту – локально циклічна група.

Перейдемо тепер до розгляду абелевих періодичних 3-модальних груп. У цьому випадку група G є прямим добутком своїх силовських підгруп G_p (тобто примарних компонент за різними простими числами p). Звідси випливає, що гратка підгруп $L(G)$ ізоморфна прямому добутку граток $L(G_p)$. Отже, група G 3-модальна тоді і тільки тоді, коли 3-модальними є всі її силовські підгрупи G_p. Отже, структурна теорія випадку 3-модальних абелевих періодичних груп зводиться до випадку 3-модальних абелевих p-груп.

Розглянемо довільну 3-модальну абелеву p-групу G. За наслідком 1, для підгруп A, B, C із G маємо включення $(A + B) \cap (A + C) \cap (B + C) \leq A \cup B \cup C$.

Припустимо, що G – скінченна нециклічна група порядку p^m. Через $\sigma(G)$ позначимо кількість дуальних атомів гратки $L(G)$. Очевидно, $\sigma(G) > 2$. Покажемо, що $\sigma(G) = 3$. Нехай $\sigma(G) > 3$ і A, B, C, D – максимальні (різні) підгрупи групи G. Маємо рівність: $A \cup B \cup C = G$, звідси випливає, що $A \cap B = A \cap C = B \cap C = H$. Аналогічно, $G = A \cup B \cup D$ і $A \cap B = A \cap D = B \cap D$, а тому для $M = A \cup B$ маємо: $M \cup C = M \cup D$, $M \cap C = M \cap D$. Звідси випливає, що $C = D$, що суперечить умові. Таким чином, обов'язково $\sigma(G) = 3$.

Оскільки гратка $L(G)$ модулярна, то підгрупи A, B, C покривають підгрупу H. Розглянемо випадок, коли $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C) = 1$. Звідси випливає, що група G містить єдину підгрупу порядку $|H|$. Якщо $|H| = p$, то група G є групою кватерніонів або циклічною, що за умовою неможливо. У випадку $|H| = p^k$, $k > 1$, група G циклічна, що суперечить умові. Таким чином, $|H| = \{1\}$, а тому G – нециклічна група 4-го порядку.

Очевидно $\sigma(A) \neq 2$, $\sigma(B) \neq 2$, $\sigma(C) \neq 2$. Припустимо $\sigma(C) = 3$ і нехай H, M, N – максимальні підгрупи групи C. Враховуючи, що $H \cap M = H \cap N = M \cap N = K$ і $N \cap A = N \cap H = N \cap B$, маємо рівності $N = N \cap (A + B) \cap (A + M) \cap (B + M)$, $K = N \cap A + N \cap B + N \cap M$. Оскільки підгрупа N не міститься в K, то отримали суперечність з умовою модальності групи G.

Із встановленого випливає, що обов'язково $\sigma(A) = \sigma(B) = \sigma(C) = 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли G – нескінченна абелева 3-модальна p-група. Усяка скінченно породжена підгрупа $M \neq \{1\}$ скінченна. За встановленим, M або циклічна, або нециклічна 4-го порядку група. Існує така підгрупа $F \leq G$, що $|M| < |F| < \infty$. Звідси випливає, що підгрупа M – циклічна, оскільки $|F| > 4$. Отже, встановлено, що G – локально циклічна група.

Нарешті, розглянемо 3-модальну гамільтонову групу G. Відомо [9], що $G = Q \times$

$B \times T$, де Q – група кватерніонів, B – абелева група, усякий елемент якої має непарний порядок, T – елементарна абелева група (показника 2).

Із модальності групи G випливає модальність підгруп B і T. За попереднім B – локально циклічна підгрупа, а T – або група 2-го порядку або нециклічна група 4-го порядку. Враховуючи, що $Q \times T$ немодальна група, маємо $G \cong Q \times B$ $\square$

Наслідок 2.2. *а) Усяка 3-модальна група або періодична, або група без скруту.*

б) 3-модальна група без скруту локально циклічна група.

в) Усяка 3-модальна група абелева або група Гамільтона.

Відмітимо, що основні результати досліджень доповідались на міжнародних конференціях [10], [11].

На завершення сформулюємо наступні три проблеми, що стосуються тематики дослідження:

Проблема 1. Знайти діаграмну характеристику модальних граток.

Проблема 2. Довести, що на всякій модальній групі G (параметра $n \leq 4$) істинна тотожність $[x^2, y^2] = 1$.

Проблема 3. Довести, що на вільній модулярній гратці $FM(3)$ виконується модальний закон (для $n = 4$).

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Судзуки, *Строение группы и строение структуры ее подгрупп*, М.: Изд.И.Л. (1960), 158 с.
2. С.Н. Черников, *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*, М.: Наука (1980), 384 с.
3. А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук, *О решетках подгрупп конечных групп*, Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические структуры. АН Украины, Ин-т матем., Киев (1993), 27–54.
4. Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, М.: Мир (1982), 452 с.
5. И.И. Мельник, *Строение модальных групп*, ДЕП.ВИНИТИ **3270** (1981), 1–17.
6. И.И. Мельник, *Некоммутативные модальные группы*, ДЕП.ВИНИТИ **9679** (1983), 1–17.
7. M. Aschbacher, *Finite group theory*, Camdridge University Press (2000), 304 p.
8. Г. Биркгоф, *Теория решеток* , М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы (1984), 568 с.
9. М. Холл, *Теория групп*, М.: Изд.И.Л. (1962), 468 с.
10. T. Savochkina, I. Melnyk, *The structural properties of modal groups*, Book of abstracts of the International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M.Chernikov (August 20-26, 2012), Kyiv, (2012), p. 132.
11. T. Savochkina, *About varieties of modal lattices and modal groups*, Abstract of Reports, International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach (September 17-21, 2012), Lviv, (2012), p. 263.

Надійшло 10.11.2012

Після переробки 11.09.2013